Pannon Egyetem
University of Pannonia

Tankönyv

Modellalapú döntéshozatal

Gondolkodási eszközök, többkritériumos módszerek és interaktív döntési műhelyek

Abonyi János

Pannon Egyetem · Veszprém, 2026

Pannon Egyetem
University of Pannonia

Tankönyv

Modellalapú döntéshozatal

Gondolkodási eszközök, többkritériumos módszerek és interaktív döntési műhelyek

Abonyi János

Pannon Egyetem
University of Pannonia

Veszprém, 2026



Abonyi János: Modellalapú döntéshozatal – Tankönyv

Gondolkodási eszközök, többkritériumos módszerek és interaktív döntési műhelyek

© 2026 Abonyi János

Kiadó: Pannon Egyetem, Veszprém

Változat: 1.0.0, 2026. november 27.

A mű a Creative Commons Nevezd meg! – Ne add el! – Így add tovább! 4.0 Nemzetközi licenc (CC BY-NC-SA 4.0) feltételei szerint használható fel; a mellékelt programkód licence MIT.

Webes változat:
https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/kezikonyv/

Forrás, hibajelzés és javaslat:
https://github.com/ComplexSystemsIntelligence/modellalapu-donteshozas

A kiadások archivált változata és DOI-azonosítója a Zenodón érhető el.

Betűkészletek: IBM Plex Serif, IBM Plex Sans, Raleway (SIL Open Font License 1.1). Szedés: Quarto és XeLaTeX.

Tartalom

Előszó 1

I. rész – A döntési helyzet megértése 7

1. Miért és hogyan gondolkodunk modellekkel? 9
2. A döntési probléma megfogalmazása 23
3. Emberi ítélet, önismeret és döntési torzítások 35
4. Alternatívák előállítása és kreatív problémamegoldás 47

II. rész – Személyes és stratégiai áttekintés 57

5. Személyes célok, figyelem és prioritások 59
6. Stratégiai helyzetkép és portfóliógondolkodás 73

III. rész – Többkritériumos döntéstámogatás 85

7. Kritériumok, mérési skálák és kizáró feltételek 87
8. Értékfüggvények, súlyok és additív értékelés 105
9. AHP: páronkénti összehasonlítás 117
10. TOPSIS és az ideális megoldás közelsége 127
11. Outranking: PROMETHEE és ELECTRE 135
12. Csoportos döntés, érzékenység és robusztusság 145
13. Erőforrás-elosztás és többcélú optimalizálás 161

IV. rész – Bizonytalanság és információ 179

14. Döntési fák, valószínűség és hasznosság 181

15. Bayes-frissítés és az információ értéke 191

16. Monte Carlo-szimuláció és bizonytalan következmények 199

17. Mély bizonytalanság, ritka esemény és robusztus döntés 217

V. rész – Adatok, idő és összetett rendszerek 227

18. Adatok, előrejelzés, okság és modellvalidálás 229

19. Időbeli következmények: készletek, növekedés és stabilitás 239

20. Állapotváltások és szekvenciális döntések 267

21. Fordulópontok, diffúzió és útfüggőség 281

22. Hálózatok, aggregáció és emergens következmények 297

VI. rész – Más szereplők, együttműködés és tanulás 315

23. Stratégiai kölcsönhatások 317

24. Együttműködés, közös erőforrás és mechanizmustervezés 331

25. Tanulás, közös előrejelzés és többmodellű gondolkodás 345

26. Csapat, motiváció, konfliktus és vezetői döntés 357

VII. rész – MI-támogatás és integrált döntési gyakorlat 371

27. MI-támogatás a döntési folyamatban 373

28. Integrált döntési műhely és saját projekt 381

Irodalom 393

Függelékek 415

A. Matematikai alapok 415

B. Rövid Python-útmutató **423**

C. Digitális eszközök: alkalmazások, munkafüzetek és notebookok **431**

D. A könyv esetei és adatai **435**

E. Modelltár **441**

F. Fogalomtár **449**

Előszó

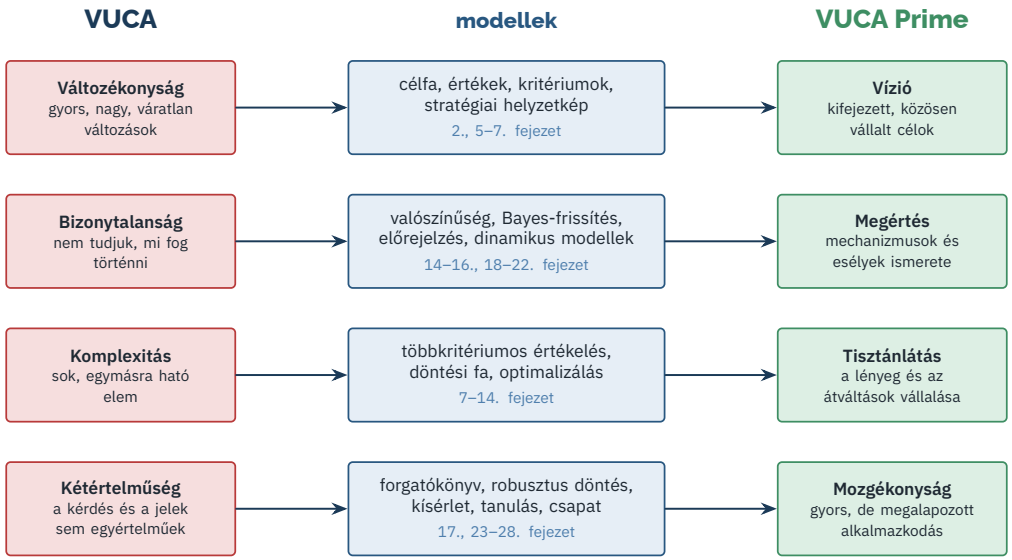
Aki az elmúlt években bármilyen döntést hozott – egy cég, egy egyetemi tanszék, egy család vagy a saját pályája ügyében –, ismeri az érzést: alig készül el egy terv, máris megváltozik a világ, amelyre készült. Egy járvány hetek alatt átrendezi a munkát, egy új technológia évek helyett hónapok alatt terjed el, egy távoli konfliktus a fűtésszámlánkban jelenik meg. A vezetéselmélet ezt a világot egy négybetűs mozaikszóval írja le: **VUCA**. A kifejezést az amerikai hadsereg katonai főiskoláján (U.S. Army War College) kezdték használni a hidegháború lezárulásakor, az 1980-as évek végén, amikor az addigi, viszonylag kiszámítható szembenállást egy áttekinthetetlenebb világ váltotta fel (Stiehm 2002). A négy betű négy különböző nehézséget jelöl (Bennett és Lemoine 2014):

- **változékonyság** (*volatility*): a változás gyors, nagy és váratlan, de nem feltétlenül érthetetlen;
- **bizonytalanság** (*uncertainty*): az okokat ismerhetjük, de nem tudjuk, mi fog történni, és lesz-e jelentős következménye;
- **komplexitás** (*complexity*): sok, egymásra ható elem, amelyek kapcsolatai nehezen áttekinthetők;
- **kétértelműség** (*ambiguity*): az ok-okozati viszonyok is tisztázatlanok, nincs mihez hasonlítani, és ugyanaz a jel többféleképpen értelmezhető.

Nathan Bennett és James Lemoine figyelmeztet, hogy a „VUCA világ” címke könnyen kifogássá válik: ha minden kiszámíthatatlan, minek tervezni? Pedig a négy helyzet más-más választ kíván, és mindegyikre van észszerű válasz (Bennett és Lemoine 2014). Bob Johansen jövőkutató ezt a gondolatot egy másik négybetűs szóval fogalmazta meg. A VUCA-nak van egy pozitív párja, amelyet a vezetőknek kell megteremteniük: a változékonyságra **vízióval**, a bizonytalanságra **megértéssel**, a komplexitásra **tisztánlátással**, a kétértelműségre **mozgékonysággal** (*vision, understanding, clarity, agility*) lehet válaszolni. Ezt nevezi VUCA Prime-nak (Johansen 2009).

Ez a könyv arról szól, hogy ehhez az átalakításhoz modellek kellenek (1. ábra). A vízió nem jóslat, hanem kifejezett célok és értékek rendszere, amelyet meg lehet beszélni és számon lehet kérni; ebben a célfák, a kritériumok és a stratégiai helyzetkép modelljei segítenek. A megértés a mechanizmusok és az esélyek ismerete: miért és hogyan változik a rendszer, és mennyire bízhatunk egy előrejelzésben; ezt a valószínűségi, a dinamikus és a hálózati modellek

adják. A tisztánlátás a lényeges és a lényegtelen szétválasztása, az átváltások nyílt vállalása; ehhez a többkritériumos módszerek és a döntési fák kellenek. A mozgékonyság pedig gyors, de megalapozott alkalmazkodás: a szimuláció, a forgatókönyvek, a robusztus döntés és a tanulás modelljei teszik lehetővé, hogy ne egyetlen jövőre tervezzünk, és időben észrevegyük, ha változtatni kell.



A párosítás Johansen VUCA Prime keretét követi; a modellcsaládok és a fejezetek hozzárendelése a könyv saját értelmezése.

1. ábra. A VUCA világból a VUCA Prime felé. Johansen párosítása szerint a változékonyságra vízióval, a bizonytalanságra megértéssel, a komplexitásra tisztánlátással, a kétértelműségre mozgékonysággal lehet válaszolni; a középső oszlop azt mutatja, mely modellcsaládok segítik az egyes átalakításokat, és a könyv mely fejezeteiben szerepelnek.

Döntéseink többségét nem számítással, hanem tapasztalattal, megérzéssel és mások tanácsával hozzuk meg, és ez sokszor így is van jól. Vannak azonban helyzetek, amelyekben a tét nagy, a lehetőségek sokfélék, a következmények bizonytalanok, és a döntést másoknak is meg kell indokolnunk. Ilyenkor segít, ha a gondolkodásunkat **modellekkel** tesszük kifejezetté: leírjuk, mit akarunk elérni, milyen lehetőségeink vannak, mi múlik a véletlenen és mi a többi szereplőn, és mely feltevéseken áll a következtetésünk.

Ez a tankönyv arról szól, hogyan válasszunk és használjunk modelleket egy döntési helyzetben. Az egyszerű gondolkodási keretektől (prioritási mátrixok, célfák, önismereti modellek) a többkritériumos döntési és rangsoroló módszereken (Pareto-front, additív értékmodell, AHP, TOPSIS, PROMETHEE, ELECTRE, rangsorkülönbség-összeg), az elemi operációkutatási modelleken (lineáris programozás, hozzárendelés, készletezés, várakozási sorok) és a bizonytalanság kezelésén (döntési fák, Bayes-frissítés, Monte Carlo-szimuláció,

folyamatképesség, forgatókönyvek) át a dinamikus és társas rendszerek modelljéig (állapottér és stabilitás, bifurkáció és káosz, Markov-láncok, diffúzió, hálózatok és sejtautomaták, játékelmélet, externáliák, tanulás) vezet. A könyv nem módszertani katalógus: minden modellnél azt kérdezi, milyen döntési kérdésre ad választ, milyen feltevésekre épül, és mikor vezet félre (Page 2018).

Kinek szól a könyv?

A könyv egyetemi hallgatóknak készült a modellalapú döntéstámogatás alapozó és haladó kurzusaihoz, de gyakorló szakemberek – vezetők, elemzők, projektmenedzserek – is haszonnal forgathatják. A megértéshez középiskolai matematika elég; a formálisabb részek (képletek, levezetések, notebookok) külön rétegben szerepelnek, és kihagyhatók anélkül, hogy a gondolatmenet megszakadna. A szükséges matematikai fogalmakat az A. függelék, a Python-demók olvasásához és átírásához elegendő programozási alapokat a B. függelék foglalja össze.

Hogyan olvasd?

A könyv három, egymásra épülő olvasási réteget kínál (1.7. szakasz):

- a **megértés** rétege a nyitókártyákból, a közérthető magyarázatokból, az ábrákból és a böngészőben futó kísérletekből áll; egy-egy téma 5–8 perc alatt áttekinthető;
- az **alkalmazás** rétege kidolgozott számításokat, Excel-munkafüzeteket és döntési feljegyzéseket tartalmaz;
- az **elemzés** rétege képleteket, levezetéseket, Python-notebookokat és a módszerek összehasonlítását kínálja.

Minden téma egy **nyitókártyával** indul: egy rövid helyzet, egy felismerés („a lényeg”) és egy személyes kérdés. A kártyához egy interaktív nézet tartozik, amelyben előbb tippelsz, aztán változtatsz, és megfigyeled a következményt. A könyv 124 kártyája a kártyalapozóban egy helyen, felidézésre is használható formában lapozható.

A fejezetek elején tanulási eredmények és egy rövid áttekintés, a végén módszer-összefoglaló, önellenőrző kérdések megoldással és a további olvasásra ajánlott források állnak. A keretes dobozok jelentése:

Doboz	Szerepe
Nyitókártya	rövid helyzet, a lényeg és egy kérdés, interaktív nézettel
Fogalom	pontos meghatározás

Doboz	Szerepe
Eset	a könyv hét végigvitt esetének egy-egy lépése
Példa	kidolgozott, kézzel követhető számítás
Buktató	tipikus hiba vagy félreértés
Próbáld ki	beágyazott interaktív kísérlet
Kitekintés	átviteli példa egy másik területre
Python-demó	rövid, bemásolható program, amely a szöveg számait újra előállítja
Mintaprompt	MI-eszközzel használható feladatleírás

Javasolt olvasási utak

A fejezetek sorban olvasva építenek egymásra, de különböző célokra rövidebb utak is járhatók:

Cél	Javasolt fejezetek
Gyors áttekintés a modellalapú gondolkodásról	1, 2, 3, 7, 8, 14, 28
Többkritériumos döntéstámogatás kurzus	2, 4, 7–13, 28
Döntés bizonytalanság mellett	1, 14–17, 18, 27
Rendszerek, hálózatok és társas döntések	19–26
Operációkutatás és folyamatok	7, 13, 16, 19, 20
Személyes és vezetői döntések	3, 5, 6, 26, 27

A könyv esetei

A modelleket hét végigvitt eset köti össze; ugyanazt a helyzetet több módszerrel is megvizsgáljuk, így a módszerek eltérései és feltevései összevethetők. A legtöbbször a **CASE02** szervezeti mobilitási döntés szerepel: ezen mutatjuk be a kötelező korlátokat, az értékfüggvényeket, a súlyozást, az AHP-t, a TOPSIS-t, a felülmúlási módszereket, a csoportos és robusztus értékelést, a költségszimulációt, a forgatókönyveket és a karbantartás Markov-modelljét, a 28. fejezetben pedig a teljes döntési folyamatot. A további esetek egy laptopválasztás (CASE01), egy projektportfólió és pályázati verseny (CASE03), egy szolgáltatási iroda kapacitása és előrejelzése (CASE04), egy dolgozó hallgató hete és fejlődése (CASE05), egy közös víztartály (CASE06) és egy új továbbképzési szolgáltatás bevezetése (CASE07). Minden adat szintetikus,

tanulási célra készült; a teljes adatokat és a számításokat előállító szkripteket a D. függelék sorolja fel.

A Döntési műhely

A tankönyv párja a *Döntési műhely* kötet. Minden fejezethez egy műhelyoldal tartozik egy böngészős alkalmazással (összesen 28), és ahol a téma indokolja, egy Excel-munkafüzettel (21) és egy Google Colab-notebookkal (21). A műhelyoldalak feladatokat, mintapromptokat, ellenőrző szempontokat és önellenőrző kérdéseket tartalmaznak; a záró műhely egy saját döntési projekt kidolgozását vezeti végig (C. függelék).

Források és köszönetnyilvánítás

A könyv tematikájának kiindulópontjai: a Pannon Egyetem *Döntéstámogatás és döntési modellek Python és Matlab alapokon* (VEMKFOB146DT) tárgyának Dr. Darányi András Pál által készített diasorai; Scott E. Page *Model Thinking* kurzusa és *The Model Thinker* című könyve (Page, é. n., 2018); valamint Mikael Krogerus és Roman Tschäppeler *The Decision Book* című kötetének ötven döntési modellje (Krogerus és Tschäppeler 2011). Köszönöm Darányi András Pálnak, hogy a tárgy anyagai e könyv kiindulópontjául szolgálhattak. A könyv szövege, ábrái, esetei és számításai új munka; a modellek eredeti forrásait és a kapcsolódó kutatási irodalmat a fejezetek hivatkozásai adják.

A könyv elkészítését mesterségesintelligencia-alapú eszközök is segítették a szövegváltozatok, az ábrák forráskódja, a számítások és az alkalmazások előkészítésében. Minden számot a tárolóban közzétett, újrafuttatható szkriptek állítanak elő; a szöveg, a számítások és a hivatkozások helyességéért a szerző felel. A hibákról, javaslatokról szóló visszajelzéseket a könyv GitHub-tárolójában örömmel fogadom.

Licenc és hivatkozás

A könyv szövege és ábrái a Creative Commons Nevezd meg! – Ne add el! – Így add tovább! 4.0 Nemzetközi (CC BY-NC-SA 4.0) licenc, a programkódok (alkalmazások, szkriptek, notebookok) az MIT-licenc szerint használhatók. Javasolt hivatkozás:

> Abonyi János (2026): *Modellalapú döntéshozatal. Gondolkodási eszközök, többkritériumos módszerek és interaktív döntési műhelyek.* Pannon Egyetem, Veszprém. https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/

Veszprém, 2026. november
Abonyi János

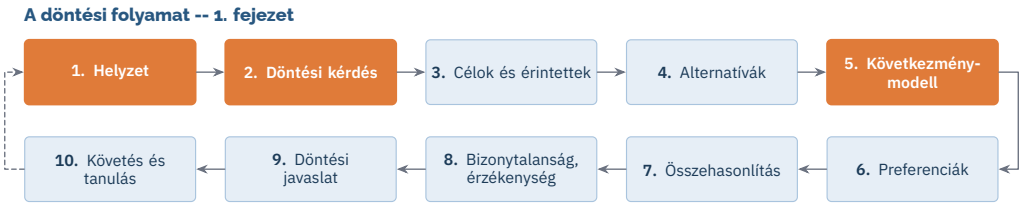
I. rész – A döntési helyzet megértése



Pannon Egyetem
University of Pannonia

1.

Miért és hogyan gondolkodunk modellekkel?



Ugyanaz a lista, másik választás

Juli és Marci, két régi kolléga, ugyanazon a délutánon választ új laptopot ugyanabból az ötös listából. Juli a vételárat nézi, mert idén szoros a családi költségvetés; Marci hetente háromszor vonaton dolgozik, neki az egész napos akkumulátor a legfontosabb. Ugyanazt a táblázatot látják, mégis mást választanak, és mindketten jó okkal.

A lényeg: A választás attól is függ, melyik célhoz és használati helyzethez keresünk megfelelő megoldást.

Kérdés: Melyik két különböző nézőpontból vizsgálnád meg a saját választásodat?

Szemléltető, kitalált helyzet · F01 · Próbáld ki: h01-nezopontok

Minden döntés mögött ott van valamilyen modell, akkor is, ha nem írjuk le. Amikor egy ajánlatot drágának tartunk, egy belső viszonyítási pontot használunk; amikor egy útvonalat gyorsabbnak gondolunk, a tapasztalatainkból becsülünk; amikor egy projektet fontosnak nevezünk, egy hallgatólagos értékrendet alkalmazunk. A modellalapú döntéshozatal ezeket a rejtett modelleket láthatóvá, ellenőrizhetővé és összehasonlíthatóvá teszi. Ez a fejezet a könyv kiindulópontja: tisztázza, mit nevezünk modellnek, mire használhatjuk, és miért érdemes ugyanazt a helyzetet több modellel is megvizsgálni.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- megnevezni egy modell célját és azt a kérdést, amelyre választ ad;
- megnevezni legalább két tényezőt, amelyet egy adott modell szándékosan elhagy;
- összehasonlítani két modellnézőpontot ugyanazon döntési helyzetben, és megmagyarázni, miért vezetnek eltérő javaslatra;
- elkülöníteni egy döntés minőségét a véletlenül jó vagy rossz kimeneteltől;
- modellhasználati naplót vezetni: kérdés, modell, feltevés, eredmény, ellenőrzés, változtatási feltétel.

A fejezet öt lépésben halad. Először a modell fogalmát és a modellek szerepeit tisztázzuk, mert a könyv minden későbbi eszközénél meg kell tudnunk mondani, milyen tudásállítást tesz. Ezután egyetlen hétköznapi döntést három nézőpontból vizsgálunk meg, hogy lássuk, mit nyerünk és mit veszítünk egy-egy egyszerűsítéssel. A harmadik lépés a modellek négy alkotóelemét (feltevés, mechanizmus, adat, preferencia) választja szét. A negyedik a döntési folyamatot és a döntési naplót mutatja be. A fejezet végén a modellekbe vetett bizalom határairól és a könyv használatáról lesz szó.

1.1. Modell, valóság, egyszerűsítés és cél

Modell

A **modell** a valóság egy részének céltudatosan egyszerűsített, kifejezett leírása, amely lehetővé teszi, hogy egy kérdésről a valóság közvetlen kipróbálása nélkül gondolkodjunk, számoljunk vagy érveljünk. A modell lehet szöveges keret, ábra, táblázat, egyenletrendszer vagy számítógépes program.

A meghatározás három eleme egyformán fontos. Az **egyszerűsítés** nem hiba, hanem a modell lényege: egy térkép azért használható, mert nem mutat meg minden fát. A **cél** dönti el, mit szabad elhagyni: a turistatérkép a szintvonalakat, az úthálózati térkép a forgalmi rendet tartja meg. A **kifejezettség** pedig azt jelenti, hogy a modellt mások is megvizsgálhatják, kipróbálhatják és vitathatják, szemben a fejünkben lévő, kimondatlan elképzelésekkel.

George Box gyakran idézett megjegyzése szerint minden modell téves, de némelyik hasznos (Box 1976). A mondat második fele a fontosabb: egy modellt nem az igazsága, hanem a célhoz mért **használhatósága** alapján ítélünk meg. Egy egyszerű súlyozott pontozás lehet teljesen megfelelő egy irodabútor kiválasztásához, és lehet súlyosan félrevezető egy kórházi beruházás rangsorolásához, ha a kötelező biztonsági feltételeket nem kezeli külön (7. fejezet).

Scott Page a modellek felhasználási módjait hét igével foglalja össze: a modellek segítenek **érvelni**, **magyarázni**, **tervezni**, **kommunikálni**, **cselekedni**, **előre jelezni** és **feltárni** (Page 2018). A döntéshozatalban mind a hét szerep előfordul, de nem ugyanazzal a modellel. Ami jól magyaráz egy mechanizmust, nem feltétlenül jelez jól előre, és ami jól előre jelez, nem feltétlenül mondja meg, mit tegyünk.

1.2. Mit adhat egy modell a döntéshez?

A könyv minden eszköznél megnevezi annak szerepét és tudásállításának jellegét (1.1. ábra). Hat típust különböztetünk meg; egy konkrét eszköz több típus elemeit is hordozhatja.



1.1. ábra. A modellek hat szerepe a döntéstámogatásban. Balról jobbra haladva egyre több a formális feltevés és az ellenőrizhető számítás; minden típusnál más az, amit a használat előtt tisztázni kell.

1.1. táblázat. A modellek szerepei és a használatuk előtt tisztázandó kérdések

Típus	Mit ad?	Kötelező tisztázás	Példa a könyvben
Gondolkodási vagy reflektív keret	kérdéseket, elrendezést, megbeszélési struktúrát	a kitöltés és az önértékelés korlátai	Eisenhower-mátrix, Johari-ablak
Leíró viselkedési modell	hipotézist arról, hogyan döntenek az emberek	milyen megfigyelés támasztja alá, milyen körben érvényes	keretezési hatás, elsüllyedt költség
Magyarázó vagy dinamikai modell	mechanizmust és feltételes következményt	egyenletek, szabályok, kezdeti feltételek	készletmodell, terjedési modell

Típus	Mit ad?	Kötelező tisztázás	Példa a könyvben
Előrejelző modell	becsült jövőbeli vagy ismeretlen értéket	teszthiba, kalibráció, alkalmazási tartomány	regresszió, közös előrejelzés
Preferencia- vagy döntési modell	összehasonlítást egy megadott értékrend szerint	skálák, súlyok, átváltások, kompenzálhatóság	additív értékmodell, AHP, döntési fa
Optimalizálási vagy intézménytervezési modell	választást korlátok mellett vagy szabályrendszert	megengedett megoldások, célfüggvény, ösztönzők	portfólióválasztás, aukció

A típus megnevezése azért fontos, mert eltérő bizonyítékot kíván. Egy reflektív keret akkor jó, ha segít jobb kérdéseket feltenni; nem kell, és nem is lehet „igaznak” lennie. Egy előrejelző modellt viszont a korábban nem látott adatokon elért hibája alapján ítélünk meg (18. fejezet). Egy preferenciamodell nem a világot írja le, hanem azt, amit a döntéshozó fontosnak tart; az eredménye ezért csak annyira érvényes, amennyire a súlyok és az értékfüggvények a döntéshozó valódi átváltásait tükrözik (8. fejezet).

A népszerűség nem bizonyíték

Egy keret attól, hogy sokan ismerik és szívesen használják, még nem igazolt. A Maslow-piramis, a helyzetfüggő vezetés vagy a portfóliómátrixok tárgyalásakor ezért a könyv mindig külön megvizsgálja, mit állít a keret, és milyen kutatási eredmények szólnak mellette vagy ellene (26. fejezet, 6. fejezet). Ugyanez fordítva is igaz: egy pontos számítás eredménye sem erősebb a mögötte álló feltevéseknél.

1.3. Egy döntés több nézőpontból

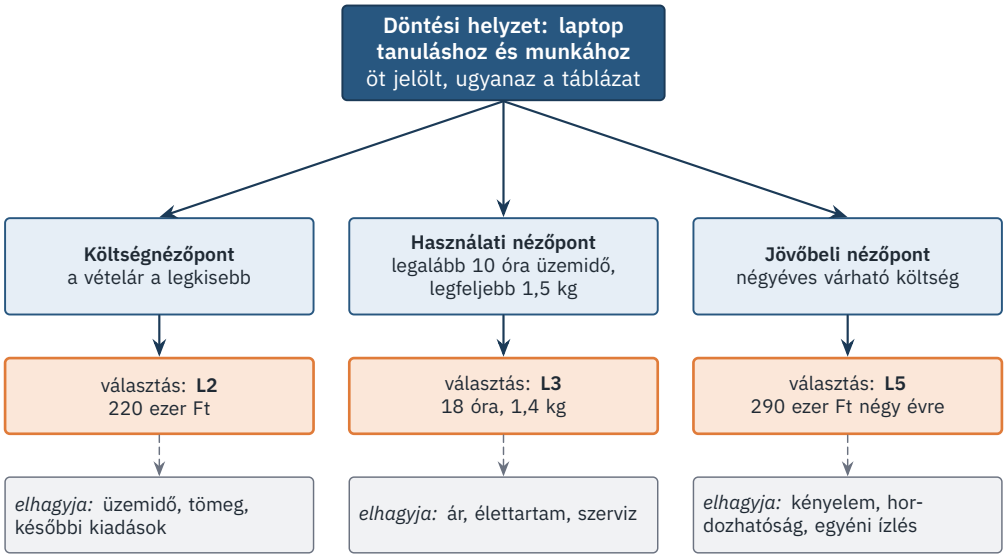
Nézzük meg az első futó esetet. A részletes adatokat a D. függelék tartalmazza; most csak annyit használunk, amennyi a nézőpontok összevetéséhez kell.

CASE01 – Laptop tanuláshoz és munkához

Egy dolgozó hallgató öt laptop közül választ (L1–L5). Ismeri a vételárat, a tömeget, az akkumulátoros üzemidőt, egy összevont teljesítménypontszámot és a gyártói szerviz hosszát. Három kérdést tehet fel: melyik a legolcsóbb, melyik bírja ki egy teljes egyetemi és munkanapot, és melyikkel jár a legkevesebb kiadással a következő négy évben. Az adatok szintetikusak, a cél a módszer bemutatása.

A három kérdéshez három modell tartozik (1.2. ábra):

1. **Költségnézőpont.** A modell egyetlen változót néz: a vételárat. Az eredmény L2 (220 ezer Ft).
2. **Használati nézőpont.** Két kötelező feltételt szab: legalább 10 óra üzemidő és legfeljebb 1,5 kg tömeg. A feltételeknek L1, L3 és L5 felel meg, közülük a leghosszabb üzemidejű L3 (18 óra, 1,4 kg).
3. **Jövőbeli nézőpont.** Négyéves várható költséget becsül: a vételárhoz hozzáadja a rövid üzemidő miatt szükséges második akkumulátor és töltő árát (40 ezer Ft, ha az üzemidő 10 óra alatti), a négy évből hiányzó szervizévek kiterjesztett garanciáját (évi 30 ezer Ft), és a gyenge teljesítmény miatti idő előtti csere várható költségét (50% esély egy 250 ezer forintos cserére, ha a teljesítménypont 70 alatti). Ezzel L5 a legkedvezőbb (290 ezer Ft), L2 a második (320 ezer Ft), L3 és L4 egyaránt 440, L1 pedig 445 ezer Ft.



1.2. ábra. Ugyanaz a döntési helyzet három modellnézőpontból. Mindhárom modell helyesen számol, de más kérdésre válaszol, és mást hagy el. A szürke dobozok mutatják az elhagyott szempontokat.

A három modell három különböző választást ad, pedig egyik sem számol rosszul. A különbség a kérdésben és az elhagyott tényezőkben van. A költségnézőpont nem látja, hogy L2 rövid üzemideje miatt pótakkumulátorra lesz szükség. A használati nézőpont nem látja, hogy L3 a legdrágább. A jövőbeli nézőpont feltevései (a csere 50%-os esélye, az évi garanciadíj) szemléltető becslések; ha a valódi esély 20%, akkor L1 négyéves költsége 370 ezer forintra csökken, és a sorrend megváltozik. A három modell együtt mégis többet mond bármelyiknél

külön: L5 az egyetlen, amely mindhárom nézőpontból a jobbak közé tartozik, és ezzel jó jelöltje egy megalapozott választásnak.

Page ezt a jelenséget a **sokmodellű gondolkodás** előnyének nevezi: ha több, egymástól eltérő feltevésekre épülő modell ugyanarra a következtetésre jut, a következtetés erősebb, ha pedig eltérnek, az eltérés megmutatja, melyik feltevést kell tisztázni (Page 2018). A 25. fejezetben ezt az állítást pontosan is megfogalmazzuk; ott látni fogjuk, hogy a modellek közötti egyetértés csak akkor erősít, ha a modellek tévedései nem ugyanabból a forrásból erednek.

Próbáld ki: nézőpontváltás a laptopválasztásban

Előbb tippeld meg, melyik gépet választanád. Ezután válts a három nézőpont között, és változtasd meg a jövőbeli nézőpont két feltevését (a csere esélyét és a garancia évi díját). Figyeld meg, melyik feltevésnél változik meg a választás, és melyik szempontot hagyja el az éppen aktív modell.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h01-nezopontok.html#F01

Átviteli példa: kapacitásbővítés egy szolgáltatásban

Egy ügyfélszolgálat vezetője azt mérlegeli, felvegyen-e két új munkatársat. A rövid távú költségmodell szerint a bővítés drága. A torlódási modell szerint viszont a várakozási idő a kihasználtság közeledtével nem lineárisan, hanem egyre meredekebben nő (19. fejezet), így néhány százalékpontnyi többletkapacitás nagyon sok várakozást takaríthat meg. A két modell nem mond ellent egymásnak: más kérdésre felel. A döntéshez mindkettőre szükség van, és a vezetőnek ki kell mondania, mennyi várakozási időt ér meg neki egy forint.

1.4. Feltevés, mechanizmus, adat és preferencia

Egy döntéstámogató modell négy, egymástól jól elválasztható összetevőből áll. A szétválasztás azért hasznos, mert vitás helyzetben megmutatja, *miben* nem értünk egyet.

- **Feltevések.** Mit tekintünk adottnak, és mit hagyunk el? A laptopesetben ilyen feltevés, hogy négy év a használati idő, és hogy a teljesítménypont előre jelzi az idő előtti cserét.
- **Mechanizmus.** Hogyan kapcsolódnak egymáshoz a változók? A négyéves költségmodellben a mechanizmus egy egyszerű összeadás; egy készletmodellben a beérkezés és a teljesítés különbsége; egy terjedési modellben a kapcsolatokon keresztüli fertőződés.
- **Adatok.** Milyen számértékeket helyettesítünk be, honnan származnak, mennyire megbízhatók? A könyvben az adatoknál mindig jelöljük, hogy mért, becsült, szakértői ítéleten alapuló vagy szintetikus értékről van-e szó (D. függelék).

- **Preferenciák.** Mit tartunk jobbnak, és mennyivel? A preferencia nem az adatból következik, hanem a döntéshozó értékrendjéből. Két ember ugyanazokból az adatokból jogosan juthat eltérő választásra, ha másképp értékeli a kisebb tömeget a magasabb árhoz képest.

A legtöbb döntési vita valójában ezek közül egyetlen összetevőről szól, csak a résztvevők ezt nem mondják ki. A pénzügyi és a műszaki vezető ugyanazt a beruházást vitatja, de az egyik az adatok (a becsült megtakarítás) megbízhatóságában kételkedik, a másik a preferenciákban (mennyit ér a kisebb kiesés) gondolkodik másképp. Ha a vitát összetevőnként folytatják, gyorsabban kiderül, hol van szükség új adatra, és hol egy kimondott értékválasztásra. A 26. fejezet ezt a szétválasztást a csoportos megbeszélés eszközeként is bemutatja.

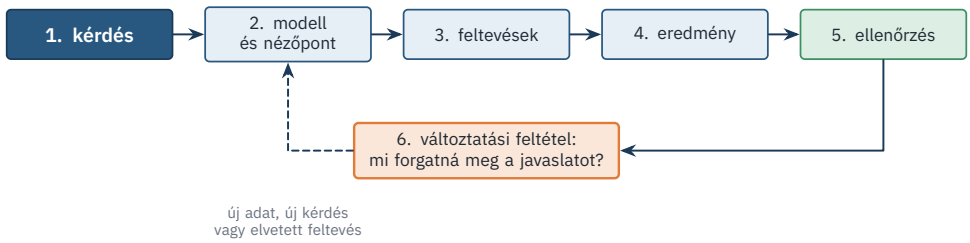
1.5. A döntési folyamat és a döntési napló

A könyv minden fejezete egy visszatérő folyamat valamelyik lépéséhez kapcsolódik: helyzet, döntési kérdés, célok és érintettek, alternatívák, következménymodell, preferenciák, összehasonlítás, bizonytalanság és érzékenység, döntési javaslat, követés és tanulás. A fejezetek elején álló kis térkép mutatja, hol tartunk. A lépések nem szigorúan egymás utániak; egy érzékenységvizsgálat után például gyakran vissza kell térni a kritériumokhoz vagy az alternatívákhoz. A folyamat hasonló a döntéselemzés klasszikus leírásaihoz (Raiffa 1968; Clemen és Reilly 2014) és a gyakorlati útmutatók PrOACT-szerkezetéhez (problem, objectives, alternatives, consequences, trade-offs) (Hammond és mtsai. 1999).

> **Döntésminőség és kimenetel**
>
> A **döntés minősége** azon múlik, hogy a döntés pillanatában rendelkezésre álló információt, alternatívákat és értékeket mennyire jól használtuk fel. A **kimenetel** az, ami utána ténylegesen történt. Bizonytalan helyzetben egy jó döntés is vezethet rossz kimenetelhez, és egy rossz döntés is szerencsésen végződhet (Howard 1988; Spetzler és mtsai. 2016).

A két fogalom összekeverése a döntéshozatal egyik leggyakoribb hibája, és a 3. fejezetben látni fogjuk, milyen torzításokhoz vezet. Aki a döntéseit kizárólag a kimenetelük alapján ítéli meg, az a szerencsét képességnek, a balszerencsét hibának tulajdonítja, és nem tanul a valódi hibáiból. A védekezés legegyszerűbb eszköze a **döntési napló**: a döntés pillanatában leírjuk, mit tudunk, mit feltételezünk, mit várunk, és mi változtatná meg a véleményünket (1.3. ábra).

A napló hat rovata egy-egy kérdés. *Mi a kérdés?* (Pontosan, a döntéshozóval és az időhorizonttal együtt.) *Milyen modellt használok, és milyen nézőpontból? Mit feltételezek? Mi az eredmény? Hogyan ellenőriztem?* (Kézi számítással, másik eszközzel, szélső esettel.) *Mi forgatná meg a javaslatot?* Az utolsó rovat a



1.3. ábra. A modellhasználati napló hat eleme. A változtatási feltétel előre rögzíti, milyen új információ esetén kell a javaslatot újragondolni.

legértékesebb: ha előre leírjuk, hogy „ha a csere esélye 30% alá esik, L1 is versenyképes”, akkor később nem kell utólagos magyarázatot gyártanunk. A 28. fejezet integrált projektje is ezt a naplót bővíti teljes döntési feljegyzéssé.

1.6. Mennyire bízhatunk a modellekben?

1.6.1. A modellekbe vetett hit határai

Mennyire hiszel egy bevált táblázatnak?

A keresleti előrejelző táblázat három éve pontosan működik, ezért idén is erre épül a költségvetés. Senki sem kérdezi meg, milyen feltevés miatt volt eddig pontos.
A lényeg: Egy modell megbízhatósága addig tart, ameddig a feltevései érvényesek.
Kérdés: Melyik feltevés megváltozása tenné érvénytelenné a saját kedvenc táblázatodat?
Szemléltető, kitalált helyzet · D17 · Próbáld ki: h01-nezopontok

A *The Decision Book* egyik záró esszéje arra figyelmeztet, hogy a modellek könnyen önálló tekintélyre tesznek szert: amit egy ábra vagy egy szám mutat, azt hajlamosak vagyunk a valóságnak tekinteni (Krogerus és Tschäppeler 2011). A gondolat a döntéstámogatásban konkrét formát ölt. Egy modell három okból veszítheti el az érvényességét: megváltozik a környezet (a kereslet szerkezete, a technológia, a szabályozás), megváltozik a kérdés (például a költségminimalizálás helyett a szolgáltatás biztonsága lesz a fő cél), vagy kiderül, hogy egy eddig elhanyagolt tényező mégis számít.

A védekezés nem a modellek elvetése, hanem a feltevések kifejezett nyilvántartása. Minden fontos feltevés mellé érdemes odaírni, milyen megfigyelés jelezné, hogy már nem érvényes. A 17. fejezetben ezt adaptív döntési tervként, jelzőszámokkal és felülvizsgálati küszöbökkel fogalmazzuk meg.

Próbáld ki: mi marad, ha egy feltevés elesik?

Egy egyszerű keresleti modell három feltevésre épül. Kapcsold ki egyenként a feltevéseket, és figyeld meg, melyik következtetés marad érvényben, és melyik esik el.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h01-nezopontok.html#D17

1.6.2. Mennyi tudásba érdemes befektetni?

Melyik módszert tanulnád meg először?

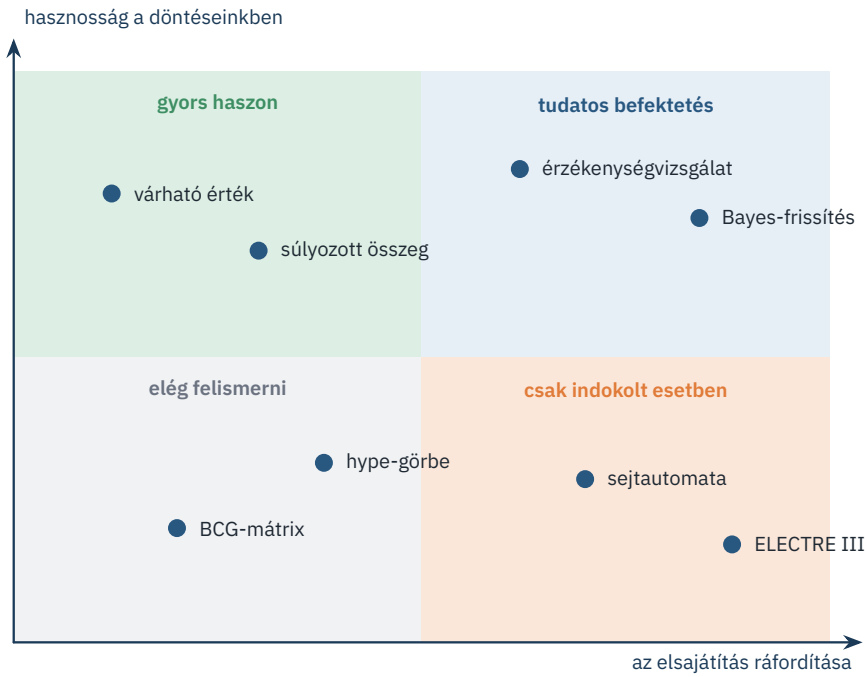
Egy kolléga három új módszert szeretne elsajátítani a félév során. Az egyiket egy délután alatt meg lehet tanulni, és havonta hasznos. A másik hónapokig tart, és ritkán van rá szükség.
A lényeg: A tanulásra fordított idő is döntés: a várható hasznot és a ráfordítást együtt kell mérlegelni.
Kérdés: Melyik módszert tennéd a saját munkádban a „gyors haszon” mezőbe?
Szemléltető, kitalált helyzet · D29 · Próbáld ki: h01-nezopontok

A könyv sok modellt mutat be, de nem mindegyiket kell mindenkinek mélyen ismernie. A *The Decision Book* egy szemléltető mátrixot javasol arra, hogy a tudás hasznosságát és az elsajátítás nehézségét együtt vizsgáljuk (Krogerus és Tschäppeler 2011). Az 1.4. ábra ezt a gondolatot a könyv módszereire alkalmazza. A bal felső mező a gyors haszon: a várható érték vagy a súlyozott összeg kevés idő alatt megtanulható, és szinte minden döntésnél jól jön. A jobb felső mező tudatos befektetés: az érzékenységvizsgálat vagy a Bayes-frissítés több munkát kíván, de sokféle helyzetben megtérül. Az alsó sorba kerülő módszereket gyakran elég felismerni, és csak akkor kell mélyebben megtanulni, ha a feladat valóban megkívánja.

A térkép nem kompetenciaháló, és nem mér semmit: egy beszélgetés kiindulópontja arról, mire érdemes időt fordítani. A pozíciók személyesek. Egy logisztikai elemzőnek a Monte Carlo-szimuláció a gyors haszon mezőbe kerülhet, egy humánerőforrás-szakembernek a tudatos befektetésbe vagy éppen az alsó sorba.

Próbáld ki: saját tudástérkép

Helyezd el a felsorolt módszereket a két tengelyen a saját munkád alapján. Az alkalmazás megmutatja, melyik mezőbe kerültek, és javaslatot tesz a következő lépésre.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h01-nezopontok.html#D29



Szemléltető elhelyezés: a pozíció a saját döntési helyzetünktől és előismeretünktől függ, nem a módszer állandó tulajdonsága.

1.4. ábra. Szemléltető tudástérkép a könyv néhány módszeréről. A pozíció az olvasó döntési helyzetétől és előismereteitől függ; a térkép a saját tanulási tervünk kiindulópontja, nem általános rangsor.

1.6.3. Ugyanaz a probléma, három reprezentáció

Táblázat, hálózat vagy adatsor?

A projektek rendszeresen késnek. A feladatlistában minden csapat túlterheltnek látszik. Ha felrajzolod, ki kitől vár eredményt, egyetlen csapat válik szűk keresztmetszetté. A heti adatsorban pedig egy visszatérő minta is felsejlik.
A lényeg: Minden reprezentáció mást tesz láthatóvá, és mást rejt el.
Kérdés: Melyik nézetben keresnéd először a késések okát?
Szemléltető, kitalált helyzet · D52 · Próbáld ki: h01-nezopontok

A *The Decision Book* záró esszéje a hálózatos gondolkodás és az adatvezérelt megközelítések felé mutat (Krogerus és Tschäppeler 2011). A gondolat a könyv szerkezetében is megjelenik: ugyanazt a helyzetet leírhatjuk táblázattal (alternatívák és kritériumok, 7. fejezet), hálózattal (szereplők és kapcsolataik, 22. fejezet) vagy idősorral (állapotok és változások, 18. fejezet). A táblázat a szempontok összevetésére jó, de elrejti a függőségeket. A hálózat a kapcsolatokat és a szűk keresztmetszeteket mutatja meg, de nem mondja meg, mennyit ér egy-egy javulás. Az idősor a változásokat és a mintázatokat teszi láthatóvá, de a mechanizmusról önmagában nem sokat árul el.

Próbáld ki: nézetváltás

Ugyanazt a késési problémát válaszd táblázatos, hálózati vagy idősoros nézetben. Mindegyik nézet alatt megjelenik, mit mutat meg és mit hagy el.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h01-nezopontok.html#D52

1.7. A könyv és a digitális műhelyek használata

A könyv három, együtt használható olvasási réteget kínál. A **megértés** rétege minden olvasónak szól: a rövid nyitókártya, a közérthető magyarázat, a fogalmi ábra és a böngészőben futó kipróbálás együtt egy 5–8 perces tanulási egységet ad. Az **alkalmazás** rétege kidolgozott számításokat, Excel-munkafüzeteket és döntési feljegyzéseket tartalmaz. Az **elemzés** rétege képleteket, levezetéseket, Python-notebookokat és modellösszehasonlítást kínál; ide tartoznak a fejezetekbe bemásolt rövid **Python-demók** is, amelyek a szöveg számait újra előállítják, és átírva saját kísérletre is használhatók (a nyelv alapjait a B. függelék foglalja össze). A három réteg ugyanazt a döntési kérdést követi, így a képletek kihagyása után is követhető a gondolatmenet.

Minden önálló téma ugyanazt az ívet járja be. A **nyitókártya** egy apró helyzettel, egyetlen felismeréssel és egy személyes kérdéssel indít. A **koncepció** és az **ábra** a modell lényegét és a legfontosabb feltevését mutatja meg. A **„Próbáld**

ki” doboz a kártya kérdését egy interaktív demóban teszi vizsgálhatóvá: előbb tippelsz, aztán változtatsz, és megfigyeled a következményt. A **formalizálás** a pontos jelöléseket és a kis, kézzel követhető számítást adja. Végül a **Döntési műhely** kötet az Excel-munkafüzetekhez, a Colab-notebookokhoz és a mintapromptokhoz vezet. A kártyák a kártyalapozóban egymás után is lapozhatók.

Az E. függelék modelltára a *The Decision Book* modelljeit és a könyv kiegészítő módszercsaládjait kereshető formában gyűjti össze. Gyakorló szakemberként onnan is érdemes indulni: minden tételnél megtalálod a kártya címét, azt a szakaszt, ahol részletesen tárgyaljuk, és a hozzá tartozó interaktív nézetet; a modell szerepét és bizonyítéki státuszát az adott szakasz tárgyalja.

A precíz képlet hamis biztonságot adhat

Egy pontatlan feltevés pontos képletbe helyettesítve pontatlan eredményt ad, csak éppen sok tizedesjeggyel. A laptopesetben a négyéves költség egy ezer forintra kerekített szám, de a mögötte álló csereesély egy durva becslés. Ezért a könyvben az eredmények mellett mindig megadjuk, melyik feltevés megváltozása forgatná meg a következtetést. A tizedesjegyek száma soha ne sugalljon nagyobb biztonságot, mint amennyit a leggyengébb bemenet indokol.

Összefoglalás

- A modell a valóság céltudatosan egyszerűsített, kifejezett leírása; az egyszerűsítés a lényege, a célhoz mért használhatóság a mércéje.
- A modellek hat szerepet tölthetnek be (reflektív keret, leíró, magyarázó-dinamikai, előrejelző, preferencia- és döntési, optimalizálási-intézménytervezési); mindegyik más bizonyítékot kíván.
- Ugyanaz a döntési helyzet több modellnézőpontból eltérő javaslatot adhat, mert a modellek más kérdésre felelnek, és mást hagynak el; az eltérés a tisztázandó feltevésekre mutat.
- A döntéstámogató modell négy összetevője a feltevés, a mechanizmus, az adat és a preferencia; a viták többsége ezek közül egyetlen összetevőről szól.
- A döntés minőségét el kell választani a kimeneteltől; a döntési napló előre rögzíti a kérdést, a modellt, a feltevéseket, az eredményt, az ellenőrzést és a változtatási feltételt.
- A modellekbe vetett bizalom addig tart, ameddig a feltevéseik érvényesek; a feltevéseket ezért jelzőszámokkal érdemes követni.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség egy reflektív keret és egy előrejelző modell bizonyítékigénye között?
2. Miért nem mondható, hogy a laptopeset három nézőpontja közül kettő „rosszul számol”?
3. A jövőbeli nézőpontban a csere esélye 50% helyett 20%. Számold ki L1 négyéves költségét, és add meg az új sorrend első két helyét!

4. Egy kolléga azt mondja: „Tavaly ugyanezzel a módszerrel döntöttünk, és bejött, tehát a módszer jó.” Mit vetnél ellen?
5. Egy beruházási vitában az egyik fél szerint a megtakarítás túlbecsült, a másik szerint a kisebb kiesés nem ér ennyit. A modell melyik összetevőjéről szól az egyik, és melyikről a másik ellenvetés?

Megoldás.

1. A reflektív keret attól jó, hogy segít jobb kérdéseket feltenni és a megbeszélést szervezni; nem tesz ellenőrizhető állítást a világról, ezért „igazsága” nem vizsgálható. Az előrejelző modell számszerű állítást tesz egy ismeretlen értékről, ezért a korábban nem látott adatokon mért hibájával, kalibrációjával és alkalmazási tartományával kell igazolni.
2. Mert mindhárom modell helyesen alkalmazza a saját szabályát; a különbség a feltett kérdésben (vételár, egész napos használat, négyéves költség) és az elhagyott tényezőkben van.
3. L1: $290 + 0 + 30 + 0{,}2 \cdot 250 = 370$ ezer Ft. A sorrend eleje: L5 (290), L2 (320), majd L1 (370). L5 és L2 helye nem változik, mert az ő teljesítménypontjuk 70 vagy afölötti, így a csereesély nem érinti őket.
4. Egyetlen kedvező kimenetel nem bizonyítja a döntés vagy a módszer minőségét: lehetett szerencse is. Meg kell vizsgálni, hogy a döntés idején a módszer feltevései érvényesek voltak-e, és hogy ma is azok-e. Hasznos lenne a korábbi döntési napló is, ha volt.
5. Az első az adatokról szól (a becsült megtakarítás megbízhatósága), a második a preferenciákról (a kiesés csökkentésének értéke a költséghez képest).

Továbbolvasás

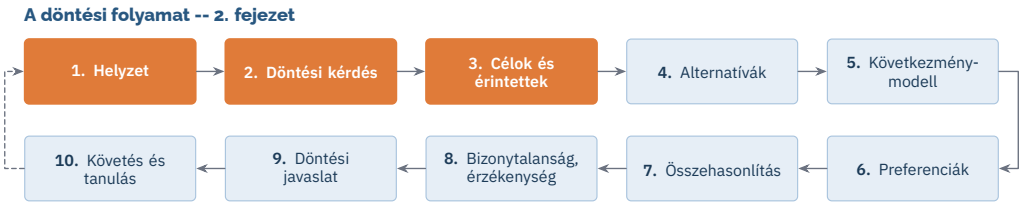
- Page, S. E. (2018): *The Model Thinker.* Basic Books – a modellek hét felhasználási módja és a sokmodellű gondolkodás (Page 2018).
- Clemen, R. T., Reilly, T. (2014): *Making Hard Decisions with DecisionTools*, 1. fejezet – a döntéselemzés folyamata (Clemen és Reilly 2014).
- Howard, R. A. (1988): Decision analysis: practice and promise – a döntésminőség és a kimenetel különbsége (Howard 1988).
- Hammond, J. S., Keeney, R. L., Raiffa, H. (1999): *Smart Choices* – a PrOACT-szerkezet gyakorlati bemutatása (Hammond és mtsai. 1999).

Gyakorlat

A Döntési műhely 1. műhelyében a nézőpontváltó alkalmazással (H01) a laptopeset három modelljét és a feltevések változtatását próbálhatod ki, és elkészítheted az első modellhasználati naplódat egy saját döntésedről. Ehhez a fejezethez nem tartozik munkafüzet vagy notebook: a cél a fogalmi alapok rögzítése.

2.

A döntési probléma megfogalmazása



Melyik kérdésre keresünk választ?

Tamás, egy kis alapítvány gazdasági vezetője, hetek óta autókat hasonlít össze. A megbeszélésen egy kolléga csendesen megkérdezi: valójában mire kell nekünk az autó? Kiderül, hogy nagy hatótávra a hétnek csak egyetlen napján van szükség, a többi út rövid városi ügyintézés. A kérdés újrafogalmazása egyszerre több lehetőséget nyit meg.

A lényeg: A döntési kérdés megfogalmazása már azt is meghatározza, milyen lehetőségeket veszünk észre.

Kérdés: Mit változtatnál a kérdésen, ha autó helyett mobilitást kellene biztosítanod?

Szemléltető, kitalált helyzet · F02 · Próbáld ki: h02-helyzetlap

A legtöbb rossz döntés nem a rossz számítással kezdődik, hanem a rosszul feltett kérdéssel. Ha a kérdés az, hogy „melyik autót vegyük meg”, akkor a bérlet, a megosztott használat vagy az utazási igény csökkentése szóba sem kerül. Ha nem tisztázzuk, ki dönt és milyen időtávra, akkor a pénzügy egy évre, a szervizvezető öt évre gondolkodik, és mindketten igazuk van a saját kérdésükre. Ez a fejezet azt mutatja meg, hogyan lehet egy homályos helyzetből pontos, operacionalizált döntési kérdést, célhierarchiát és egyoldalas döntési helyzetlapot készíteni.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- elkülöníteni a célt az eszköztől, és célhierarchiát (célfát) felépíteni;
- azonosítani a döntéshozót, a döntési jogosultságot és az érintetteket, és megtervezni a bevonásukat;
- megadni a rendszerhatárt, az időhorizontot és a viszonyítási alapot, a jelenlegi állapotot is beleértve;
- szétválasztani az alternatívákat, a következményeket, a kritériumokat és a kötelező korlátokat;
- mérlegelni a döntés időzítését a rendelkezésre álló tudás és a beavatkozási szabadság alapján;
- egyoldalas döntési helyzetlapot készíteni, amelyből minden későbbi számítás bemenete visszavezethető.

A fejezet a második futó esettel, a szervezeti mobilitási megoldás kiválasztásával dolgozik, amely a könyv közös numerikus példája lesz. Előbb azt nézzük meg, mitől lesz egy kérdés jól feltett. Ezután a döntéshozót és az érintetteket, majd a célokat és a célfát tárgyaljuk. A negyedik szakasz a rendszerhatárt, az időhorizontot és a viszonyítási alapot, az ötödik a döntés időzítését mutatja be. A fejezet a döntési helyzetlappal és egy visszatekintő módszerrel zárul.

2.1. Mitől jó egy döntési kérdés?

Ralph Keeney *értékfókuszú gondolkodásnak* (*value-focused thinking*) nevezi azt a megközelítést, amely a kéznél lévő lehetőségek helyett azzal kezd, *mit akarunk elérni* (Keeney 1992). A lehetőségekből kiinduló, *alternatívafókuszú* gondolkodás könnyen beszűkül: a jelöltek listája eldönti a kérdést, mielőtt feltettük volna. Az értékfókuszú megközelítés először a célokat tisztázza, és csak utána keres hozzájuk lehetőségeket. A gyakorlatban mindkét irányra szükség van, de a kérdés megfogalmazásakor a célokból érdemes kiindulni.

Egy jó döntési kérdés öt elemet tartalmaz:

1. **ki dönt** (és kinek a nevében),
2. **mit választ** (milyen típusú lehetőségek közül),
3. **mire való tekintettel** (milyen célok szerint),
4. **milyen feltételek mellett** (kötelező korlátok),
5. **milyen időtávra** (időhorizont és döntési határidő).

A „melyik a legjobb autó?” kérdésből mind az öt elem hiányzik. A „melyik mobilitási megoldást vezesse be a szervizosztály a következő öt évre, ha a jármű egy feltöltéssel legalább 250 km-t meg kell tegyen, és az ötéves teljes költség nem haladhatja meg a keretet?” kérdés már operacionalizált: megmondja, mit kell mérni, és mi számít elfogadhatónak.

CASE02 – Szervezeti mobilitási megoldás

Egy közepes méretű szolgáltató szervezet szervizmunkatársai naponta ügyfeleket keresnek fel a régióban. A jelenlegi jármű bérleti szerződése hat hónap múlva lejár. Az éves futás körülbelül 25 ezer km, a szokásos napi út 120–200 km, de hetente egyszer egy távolabbi telephelyre is el kell jutni, oda-vissza mintegy 240 km-t megtéve töltési lehetőség nélkül. Ebből adódik a 250 km-es minimális hatótáv. A döntés öt évre szól, a gazdasági igazgató hagyja jóvá a szervizvezető javaslatára. Az adatok szintetikusak, a jelöltek betűjelet viselnek: a cél a módszerek bemutatása.

Az eset jól mutatja, hogy a kérdés pontosítása már maga is elemzés. Amikor kiderül, hogy a nagy hatótávra csak heti egy napon van szükség, felmerül egy olyan megoldás is, amelyben a mindennapi munkát egy kisebb, olcsóbb jármű végzi, a heti egy hosszú utat pedig bérelt autóval vagy közösségi közlekedéssel oldják meg. A kérdés így „melyik autó?” helyett „milyen mobilitási megoldás?” lesz. A 4. fejezetben ebből a felismerésből állítjuk elő az öt jelöltet (A–E).

2.2. Döntéshozó, jogosultság és érintettek

2.2.1. Döntési helyzetlap, célfa és érintetti térkép

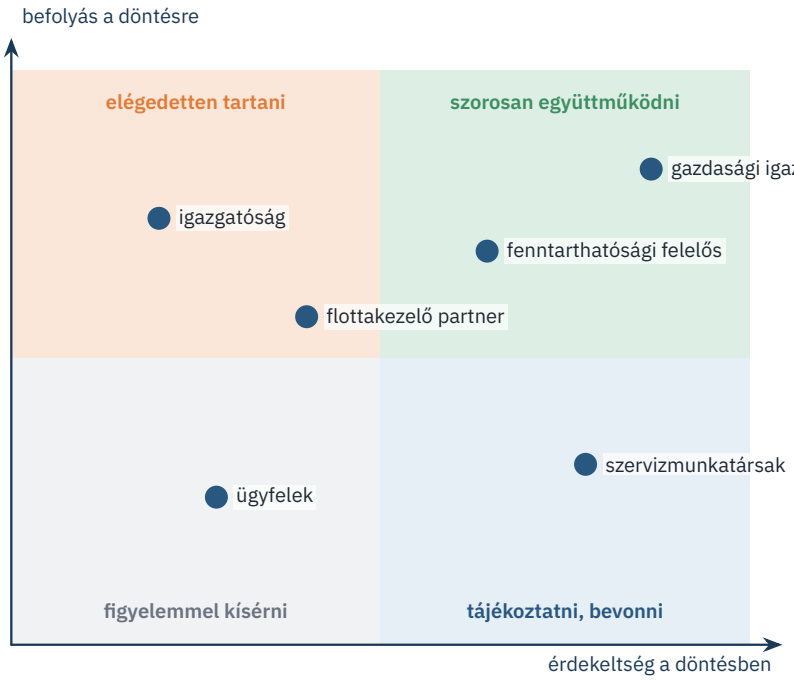
Kinek a szempontjából jó?

A szervizvezető a legmegbízhatóbb járművet szeretné, a pénzügy a legolcsóbbat, a fenntarthatósági felelős a legtisztábbat. Mindhárman a „legjobb” megoldásról beszélnek, és egyikük sem téved.
A lényeg: Amíg nem tisztázzuk, ki dönt, kinek a céljai számítanak és milyen feltételekkel, addig a „legjobb” szó többértelmű.
Kérdés: Kit vonnál be elsőként, és miről kérdeznéd?
Szemléltető, kitalált helyzet · K01 · Próbáld ki: h02-helyzetlap

Minden döntésnek van **döntéshozója**, aki a döntésért felel, és van **döntési jogosultsága**, amely meghatározza, mit dönthet el egyedül, és mihez kell jóváhagyás. A kettő nem mindig ugyanaz a személy: a CASE02-ben a szervizvezető javasol, a gazdasági igazgató hagy jóvá. Az elemzést annak kell készíteni, aki dönt, de úgy, hogy a jóváhagyó is követni tudja.

Az **érintett** (*stakeholder*) mindenki, akire a döntés hatással van, vagy aki a döntésre hatással lehet (Freeman 1984). Az érintettek két okból fontosak. Egyrészt a céljaik a döntés kritériumai közé kerülhetnek: a szervizmunkatársak kényelme vagy a fenntarthatósági vállalások. Másrészt a bevonásuk a megvalósítás feltétele: egy olyan járművet, amelyet a használói elutasítanak, nehéz sikeresen bevezetni. Az **érintetti térkép** a befolyás és az érdekeltség két

tengelyén helyezi el a szereplőket, és ebből javasol bevonási módot (2.1. ábra) (Eden és Ackermann 1998).



Szemléltető elhelyezés a CASE02 esetre. Az ábra a bevonás módját segít megtervezni; nem mondja meg, kinek a véleménye „számít többet”.

2.1. ábra. Érintetti térkép a CASE02 esetre. A két tengely a bevonás módjának megtervezését segíti: kivel kell szorosan együttműködni, kit kell tájékoztatni, és kinek az elégedettségére kell figyelni.

> **A térkép nem rangsorolja a véleményeket**
>
> Az érintetti térkép a bevonás *módját* segít megtervezni, nem azt, kinek a szempontja „ér többet”. A szervizmunkatársak befolyása alacsony, érdekeltségük nagy: őket nem szabad csak tájékoztatni, mert ők ismerik a napi használat valódi követelményeit. A hatótáv minimumát is az ő tapasztalatuk alapján lehet megbízhatóan rögzíteni.

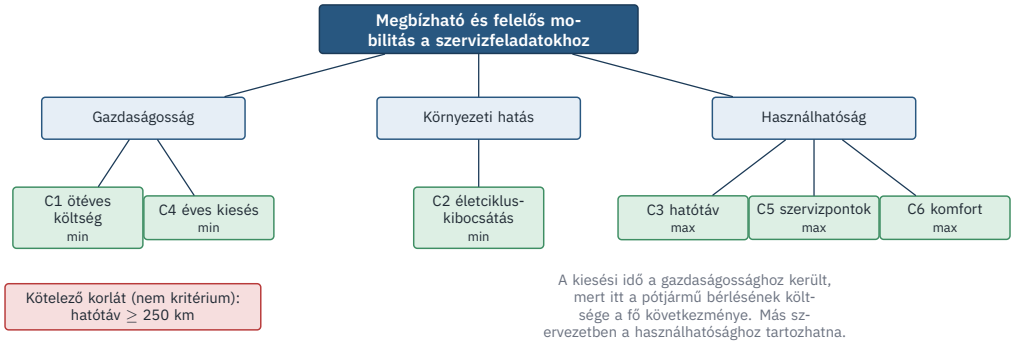
2.2.2. Célok és célhierarchia

A célok között kétféle viszony van. Az **alapcél** (*fundamental objective*) az, amiért a döntést meghozzuk; azért fontos, mert önmagában fontos. Az **eszközcél** (*means objective*) azért fontos, mert egy alapcél eléréséhez hozzájárul (Keeney 1992).

A „sok szervizpont legyen elérhető” eszközcél: azért fontos, mert csökkenti a kiesést és a kockázatot. A különbségtétel azért lényeges, mert ha egy eszközcélt és az általa szolgált alapcélt is kritériumként értékeljük, ugyanazt a hatást kétszer számoljuk el (7.4. szakasz).

A **célfa** a fő célt egyre konkrétabb részcélokra bontja, amíg mérhető kritériumokhoz nem érünk (2.2. ábra). Három próbát érdemes elvégezni rajta (Keeney 1992; Belton és Stewart 2002):

- **Teljesség:** minden fontos szempont szerepel? Hasznos kérdés: „Ha két jelölt minden felsorolt szempontban azonos, közömbös lennék köztük?”
- **Átfedésmentesség:** két kritérium nem méri ugyanazt a hatást?
- **Mérhetőség:** minden levélhez rendelhető skála, amelyen a jelöltek összevethetők?

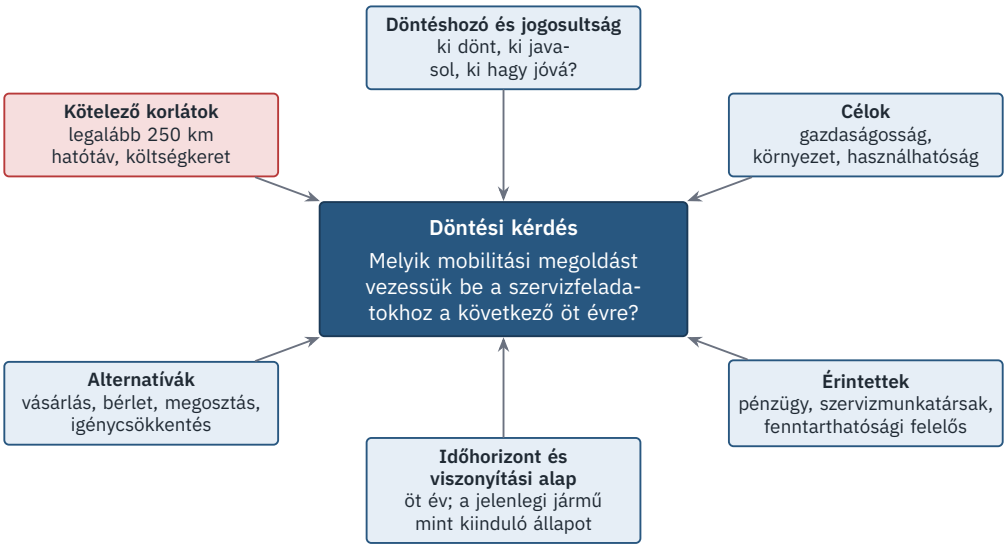


2.2. ábra. A CASE02 célfája. A fő célt három részcél, a részcélokat hat mérhető kritérium bontja ki; a hatótáv minimuma kötelező korlátként, a kritériumoktól külön szerepel.

A célfa nem egyértelmű. A kiesési idő a CASE02-ben a gazdaságossághoz került, mert a szervezetben a fő következménye a pótjármű bérlésének költsége. Egy mentőszolgálatnál ugyanez a szempont a szolgáltatás biztonságához tartozna, és sokkal nagyobb súlyt kapna. A célfa a döntéshozó értékrendjének szerkezete, és ez a szerkezet a súlyozás módját is meghatározza (9. fejezet).

2.2.3. A döntési helyzetlap

A **döntési helyzetlap** egyetlen oldalon foglalja össze a döntési problémát (2.3. ábra). Közepén a pontosan megfogalmazott kérdés áll, körülötte a döntéshozó és a jogosultság, a célok, az érintettek, az alternatívák, a kötelező korlátok, az időhorizont és a viszonyítási alap. A lap célja kettős: a résztvevők az elemzés elején megállapodnak a keretekben, és a későbbi számításokban minden bemenet visszavezethető valamelyik elemére.



A helyzetlap minden eleme a későbbi számítás egy bemenetévé válik: a célokból kritériumok, a korlátokból előszűrés, az érintettekből súlyprofilok lesznek.

2.3. ábra. A döntési helyzetlap szerkezete a CASE02 esetre. A lap minden eleme egy későbbi számítás bemenetévé válik.

> **Próbáld ki: döntési helyzetlap**
>
> Előbb becsüld meg, hány információhiány marad egy első vázlatban. Ezután töltsd ki a helyzetlapot a CASE02 adataival vagy egy saját döntéseddel. Az alkalmazás jelzi a hiányzó elemeket, a célfa és az érintetti térkép nézetben pedig a kritériumok és a bevonás módja is megjelenik.
> Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h02-helyzetlap.html#K01

2.3. Rendszerhatár, időhorizont és viszonyítási alap

A **rendszerhatár** azt rögzíti, mit tekintünk a döntés részének. A CASE02-ben a jármű és a töltési infrastruktúra a rendszer része, a munkatársak ügyfélbeosztása viszont nem; ezt adottságnak tekintjük. Ha a beosztást is a döntés részévé tennénk, a heti egy hosszú út esetleg megszüntethető lenne, és a 250 km-es korlát is enyhülhetne. A rendszerhatár tehát nem technikai részlet: eldönti, milyen alternatívák jöhetnek szóba. Azt is eldönti, kiknek a következményei számítanak. Ha egy döntés olyanokat is érint, akik nem vesznek részt benne (a szomszéd csapatot, egy közös erőforrás többi használóját, a környéken élőket), **externáliáról** beszélünk; a határon kívül hagyott következmények később gyakran a döntéshozóhoz is visszatérnek (24.1. szakasz).

Az **időhorizont** meghatározza, mely következmények számítanak. Öt év alatt a beszerzési ár, az energia, a karbantartás és a maradványérték együtt adja a költséget; egy év alatt a vételár dominálna. A horizontnak illeszkednie kell a döntés visszafordíthatóságához: egy ötéves bérleti szerződés esetén a horizont legalább öt év.

A **viszonyítási alap** az az állapot, amelyhez az alternatívákat mérjük. Leggyakrabban a **jelenlegi állapot** (*status quo*): mi történik, ha nem változtatunk? A jelenlegi állapotot mindig önálló alternatívaként kell kezelni, akkor is, ha végül kiesik. A CASE02-ben a régi jármű bérletének meghosszabbítása is felmerül; az előszűréskor azonban kiderül, hogy a jármű az öt év alatt túllépné a szerződésben megengedett futásteljesítményt, így kötelező korlátba ütközik (7. fejezet). Ha a jelenlegi állapotot elfelejtjük vizsgálni, a változtatás mellett döntünk anélkül, hogy tudnánk, megéri-e.

2.3.1. Alternatíva, következmény, kritérium és korlát

A döntési problémának négy elemét kell egymástól gondosan elválasztani:

- **Alternatíva:** az, amit választhatunk (például „konnektoros hibrid tartós bérlettel”).
- **Következmény:** az, ami az alternatíva választásakor történik (öt év alatt 12 millió forint költség, évi 5 nap kiesés).
- **Kritérium:** az a szempont, amely szerint a következményeket értékeljük (ötéves költség, kisebb a jobb).
- **Kötelező korlát:** olyan feltétel, amelyet minden elfogadható alternatívának teljesítenie kell (legalább 250 km hatótáv); a megsértését semmilyen más előny nem kompenzálja.

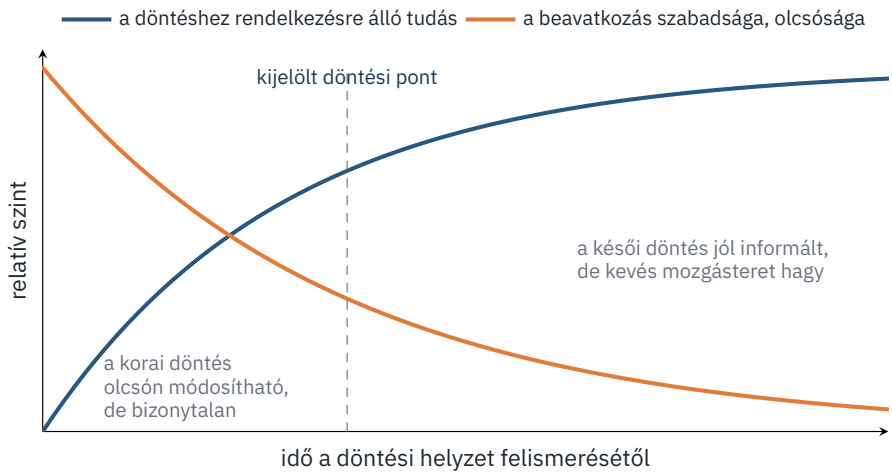
A korlát és a kritérium összekeverése az egyik legsúlyosabb modellezési hiba. Ha a hatótávot csak egy kritériumként pontozzuk, egy nagyon olcsó, de a heti utat meg nem tevő jármű a magas költségpontszáma miatt az első helyre kerülhet. A 7. fejezetben ezt a hibát részletesen megvizsgáljuk.

2.4. A döntés időzítése

Most döntsünk, vagy várjunk még?

A csapat szeretne még egy hónapot az ajánlatok összevetésére. Közben a bérleti szerződés lejárata közeledik, és a kedvezőbb ajánlatok határideje is lejár.
A lényeg: A várakozással nő a tudásunk, de csökken a beavatkozási szabadságunk.
Kérdés: Mi az a legkésőbbi időpont, amikor még minden lényeges lehetőség nyitva áll?
Szemléltető, kitalált helyzet · D10 · Próbáld ki: h02-helyzetlap

A *The Decision Book* egyik egyszerű keretrendszere arra kérdez rá, mikor érdemes dönteni (Krogerus és Tschäppeler 2011). A gondolat a projektmenedzsmentben és a döntéselemzésben is ismert: a helyzet felismerése után a döntéshez rendelkezésre álló tudás fokozatosan nő, a beavatkozás szabadsága és olcsósága viszont csökken (2.4. ábra). A korai döntés olcsón módosítható, de bizonytalan, a késői döntés jól informált, de kevés mozgásteret hagy.



2.4. ábra. A tudás és a beavatkozási szabadság időbeli alakulása, szemléltető görbékkel. A döntési pontot úgy érdemes kijelölni, hogy a fontos lehetőségek még nyitva álljanak, és a legfontosabb információhiányok közben bezáruljanak.

Az időzítés három kérdést vet fel. *Visszafordítható-e a döntés, és milyen áron?* Egy próbabérlet olcsón visszafordítható, egy ötéves szerződés nem. *Mi a legkésőbbi időpont, amikor még minden lényeges lehetőség nyitva áll?* A CASE02-ben ez a bérleti szerződés lejárata előtti harmadik hónap, mert az új jármű beszerzése ennyi időt igényel. *Milyen információ érkezhet addig, és változtatna-e a döntésen?* Ha nem változtatna, a várakozásnak nincs értéke. A 15. fejezetben ezt a kérdést

pontosan is meg tudjuk válaszolni: az információ értéke abból ered, hogy a birtokában jobban választhatunk.

Próbáld ki: döntési időpont

Mozgasd a döntési pontot az idővonalon, és figyeld meg, hogyan változik a rendelkezésre álló tudás és a még nyitott lehetőségek köre. Az alkalmazás jelzi, ha a döntési pont egy fontos határidő után kerül.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h02-helyzetlap.html#D10

2.5. Visszatekintés: a döntés története

Mit tanultál a legutóbbi hasonló döntésből?

Öt évvel ezelőtt is ti választottátok a jelenlegi járművet. Akkor a vételár volt a legfontosabb szempont, a karbantartási költségek azóta meglepetést okoztak. A mostani megbeszélésen senki sem hozza szóba.
A lényeg: Egy korábbi döntés története feltárhatja azokat a feltevéseket, amelyeket most is észrevétlenül átveszünk.
Kérdés: Melyik korábbi feltevésedről derült ki, hogy nem volt helytálló?
Szemléltető, kitalált helyzet · D24 · Próbáld ki: h02-helyzetlap

A *The Decision Book* egy projekt „kulisszatitkainak” utólagos megírását javasolja: mi volt a cél, mi történt, és mit tanultunk (Krogerus és Tschäppeler 2011). Hasonló célt szolgál a szervezeti gyakorlatban az eseményt követő visszatekintés (*after action review*). A döntési probléma megfogalmazásakor a visszatekintés két dologra jó. Felszínre hozza a korábbi döntés feltevéseit, amelyek most is észrevétlenül befolyásolhatják a kérdést. Ráadásul megmutatja, mely következményeket becsültük alá vagy fölé, és így a mostani kritériumlistát is kiegészítheti. A CASE02-ben a korábbi döntés visszatekintése során kerül elő a karbantartási és a kiesési költség, amely azóta önálló kritérium lett.

A visszatekintés egyik buktatója az utólagos bölcsesség: ma már tudjuk, mi lett a kimenetel, és hajlamosak vagyunk úgy emlékezni, hogy akkor is sejtettük. Ezért a döntési napló (1.5. szakasz) a legjobb alapanyag: ott le van írva, mit tudtunk és mit vártunk a döntés pillanatában.

Próbáld ki: idővonal és tanulságok

Helyezz el célokat, eseményeket és tanulságokat egy korábbi döntés idővonalán. Az alkalmazás összegyűjti azokat a feltevéseket, amelyeket érdemes a mostani döntési helyzetlapra is felvenni.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h02-helyzetlap.html#D24

Átviteli példa: munkahelyváltás (CASE05)

Egy pályakezdő mérnök két állásajánlat között választ. Első megfogalmazásban a kérdés a fizetésről szól. A célfa felépítése közben azonban kiderül, hogy három, egymástól független alapcélja van: a szakmai fejlődés, a szabadidő és az anyagi biztonság. A státusz, amely elsőre fontosnak tűnt, eszközcélnak bizonyul: azért fontos neki, mert a fejlődési lehetőségeket jelzi. A jelenlegi állapot (a mostani munkahely maradása) is önálló alternatíva. A kérdés így „melyik ajánlatot fogadjam el?” helyett „melyik lehetőség szolgálja legjobban a három célomat a következő három évben?” lesz.

A „melyik a legjobb?” kérdés

Döntéshozó, kritérium és időhorizont nélkül a „melyik a legjobb?” kérdés többértelmű, és a vita résztvevői gyakran észre sem veszik, hogy más-más kérdésre válaszolnak. Ha egy megbeszélésen a vélemények tartósan ütköznek, érdemes megállni, és a döntési helyzetlap öt kérdését közösen megválaszolni: ki dönt, mit választ, mire való tekintettel, milyen feltételek mellett és milyen időtávra.

Összefoglalás

- A jó döntési kérdés megmondja, ki dönt, mit választ, milyen célok szerint, milyen kötelező feltételek mellett és milyen időtávra; az operacionalizált kérdésből következik, mit kell mérni.
- Az értékfókuszú gondolkodás a célokból indul ki, és ehhez keres lehetőségeket; így tágabb alternatívakészlethez jut.
- Az alapcél önmagában fontos, az eszközcél egy alapcélt szolgál; a kettő együttes értékelése kettős beszámításhoz vezet.
- A célfát a teljesség, az átfedésmentesség és a mérhetőség próbájával ellenőrizzük.
- Az érintetti térkép a bevonás módját segít megtervezni, nem a vélemények rangsorát.
- A rendszerhatár, az időhorizont és a viszonyítási alap eldönti, milyen alternatívák és következmények számítanak; a jelenlegi állapot mindig önálló alternatíva.
- A döntés időzítése a tudás növekedése és a beavatkozási szabadság csökkenése közötti mérlegelés.
- A döntési helyzetlap egy oldalon rögzíti a keretet, és minden későbbi számítás bemenete visszavezethető rá.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség az alapcél és az eszközcél között? Adj példát a CASE02 esetből!
2. Miért kell a jelenlegi állapotot önálló alternatívaként vizsgálni, ha várhatóan úgyis kiesik?
3. Fogalmazd át operacionalizált döntési kérdéssé: „Milyen laptopot vegyek?”

4. A CASE02-ben a szervezet úgy dönt, hogy az ügyfélbeosztást is a döntés részévé teszi. Hogyan változhat ettől a 250 km-es korlát és az alternatívák köre?
5. Egy kolléga szerint az érintetti térkép jobb felső sarkában lévők véleményének nagyobb súlyt kell kapnia a pontozásban. Mit vetnél ellen?

Megoldás.

1. Az alapcél önmagában fontos (például a gazdaságosság vagy a környezeti hatás csökkentése), az eszközcél azért fontos, mert egy alapcél elérését segíti (például a sok elérhető szervizpont, amely a kiesési időt csökkenti).
2. Mert a változtatás értéke csak a jelenlegi állapothoz képest ítélhető meg, és az előszűrés is csak akkor visszakereshető, ha a jelenlegi állapot kiesésének oka dokumentált. Ha nem vizsgáljuk, kimarad annak lehetősége, hogy a változtatás nem éri meg.
3. Például: „Melyik laptopot vásároljam meg tanuláshoz és részmunkaidős munkához a következő négy évre, ha legfeljebb 350 ezer forintot költhetek, és a gépnek egy teljes napot ki kell bírnia töltés nélkül?”
4. Ha a beosztás átszervezésével a hosszú út több napra bontható, vagy útközbeni töltés is beépíthető, a 250 km-es korlát enyhülhet, így a rövidebb hatótávú E jelölt is versenyképessé válhat, és új alternatívák (például vegyes flotta) is felmerülhetnek.
5. A térkép a bevonás módját tervezi, nem a preferenciák súlyát. A súlyokat a döntéshozó értékrendjéből és a kritériumok tartományából kell levezetni (8. fejezet). Az eltérő érintetti nézőpontokat külön súlyprofilokként érdemes vizsgálni (12. fejezet), nem a befolyás alapján összevonni.

Továbbolvasás

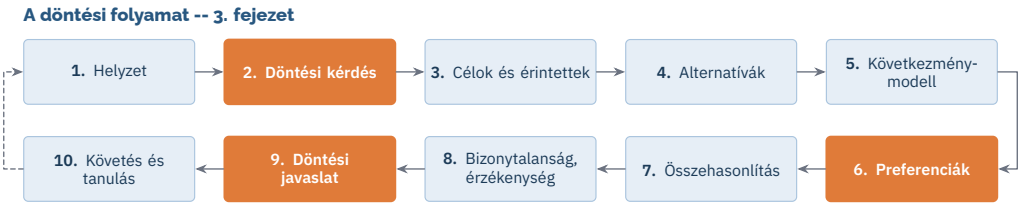
- Keeney, R. L. (1992): *Value-Focused Thinking*. Harvard University Press – az alap- és eszközcélok, a célhierarchia és az értékfókuszú gondolkodás (Keeney 1992).
- Belton, V., Stewart, T. J. (2002): *Multiple Criteria Decision Analysis*, 3. fejezet – a problémastrukturálás eszközei (Belton és Stewart 2002).
- Eden, C., Ackermann, F. (1998): *Making Strategy* – az érintetti térkép és a bevonás tervezése (Eden és Ackermann 1998).
- Hammond, J. S., Keeney, R. L., Raiffa, H. (1999): *Smart Choices*, 2–3. fejezet (Hammond és mtsai. 1999).

Gyakorlat

A Döntési műhely 2. műhelyében a helyzetlap-alkalmazással (H02) kitöltheted a CASE02 vagy egy saját döntés helyzetlapját, felépítheted a célfát és az érintetti térképet. A hozzá tartozó Excel-munkafüzet (E02) ugyanezt a szerkezetet táblázatosan rögzíti, és összegyűjti az információhiányokat.

3.

Emberi ítélet, önismeret és döntési torzítások



Mennyit számít, hogy már elkezdted?

Ildi fél éve minden szabad estéjét a lakótelepi közösségi kert tervére szánja. Az új számítások szerint a terv aligha térül meg, neki mégis egyre több érv jut eszébe a folytatás mellett. Egy barátnője egyszer csak megkérdezi: ha ma kezdenéd, belevágnál?

A lényeg: A korábbi erőfeszítés befolyásolhatja a megítélésünket, a következő lépést azonban a jövőbeli következmények indokolják.

Kérdés: Milyen új információ alapján mondanád ki, hogy ideje változtatni?

Szemléltető, kitalált helyzet · F03 · Próbáld ki: h03-keretezes

A modellek nem helyettesítik az emberi ítéletet; az ítéletből indulnak ki, és az ítélethez térnek vissza. A kérdést, a célokat, a súlyokat és a valószínűségeket emberek adják meg, és az eredményt is emberek értelmezik. Ezért tudnunk kell, hol és hogyan téved szisztematikusan az emberi ítélet. Ez a fejezet a döntési torzítások legfontosabb családjait mutatja be, de nem azzal a céllal, hogy az embert „irracionálisnak” bélyegezze. A cél az, hogy olyan eljárásokat építsünk a döntési folyamatba, amelyek a jellegzetes tévedéseket időben láthatóvá teszik.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- megmagyarázni a korlátozott racionalitás és az egyszerű döntési szabályok szerepét;
- felismerni egy döntési helyzetben legalább két lehetséges torzítást (horgonyzás, keretezés, megerősítési torzítás, elsüllyedt költség, kognitív disszonancia);
- elkülöníteni a döntési folyamat minőségét a kimeneteltől, és a képességet a szerencsétől;
- összevetni a saját megítélésedet a kapott visszajelzéssel, és tisztázó kérdést fogalmazni;
- ellenőrző eljárást javasolni: döntési napló, előzetes hibafeltárás, változtatási feltétel és kalibráció.

A fejezet először a korlátozott racionalitás gondolatát mutatja be, amely megmagyarázza, miért használunk egyszerű szabályokat, és miért vezetnek ezek néha tévútra. Ezután a megítélést torzító legismertebb hatásokat tárgyaljuk: a horgonyzást, a keretezést és a megerősítési torzítást. A harmadik szakasz az elsüllyedt költséggel és a kognitív disszonanciával foglalkozik, a negyedik az önismerettel és a visszajelzéssel. Az ötödik a képesség, a szerencse és az elvárások szerepét vizsgálja, a hatodik pedig olyan gyakorlati eszközöket ad, amelyekkel a torzítások hatása csökkenthető.

3.1. Korlátozott racionalitás és egyszerű döntési szabályok

Herbert Simon figyelmeztetett elsőként arra, hogy a valóságos döntéshozó nem a klasszikus közgazdaságtan mindentudó, végtelen számítási kapacitású szereplője (Simon 1955). Korlátozott az ideje, a figyelme, az információja és a számítási képessége. Ezért gyakran nem a legjobb, hanem az *elég jó* megoldást keresi: addig vizsgálja a lehetőségeket, amíg egy elfogadhatónak ítélt szintet el nem ér. Simon ezt *kielégítő* (*satisficing*) döntésnek nevezte.

Az egyszerű döntési szabályok (*heurisztikák*) ebben a világban nem hibák, hanem a korlátokhoz alkalmazkodó eszközök. Gerd Gigerenzer és munkatársai kimutatták, hogy bizonyos környezetekben egy-egy egyszerű szabály, például „válaszd azt, amelyiket felismered” vagy „dönts a legfontosabb szempont alapján, és csak döntetlennél nézd a következőt”, legalább olyan jól teljesít, mint a bonyolultabb modellek (Gigerenzer és Goldstein 1996). Daniel Kahneman és Amos Tversky kutatási programja ugyanakkor azt mutatta meg, hogy ugyanezek a szabályok más környezetben szisztematikus, előre jelezhető tévedésekhez, **torzításokhoz** vezetnek (Tversky és Kahneman 1974; Kahneman 2011).

A két kutatási irány nem mond ellent egymásnak. Egy heurisztika értéke a környezettől függ: ott működik jól, ahol a környezet szerkezete illeszkedik

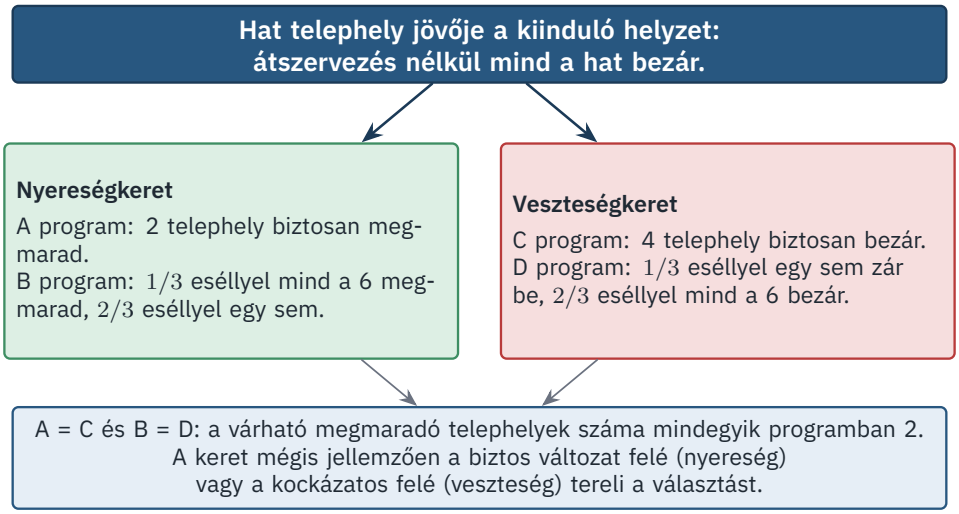
hozzá. A döntéstámogatás feladata ezért kettős: tisztelni a jól működő tapasztalati tudást, és megtalálni azokat a pontokat, ahol egy kifejezett modell vagy egy ellenőrző lépés többet ér a megérzésnél.

Amikor másokat modellezünk (vevőket, versenytársakat, kollégákat), három alapvető ábrázolás közül választhatunk (Page 2018). A **racionális szereplő** egy jól definiált célt maximalizál; ez gyakran túlzó feltevés, de hasznos viszonyítási pont, és ott jó közelítés, ahol a tét nagy, a helyzet ismétlődik, és van idő a tanulásra. A **viselkedési** modellek a megfigyelt, szabályszerű eltéréseket (veszteségkerülés, jelen torzítás, keretezés) építik be. A **szabálykövető** modellek rögzített vagy alkalmazkodó döntési szabályokat feltételeznek, ahogy a 21. és a 22. fejezet ágensalapú modelljei teszik. Hogy melyik ábrázolás a jobb, az a kérdéstől függ: egyes helyzetekben az eredmény alig érzékeny rá, máshol döntő (23.3. szakasz). Dhananjay Gode és Shyam Sunder kísérletében egy kettős aukciós piacon az emberi kereskedőket „zéró intelligenciájú" programok váltották fel, amelyek véletlenszerű ajánlatokat tettek, csupán azzal a megkötéssel, hogy nem adhattak el a költségük alatt, és nem vehettek az értékük fölött. A piac allokációs hatékonysága így is megközelítette a 100%-ot (Gode és Sunder 1993): a hatékonyságot itt nagyrészt az intézmény szerkezete hozta létre, nem a résztvevők racionalitása. Mielőtt tehát egy eredményt az emberek okosságának vagy irracionalitásának tulajdonítunk, érdemes megvizsgálni, mennyit magyaráz meg belőle maga a szabályrendszer.

3.2. Horgonyzás, keretezés és megerősítési torzítás

A **horgonyzás** (*anchoring*) azt jelenti, hogy egy becslés a kiindulásként felkínált számhoz, a horgonyhoz igazodik, akkor is, ha a horgony nyilvánvalóan esetleges (Tversky és Kahneman 1974). Egy beszerzési tárgyaláson az első ajánlat ára, egy költségbecslésnél a tavalyi keret, egy projekttervnél a megrendelő által elsőként említett határidő egyaránt horgonyként működik. A horgony hatása a szakértőknél is kimutatható, és a figyelmeztetés csak részben csökkenti.

A **keretezési hatás** (*framing effect*) szerint ugyanazon, számszerűen azonos lehetőségek eltérő megfogalmazása eltérő választást eredményezhet (Tversky és Kahneman 1981). Tversky és Kahneman klasszikus kísérletében egy járvány elleni programról volt szó. Amikor a lehetőségeket megmentett életekben fogalmazták meg, a válaszadók többsége (72%) a biztos változatot választotta; amikor ugyanazokat a lehetőségeket elhunytakban fogalmazták meg, a többség (78%) a kockázatos változatot preferálta (Tversky és Kahneman 1981). A jelenséget a kilátáselmélet magyarázza: nyereségek tartományában jellemzően kockázatkerülők, veszteségek tartományában kockázatvállalók vagyunk (Kahneman és Tversky 1979).



3.1. ábra. Keretezési hatás egy szervezeti döntésben. A négy program közül A és C, illetve B és D számszerűen azonos; a várható megmaradó telephelyek száma mindegyik esetben 2. A megfogalmazás mégis eltérő választás felé terelhet.

Ugyanaz a döntés két megfogalmazásban

Egy hat telephelyes vállalat átszervezés nélkül mind a hat telephelyét bezárná. Két program közül kell választani (3.1. ábra). A nyereségkeretben az A program két telephelyet biztosan megment, a B program $1/3$ eséllyel mindet, $2/3$ eséllyel egyet sem. A veszteségkeretben a C program mellett négy telephely biztosan bezár, a D program mellett $1/3$ eséllyel egy sem, $2/3$ eséllyel mind a hat. A várható megmaradó telephelyek száma mindegyik programban 2: B-nél és D-nél $\frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 0 = 2$. A és C ugyanazt a következményt írja le, ahogy B és D is. Ha egy vezetői csoport a két keretben eltérően választ, a különbség nem a következményekből, hanem a megfogalmazásból ered.

A **megerősítési torzítás** (*confirmation bias*) az a hajlam, hogy a meglévő vélekedésünket alátámasztó információt keressük, vegyük észre és tartsuk meg, a cáfolót pedig kevésbé (Nickerson 1998). Egy projektjavaslat kidolgozója jellemzően a javaslatot támogató adatokat gyűjti; nem rosszhiszeműségből, hanem mert ezeket tartja relevánsnak. A védekezés egyik legegyszerűbb eszköze, hogy a döntés előtt kifejezetten megkérdezzük: *milyen adat cáfolná a javaslatot, és megnéztük-e?*

Próbáld ki: keretezés és elsüllyedt költség

Előbb válassz a nyereségkeretben megfogalmazott két program közül, majd ugyanazt tedd meg a veszteségkeretben. Az alkalmazás ezután megmutatja, hogy a két keret számszerűen azonos. A második lapon egy félig elkészült projektről

kell döntened; vizsgáld meg, változik-e a döntésed, ha az eddigi ráfordítást elrejted.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h03-keretezes.html#F03

3.3. Elsüllyedt költség, disszonancia és utólagos magyarázat

Az **elsüllyedt költség** (*sunk cost*) a már felmerült, vissza nem szerezhető ráfordítás. A döntéselmélet szerint a következő lépést csak a jövőbeli következmények indokolhatják: amit már elköltöttünk, azt minden alternatíva esetén elköltöttük. Arkes és Blumer kísérletei mégis azt mutatták, hogy az emberek hajlamosak folytatni egy vállalkozást csak azért, mert már sokat fektettek bele (Arkes és Blumer 1985). Ez az elsüllyedt költség hibája.

A jövőre vonatkozó döntési szabály

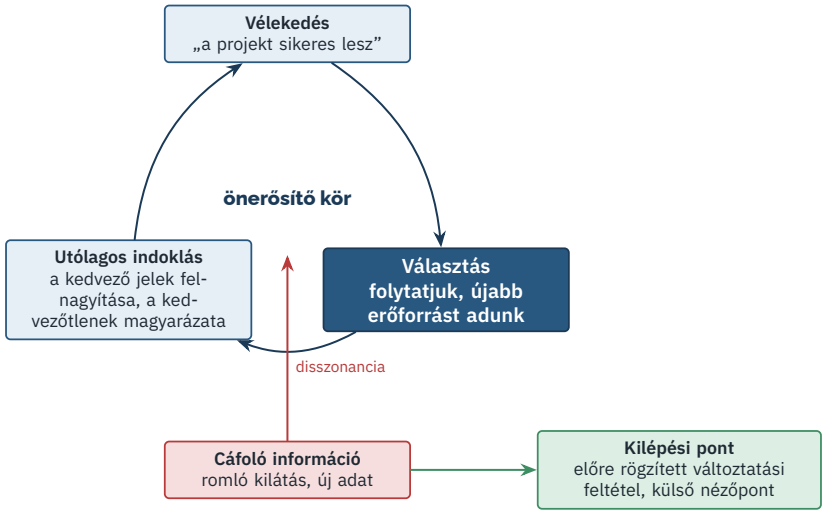
Két lehetőség összevetésekor csak azokat a költségeket és hasznokat kell figyelembe venni, amelyek a választástól függően eltérnek. A már felmerült, minden lehetőségben közös ráfordítás a választást nem befolyásolhatja.

A hiba egyik lélektani forrása a **kognitív disszonancia**: Leon Festinger elmélete szerint kellemetlen feszültséget élünk át, ha a vélekedéseink és a tetteink ellentmondanak egymásnak, és ezt a feszültséget hajlamosak vagyunk a vélekedéseink igazításával csökkenteni (Festinger 1957). A 3.2. ábra mutatja, hogyan alakul ki egy önerősítő kör a vélekedés, a választás és az utólagos indoklás között. A cáfoló információ disszonanciát kelt, amelyet könnyebb a kedvező jelek felnagyításával feloldani, mint a döntés felülvizsgálatával.

3.3.1. A disszonancia köre és a kilépési pont

Miért védjük meg a saját döntésünket?

Egy csapatvezető drága szoftvert választott. Fél év után a munkatársak panaszkodnak, ő pedig egyre meggyőzőbb érveket talál arra, miért volt a választás mégis jó.
A lényeg: Ha a tetteink és a vélekedéseink ütköznek, hajlamosak vagyunk a vélekedéseinket igazítani a tetteinkhez.
Kérdés: Ki lenne az, aki a te helyedben a legkönnyebben kimondaná, hogy ideje váltani?
Szemléltető, kitalált helyzet · D15 · Próbáld ki: h03-keretezes



3.2. ábra. A kognitív disszonancia önerősítő köre. A cáfoló információ a körbe belépve disszonanciát kelt; egy előre rögzített változtatási feltétel vagy egy külső nézőpont kilépési pontot ad.

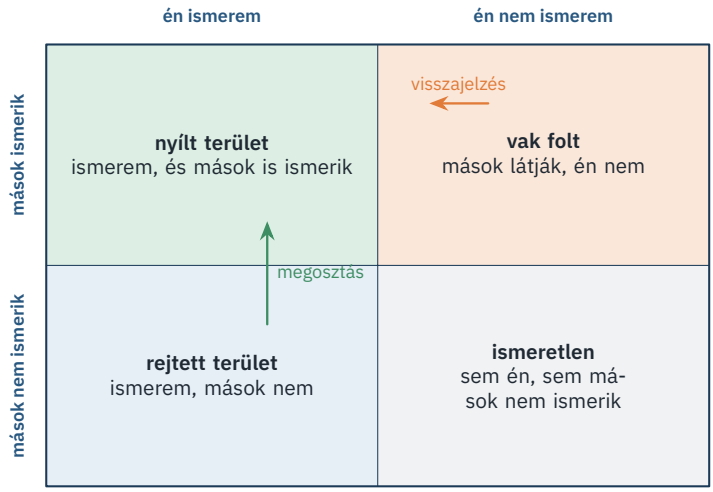
A disszonanciaelmélet *leíró viselkedési modell* (1.2. szakasz): egy mechanizmust javasol, amelyet sok kísérlet támaszt alá, de nem minden helyzetben és nem minden embernél működik egyformán. A döntéstámogatás számára a gyakorlati következmény a fontos: ha egy döntést előbb meghoztunk és nyilvánosan vállaltunk, utána nehezebb elfogulatlanul értékelni. Ezért érdemes a kilépési pontot *előre* rögzíteni (például: „ha a pilot három hónap után nem éri el a 70%-os felhasználói elégedettséget, újranyitjuk a döntést”), és a felülvizsgálatba olyan személyt is bevonni, aki az eredeti döntésben nem vett részt.

> **Próbáld ki: vélekedés, cselekvés, indoklás**
>
> Egy rövid történetben a szereplő cselekvése és vélekedése ütközik. Válaszd ki, hogyan oldaná fel a feszültséget, és figyeld meg, hogyan alakul a következő döntése a választott út mentén. Az alkalmazás külön mutatja a vélekedés és a viselkedés módosításának útját.
> Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h03-keretezes.html#D15

3.4. Önismeret és visszajelzés

A torzítások egy része abból fakad, hogy nem látjuk magunkat kívülről. Két egyszerű keret segít ezt a hiányt tudatosan kezelni.

A **Johari-ablak** Joseph Luft és Harrington Ingham 1955-ös modellje az interperszonális tudatosság szemléltetésére (Luft és Ingham 1955). Négy területet különböztet meg aszerint, hogy egy tulajdonságunkat mi magunk, illetve mások ismerik-e (3.3. ábra). A *nyílt terület* mindenki számára ismert, a *vak folt* csak mások számára, a *rejtett terület* csak számunkra, az *ismeretlen* senki számára. A modell két mozgásirányt javasol: a visszajelzés kérése a vak foltot, az önfeltárás a rejtett területet csökkenti.



3.3. ábra. A Johari-ablak négy területe és a két mozgásirány: a visszajelzés a vak foltot, a megosztás a rejtett területet szűkíti.

A Johari-ablak *gondolkodási keret*: nem mér semmit, és nem diagnosztizál személyiségjegyeket. Arra jó, hogy egy csapatban vagy egy személyes fejlődési beszélgetésben láthatóvá tegye, hol érdemes visszajelzést kérni. A kipróbálható változatát a 26. fejezet csapatmunkáról szóló műhelye tartalmazza.

3.4.1. Visszajelzés és saját megítélés

Mit kezdesz egy váratlan visszajelzéssel?

Egy prezentáció után két kolléga is azt mondja, hogy túl sok volt a részlet. Te úgy érzed, éppen a részletek tették meggyőzővé. Holnap ugyanezt a témát kell bemutatnod a vezetőségnek.

A lényeg: A visszajelzés akkor hasznos, ha összevetjük a saját megítélésünkkel, és tisztázzuk, honnan ered az eltérés.

Kérdés: Melyik visszajelzést fogadnád el, és melyiknél kérdeznél vissza?

Szemléltető, kitalált helyzet · D50 · Próbáld ki: h03-keretezes

A *The Decision Book* visszajelzési modellje a kapott visszajelzés és a saját megítélés összevetésére épül (Krogerus és Tschäppeler 2011). A gondolatot a kutatás is alátámasztja, de egy fontos figyelmeztetéssel. Kluger és DeNisi nagy metaanalízise szerint a visszajelzés átlagosan javítja a teljesítményt, az esetek mintegy harmadában azonban ronthatja is, különösen akkor, ha a figyelmet a feladatról a személyre tereli (Kluger és DeNisi 1996). A visszajelzés ezért akkor a leghasznosabb, ha konkrét viselkedésre vagy eredményre vonatkozik, és ha a fogadója tisztázó kérdéseket tehet fel.

A gyakorlatban négy helyzet különböztethető meg. Ha a visszajelzés és a saját megítélés egyezik, a visszajelzés megerősít. Ha a visszajelzés kedvezőtlenebb, de több, egymástól független forrásból érkezik, valószínűleg vak foltra mutat. Ha egyetlen forrásból érkezik és ellentmond a többinek, érdemes tisztázni a kritériumot: lehet, hogy a visszajelző más célt tart fontosnak. Ha a visszajelzés kedvezőbb a saját megítélésnél, az a túlzott önkritikára figyelmeztethet.

> **Próbáld ki: visszajelzések összevetése**
>
> Adj meg néhány visszajelzést és a saját megítélésedet ugyanarról a teljesítményről. Az alkalmazás csoportosítja őket, és mindegyikhez javasol egy következő lépést: elfogadás, tisztázó kérdés vagy további forrás bevonása.
> Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h03-keretezes.html#D50

3.5. Képesség, szerencse és elvárások

Egy kimenetel két forrásból táplálkozik: a döntés és a végrehajtás minőségéből, valamint a véletlenből. Ha egy befektetés jól sikerült, hajlamosak vagyunk a saját képességünknek tulajdonítani; ha rosszul, a balszerencsének. Ez a **kimenetelalapú torzítás** (*outcome bias*) az 1.5. szakaszban bevezetett döntésminőség és kimenetel összekeveréséből fakad. A 23. fejezetben, a versengés modelljeinél látni fogjuk, hogy egy versenyhelyzetben a képesség és a véletlen aránya meg is becsülhető: ahol az eredmények évről évre erősen korrelálnak, ott a képesség, ahol gyengén, ott a véletlen játszik nagyobb szerepet (Page 2018).

3.5.1. Elvárások és tényleges eredmény

Kinek az elvárásaihoz méred magad?

Egy tehetséges fiatal kutató minden évben jobb eredményt ér el, mégis egyre elégedetlenebb. A környezete és ő maga is a kiugró eredményeket várja, a hétköznapi előrelépést pedig kudarcnak érzi.
A lényeg: A magas, gyorsan növő elvárás akkor is kudarcélményt kelthet, ha a tényleges eredmény javul.
Kérdés: Melyik elvárás származik tőled, és melyik a környezetedtől?
Szemléltető, kitalált helyzet · D25 · Próbáld ki: h03-keretezes

A *The Decision Book* tehetségcsapda-modellje egy egyszerű idősoros ábrát javasol: a saját és a külső elvárások pályáját a tényleges eredményekkel együtt rajzoljuk fel (Krogerus és Tschäppeler 2011). A modell szerzői heurisztika, nem kutatási eredmény, de egy jól ismert jelenségre irányítja a figyelmet: az elégedettség a viszonyítási ponttól függ, és ha a viszonyítási pont gyorsabban emelkedik, mint az eredmény, a különbség nő. A kilátáselmélet referenciapont-függése (Kahneman és Tversky 1979) és a célkitűzés kutatásai (Locke és Latham 2002) egyaránt azt mutatják, hogy a túl magas, kívülről átvett célok demotiválhatnak. A gyakorlati tanulság: érdemes szétválasztani a saját és a külső elvárásokat, és a célokat konkrét, a saját fejlődési pályához mért lépésekben megfogalmazni (5. fejezet).

Próbáld ki: elvárások és eredmény

Állítsd be a saját és a külső elvárások növekedési ütemét és a tényleges eredmény pályáját. Az alkalmazás kiszámítja a különbségeket, és ahol azok tartósan nőnek, tisztázó kérdést javasol.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h03-keretezes.html#D25

3.6. Ellenőrző eszközök: napló, előzetes hibafeltárás, kalibráció

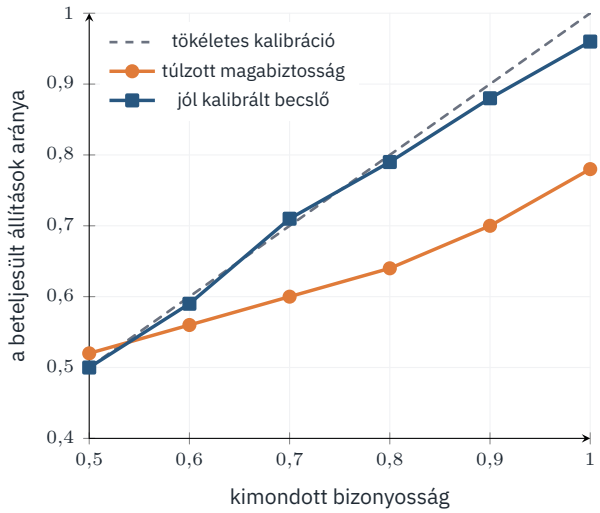
A torzításokat nem lehet egyszerű elhatározással megszüntetni; a puszta figyelmeztetés kevéssé hatékony. Hatékonyabbak azok az eljárások, amelyek a döntési folyamatba épülnek, és a torzítás *helyén* avatkoznak be (Kahneman és mtsai. 2021).

- **Döntési napló és változtatási feltétel.** A döntés előtt leírjuk, mit várunk, és milyen megfigyelés változtatná meg a véleményünket (1.5. szakasz). Ez az elsüllyedt költség és a disszonancia ellen véd.

- **Előzetes hibafeltárás** (*premortem*). Gary Klein módszerében a csapat elképzeli, hogy a döntés egy év múlva kudarcba fulladt, és mindenki leírja, szerinte mi okozta a kudarcot (Klein 2007). A módszer feloldja a csoportnyomást, és a megerősítési torzítás ellen dolgozik, mert kifejezetten a cáfoló okok keresésére hív.
- **Független első becslés.** Csoportos döntésnél mindenki előbb egyedül, írásban rögzíti a becslését vagy értékelését, és csak utána következik a megbeszélés. Ez csökkenti a horgonyzást és a konformitást (25. fejezet).
- **Fordított keretezés.** A fontos lehetőségeket mindkét keretben (nyereség és veszteség) megfogalmazzuk, és megnézzük, változik-e a preferencia.
- **Kalibráció.** Valószínűségi becsléseink minőségét mérhetjük.

Kalibráció és Brier-pontszám

Egy becslő akkor **jól kalibrált**, ha azok közül az állítások közül, amelyekre 70%-os bizonyosságot mond, hosszú távon körülbelül 70% teljesül. A valószínűségi előrejelzések pontosságát a **Brier-pontszám** méri: n előrejelzésre $\mathrm{BS} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(p_i - o_i)^2$, ahol p_i a kimondott valószínűség, o_i pedig 1, ha az esemény bekövetkezett, és 0, ha nem. A kisebb érték a jobb (Brier 1950).



3.4. ábra. Kalibrációs görbe. A szaggatott átló a tökéletes kalibráció; a narancs görbe a túlzott magabiztosság jellegzetes mintázata, amelynél a kimondott bizonyosságnál ritkábban teljesülnek az állítások. Szemléltető adatok.

A túlzott magabiztosság ára

Egy projektvezető tíz határidőről mondja, hogy 90% eséllyel tartható; hat teljesül. Brier-pontszáma $\big(6\cdot(0{,}9-1)^2+4\cdot(0{,}9-0)^2\big)/10 = (0{,}06+3{,}24)/10 = 0{,}33$.

Ha mindegyikre 60%-ot mondott volna, a pontszáma $(6 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}36)/10 = 0{,}24$ lenne, vagyis jobb. A kevésbé magabiztos, de pontosabb becslés többet ér, mert a döntéshozó tartalékot tervezhet. A tapasztalat szerint a rendszeres visszajelzés és a becslések naplózása javítja a kalibrációt (Tetlock és Gardner 2015).

Átviteli példa: pályaváltás és korábbi erőfeszítések (CASE05)

Egy mérnök öt évet töltött egy szakterület elsajátításával, most egy másik területen kínálnak neki izgalmas lehetőséget. A korábbi erőfeszítés elsüllyedt költség: a döntést az határozza meg, melyik úton milyen jövőbeli fejlődés, megélhetés és elégedettség várható. A korábbi tudás ugyanakkor *nem* elsüllyedt költség, ha az új területen is hasznosítható; ez a jövőbeli következmények része. A gyakorlatban érdemes két külön oszlopot vezetni: a múltbeli ráfordítást (amely nem számít) és a megszerzett, átvihető képességeket (amelyek számítanak).

Egyetlen válaszból nem következik személyiségjegy

A torzításokat bemutató kísérletek csoportszintű hatásokat mérnek: azt, hogy egy keret átlagosan hogyan tolja el a választásokat. Egyetlen ember egyetlen válaszából nem lehet arra következtetni, hogy „hajlamos a keretezésre”, és még kevésbé arra, hogy általában irracionális. A könyv interaktív demói ezért soha nem adnak személyiségminősítő pontszámot: az első választást és a módosítás okát rögzítik, hogy az olvasó a saját gondolkodását vizsgálhassa.

Összefoglalás

- A korlátozott racionalitás miatt egyszerű szabályokat használunk; ezek egyes környezetekben jól működnek, másokban szisztematikus torzításokhoz vezetnek.
- A horgonyzás a kiinduló számhoz, a keretezés a megfogalmazáshoz, a megerősítési torzítás a meglévő vélekedéshez köti az ítéletet.
- A következő lépést csak a jövőbeli, alternatívánként eltérő következmények indokolhatják; az elsüllyedt költség figyelembevétele hiba.
- A kognitív disszonancia önerősítő kört hoz létre a vélekedés, a választás és az utólagos indoklás között; az előre rögzített változtatási feltétel kilépési pontot ad.
- A Johari-ablak és a visszajelzési modell gondolkodási keretek a vak foltok feltárására; a visszajelzés akkor hasznos, ha konkrét, és a fogadója tisztázhatja.
- A kimenetel a döntés minőségéből és a véletlenből együtt adódik; a gyorsan növő elvárás akkor is kudarcélményt kelthet, ha az eredmény javul.
- A torzítások ellen a döntési folyamatba épített eljárások hatnak: napló, előzetes hibafeltárás, független első becslés, fordított keretezés és kalibráció.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség Simon kielégítő döntése és egy torzítás között?
2. Miért mondhatjuk, hogy a keretezési példában A és C ugyanazt a programot írja le?
3. Egy fejlesztési projektbe eddig 40 millió forintot fektettek. A befejezés további 20 millióba kerül, és várhatóan 15 millió forint hasznot hoz. Egy másik projekt 20 millióért várhatóan 25 millió forint hasznot hoz. Melyiket érdemes választani, ha csak az egyikre van keret?
4. Egy becslő öt eseményre 80%-ot mondott, és négy bekövetkezett. Számold ki a Brier-pontszámát!
5. Egy vezető szerint a Johari-ablak megmutatja, ki mennyire nyitott személyiség. Mit vetnél ellen?

Megoldás.

1. A kielégítő döntés tudatos alkalmazkodás a korlátozott időhöz és információhoz: elfogadható szintet keresünk, nem optimumot. A torzítás szisztematikus, előre jelezhető eltérés egy normatív szabálytól, amely a döntéshozó saját céljai szerint is rossz választáshoz vezethet.
2. Mindkettő ugyanazt a következményt írja le a hat telephelyre: kettő megmarad, négy bezár. A különbség csak abban van, hogy a megmaradókat (nyereség) vagy a bezárókat (veszteség) nevezi meg.
3. A második projektet. A 40 millió elsüllyedt költség, mindkét lehetőség esetén elveszett. A jövőre nézve az első projekt nettó haszna $15 - 20 = -5$ millió, a másodiké $25 - 20 = +5$ millió forint.
4. $(4 \cdot (0{,}8-1)^2 + 1 \cdot (0{,}8-0)^2)/5 = (0{,}16 + 0{,}64)/5 = 0{,}16$.
5. A Johari-ablak gondolkodási keret a visszajelzés és az önfeltárás megbeszéléséhez, nem mérőeszköz. Nem ad érvényes személyiségmérést, és a területek mérete egy adott kapcsolatra és helyzetre vonatkozik, nem tartós jellemvonásra.

Továbbolvasás

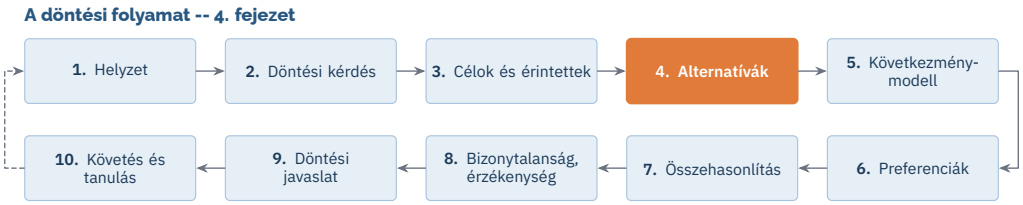
- Kahneman, D. (2011): *Thinking, Fast and Slow* – a heurisztikák és torzítások kutatásának összefoglalása (Kahneman 2011).
- Tversky, A., Kahneman, D. (1974, 1981) – a horgonyzás és a keretezési hatás eredeti közleményei (Tversky és Kahneman 1974, 1981).
- Gigerenzer, G., Goldstein, D. G. (1996) – az egyszerű döntési szabályok ökológiai racionalitása (Gigerenzer és Goldstein 1996).
- Kahneman, D., Sibony, O., Sunstein, C. R. (2021): *Noise* – a döntési eljárások javításának gyakorlati eszközei (Kahneman és mtsai. 2021).
- Klein, G. (2007): Performing a project premortem (Klein 2007).

Gyakorlat

A Döntési műhely 3. műhelyében a keretezési alkalmazással (H03) a nyereség- és veszteségkeretet, az elsüllyedt költséget, a disszonanciakört, a visszajelzések összevetését és az elvárások pályáját próbálhatod ki. A műhely egy előzetes döntési indoklás és egy cáfoló bizonyíték megfogalmazásával zárul.

4.

Alternatívák előállítása és kreatív problémamegoldás



Hány valóban különböző ötleted van?

Hanna nyelvtanár, és saját tanfolyamot indítana. Elsőre csak az árat variálja: olcsó, közepes vagy prémium kurzus legyen? Amikor egy barátja megkérdezi, kinek és milyen formában tanítana, egészen más ötletek születnek: hétvégi intenzív kurzus nagyszülőknek, online beszélgetőklub kamaszoknak.

A lényeg: Új lehetőségek születhetnek, ha az ár mellett a megoldás szerkezetét és a használat módját is változtatjuk.

Kérdés: Melyik tulajdonság megváltoztatásával kapnál valóban másik megoldást a saját esetedben?

Szemléltető, kitalált helyzet · F04 · Próbáld ki: h04-kombinator

Egy döntés soha nem lehet jobb a legjobb alternatívánál, amelyet megvizsgáltunk. Ez az egyszerű tény teszi az alternatívák előállítását a döntéshozatal egyik legértékesebb, mégis leggyakrabban elhanyagolt lépésévé. A szervezeti döntések vizsgálatai szerint a döntéshozók gyakran egyetlen lehetőséget mérlegelnek („csináljuk vagy ne”), vagy néhány, egymáshoz nagyon hasonló változatot. Ez a fejezet olyan eljárásokat mutat be, amelyekkel érdemben eltérő lehetőségeket lehet létrehozni, és ezekből egy kezelhető, indokolt rövidlistát lehet készíteni.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- legalább négy érdemben eltérő alternatívát előállítani egy döntési helyzetre;
- morfológiai táblát készíteni, és kompatibilitási szabályokkal kizárni az összeférhetetlen kombinációkat;
- SCAMPER-kérdésekkel egy meglévő megoldásból új változatokat képezni;
- felismerni és feloldani a feladat által elő nem írt, önkéntes korlátokat;
- megindokolni a keresési stratégiát (helyi javítás, újrakeretezés, rekombináció, nézőpontváltás);
- előszűrni a lehetőségkészletet, és a kizárás okait dokumentálni.

A fejezet a probléma újrakeretezésével kezd, amely az eddigiek folytatása: a 2. fejezetben láttuk, hogy a kérdés megfogalmazása már kijelöli a lehetőségek körét. Ezután két rendszerező eszközt, a morfológiai táblát és a SCAMPER-kérdéssort mutatjuk be. A harmadik szakasz a rejtett korlátokkal, a negyedik a keresés stratégiáival és a csoportos problémamegoldással foglalkozik. A fejezet az előszűréssel és a lehetőségkészlet dokumentálásával zárul.

4.1. Újrakeretezés és eltérő reprezentációk

Ha a CASE02 kérdése „melyik autót vegyük meg”, az alternatívák autótípusok. Ha a kérdés „hogyan biztosítsuk a szervizmunkatársak mobilitását”, az alternatívák között a bérlet, a megosztott használat, a vegyes flotta és az utazási igény csökkentése is megjelenik. Az **újrakeretezés** a döntési kérdés olyan átfogalmazása, amely a célokhoz közelebb, az eszközöktől távolabb kerül. Keeney értékfókuszú gondolkodása szerint az alternatívák forrása a célok listája: minden alapcélhoz meg kell kérdezni, hogyan lehetne azt másként elérni (Keeney 1992).

Scott Page a problémamegoldás egyik alapgondolatának tartja, hogy ugyanazt a problémát többféle **reprezentációban** (*perspektívában*) is meg lehet fogalmazni, és egy-egy reprezentáció más megoldásokat tesz könnyen megtalálhatóvá (Page 2007). Egy útvonal-optimalizálási feladat térképen, távolságtáblázatként vagy gráfként más-más megoldási ötleteket sugall. Az 1.6.3. szakaszban ugyanezt láttuk a késések problémájánál: a táblázat, a hálózat és az idősor más okokat tett láthatóvá.

4.2. Morfológiai mátrix és kompatibilis kombinációk

Hány megoldás rejlik négy kérdésben?

Egy továbbképzés tervezésekor négy kérdést teszünk fel: kinek, milyen formában, mikor és milyen támogatással. Mindegyikre három-négy válasz adható, és a válaszok kombinációja százötvennél is több elvi lehetőséget ad.
A lényeg: A szerkezetet bontsd tulajdonságokra; a kombinációkból olyan lehetőségek is előkerülnek, amelyekre magadtól nem gondoltál volna.
Kérdés: Melyik két tulajdonságváltozat nem fér össze a saját esetedben?
Szemléltető, kitalált helyzet · D08a · Próbáld ki: h04-kombinator

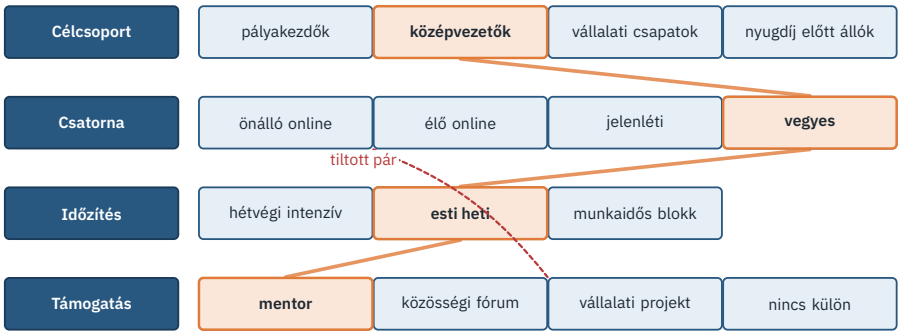
A **morfológiai elemzést** Fritz Zwicky asztrofizikus dolgozta ki a mérnöki tervezés rendszerezésére (Zwicky 1969). Az eljárás egyszerű: a megoldást néhány független tulajdonságra (*paraméterre*) bontjuk, mindegyikhez felsoroljuk a lehetséges változatokat, majd a változatok kombinációiként állítunk elő alternatívákat. Tom Ritchey kiterjesztette a módszert a nehezen strukturálható társadalmi és szervezeti problémákra, és bevezette a **kompatibilitási elemzést**: a változatpárokat egyenként megvizsgáljuk, és kizárjuk azokat, amelyek nem férnek össze (Ritchey 2011).

CASE07 – Továbbképzési szolgáltatás felépítése

Egy egyetem új továbbképzési szolgáltatást tervez. Négy tulajdonságot rögzít: a célcsoportot (pályakezdők, középvezetők, vállalati csapatok, nyugdíj előtt állók), a csatornát (önálló online, élő online, jelenléti, vegyes), az időzítést (hétvégi intenzív, esti heti, munkaidős blokk) és a támogatási formát (mentor, közösségi fórum, vállalati projekt, nincs külön támogatás). Ez $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 192$ elvi kombináció. Négy kompatibilitási szabály van: az önálló online képzéshez nem kapcsolható vállalati projekt; a vállalati csapatoknak csak munkaidős blokk szervezhető; jelenléti képzés nem lehet esti heti, mert a résztvevők többsége messziről érkezik; és a nyugdíj előtt állók képzéséhez nem tartozik vállalati projekt. A szabályok után 130 kombináció marad.

A 130 kombináció sok, de nem is az a cél, hogy mindet értékeljük. A tábla arra jó, hogy *szisztematikusan* lássuk a lehetőségek terét, és tudatosan válasszunk ki belőle néhány, egymástól érdemben eltérő jelöltet. Egy jó rövidlista a tér különböző részeiről hoz jelölteket: például egy olcsó, önálló online változatot pályakezdőknek, egy mentorált, vegyes képzést középvezetőknek és egy munkaidős, projektalapú programot vállalati csapatoknak.

A CASE02 öt jelöltje is így keletkezett. A két fő tulajdonság a használati forma (vásárlás, tartós bérlet, megosztott használat) és a hajtás (hibrid, konnektoros hibrid, elektromos). A kombinációk közül a szervezet az alábbi ötöt vizsgálja tovább: **A** hibrid, vásárlás; **B** konnektoros hibrid, tartós bérlet; **C** elektromos, tartós bérlet zöldáram-szerződéssel; **D** elektromos, vásárlás nagy



Négy szempont $4 \times 4 \times 3 \times 4 = 192$ kombinációt ad; négy kompatibilitási szabály után 130 marad. A kiemelt út egy kiválasztott alternatíva.

4.1. ábra. Morfológiai tábla a CASE07 esetre. A kiemelt út egy kiválasztott alternatíva, a szaggatott vonal egy kizárt változatpárt jelöl.

akkumulátorral; **E** kis városi elektromos jármű megosztott használatban, a heti hosszú útra külön bérelt járművel. A jelenlegi állapot (a régi jármű bérletének meghosszabbítása) a viszonyítási alap.

Próbáld ki: morfológiai kombinátor

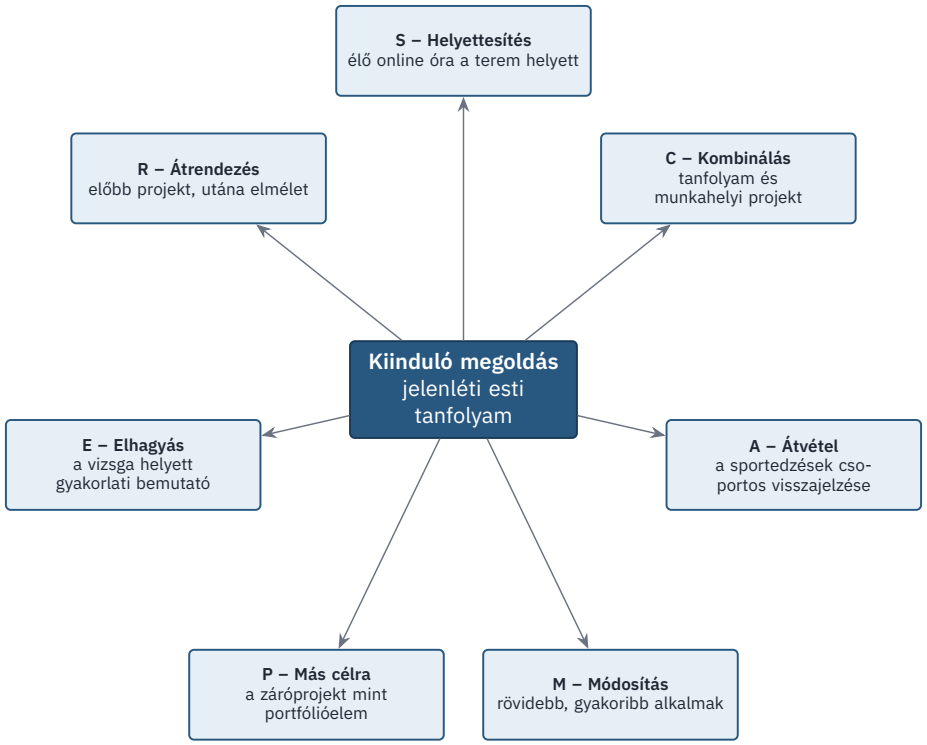
Előbb becsüld meg, hány kombináció marad a négy kompatibilitási szabály után. Ezután kapcsolj ki és be szabályokat, adj hozzá saját tulajdonságváltozatot, és figyeld meg, hogyan változik a megengedett kombinációk száma. Válassz ki három, egymástól érdemben eltérő jelöltet a rövidlistára.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h04-kombinator.html#D08a

4.3. SCAMPER: új változatok egy meglévő megoldásból

Mi lenne, ha elhagynád a vizsgát?

A tanfolyam évek óta ugyanúgy zajlik: esti előadások, a végén vizsga. Valaki megkérdezi, mi lenne, ha a vizsga helyett a résztvevők egy saját munkahelyi problémát oldanának meg.
A lényeg: Egy meglévő megoldás egy-egy elemének szándékos megváltoztatása új változatot hozhat létre.
Kérdés: Melyik elemet hagynád el vagy cserélnéd le először a saját megoldásodban?
Szemléltető, kitalált helyzet · D08b · Próbáld ki: h04-kombinator

A **SCAMPER** egy kérdéssor, amelyet Bob Eberle állított össze Alex Osborn ötletgenerálási kérdései alapján (Eberle 1971; Osborn 1953). A betűszó hét műveletet jelöl: *substitute* (helyettesítés), *combine* (kombinálás), *adapt* (átvétel máshonnan), *modify* (módosítás, nagyítás, kicsinyítés), *put to other uses* (más célra használás), *eliminate* (elhagyás) és *rearrange/reverse* (átrendezés, megfordítás). A morfológiai tábla a lehetőségek terét rendszerezi, a SCAMPER pedig egy meglévő megoldásból kiindulva lép át a tér szomszédos részeibe (4.2. ábra).



4.2. ábra. A SCAMPER hét kérdése egy meglévő megoldásra alkalmazva. Minden kérdés egy új változatot javasol, amelyet ezután a megvalósíthatóság szerint vizsgálni kell.

A SCAMPER nem módszertani garancia: egy *heurisztikus kérdéssor*, amelynek értéke abban áll, hogy rendszeresen rákérdez a megoldás minden elemére. A kérdések egy része nem lesz hasznos egy adott helyzetben, és ez rendben van. A javasolt új változatokat ugyanúgy kell vizsgálni, mint bármely más alternatívát: teljesítik-e a kötelező korlátokat, és érdemben eltérnek-e a meglévőktől.

Próbáld ki: SCAMPER-kérdések

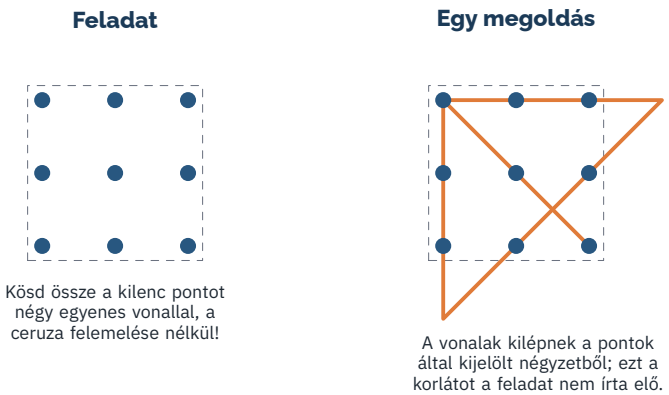
Válassz ki egy SCAMPER-kérdést, és fogalmazz meg vele egy új változatot a kiinduló tanfolyamhoz. Az alkalmazás egymás mellé teszi az eredeti és az új megoldást, és megmutatja, melyik tulajdonságukban térnek el.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h04-kombinator.html#D08b

4.4. Rejtett korlátok és a keretből való kilépés

Ki mondta, hogy a vonal nem léphet ki?

Kilenc pontot kell összekötni négy egyenes vonallal, a ceruza felemelése nélkül. A legtöbben a pontok négyzetén belül próbálkoznak, pedig erre semmi sem kötelez.
A lényeg: Sok feladatot egy általunk feltételezett, de elő nem írt korlát tesz megoldhatatlanná.
Kérdés: Melyik feltételt veszed adottnak a saját problémádban anélkül, hogy bárki előírta volna?
Szemléltető, kitalált helyzet · D32 · Próbáld ki: h04-kombinator

A „dobozon kívüli gondolkodás” kifejezés a kilencpontos feladatból ered (4.3. ábra). A feladat megoldása csak akkor sikerül, ha a vonalak kilépnek a pontok által kijelölt négyzetből; ezt a korlátot azonban senki sem írta elő, a megoldó maga vezette be. A *The Decision Book* a kreatív gondolkodás egyik alapkérdéseként tárgyalja a rejtett, önkéntes korlátok felismerését (Krogerus és Tschäppeler 2011).



4.3. ábra. A kilencpontos feladat és egy megoldása. A vonalak kilépnek a pontok négyzetéből, amit a feladat nem tiltott.

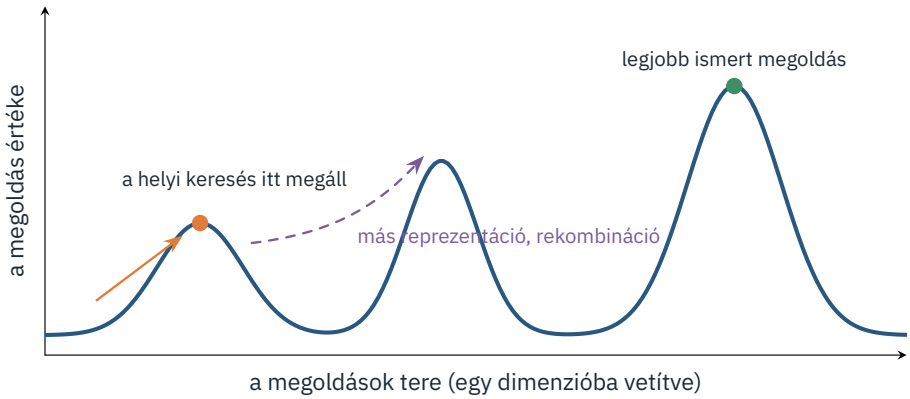
A döntési helyzetekben a rejtett korlátok jellemzően három forrásból erednek: a megszokásból („mindig is vásároltunk”), a jogosultság téves feltételezéséből („ezt úgysem engedi a pénzügy”) és a rendszerhatár túl szűk megválasztásából (2.3. szakasz). A gyakorlati eljárás: írjuk fel az összes korlátot, és mindegyik mellé azt, *ki és milyen dokumentumban* írja elő. Ami mellé nem tudunk forrást írni, az gyanús, hogy önkéntes korlát.

Próbáld ki: rejtett korlát feloldása

Egy rövid feladatlistában néhány korlátnak van forrása, néhánynak nincs. Jelöld meg, melyiket tartod valódinak, és oldd fel a forrás nélkülieket. Az alkalmazás megmutatja, milyen új megoldási utak nyílnak meg.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h04-kombinator.html#D32

4.5. Keresési stratégiák és csoportos problémamegoldás

Az alternatívák keresése felfogható úgy, mint egy **értéktájkép** bejárása: minden lehetséges megoldásnak van egy értéke, és a jó megoldásokat keressük (4.4. ábra). A legegyszerűbb stratégia a **helyi keresés** (*hill climbing*): egy kiinduló megoldásból apró módosításokkal mindig a jobb szomszéd felé lépünk. Ez gyors, de megáll az első helyi csúcson, ahonnan minden apró lépés rontana.



4.4. ábra. Értéktájkép és keresési stratégiák. A helyi keresés megáll az első csúcson; egy másik reprezentáció vagy két megoldás elemeinek kombinálása át tud lépni egy jobb régióba. Szemléltető ábra.

A helyi csúcsból három stratégia vezethet ki. Az **újrakeretezés** más reprezentációt választ, amelyben más megoldások számítanak „szomszédosnak”. A **rekombináció** két jó megoldás elemeit kombinálja; a morfológiai tábla

éppen ezt teszi rendszeresen. A **nézőpontváltás** más emberek reprezentációit és heurisztikáit hívja segítségül.

Lu Hong és Scott Page számítógépes modellje szerint bizonyos feltételek mellett egy sokféle heurisztikát használó csoport jobb megoldást talál, mint az egyénileg legjobb, de egymáshoz hasonló problémamegoldókból álló csoport (Hong és Page 2004). Az eredmény feltételekhez kötött: a problémának elég nehéznek kell lennie, a résztvevőknek egyenként is ügyesnek, és a csoportnak elég nagynak és sokfélének. A sokféleség tehát nem automatikusan előny, hanem *akkor* értékes, ha a résztvevők valóban eltérő reprezentációkat és heurisztikákat hoznak, és a csoport képes a megoldásokat egymásra építeni (Page 2007).

4.5.1. Nézőpontváltás a megbeszélésben

Mit látna ugyanebben az ötletben egy kételkedő?

Az új képzési ötletről mindenki lelkesen beszél, és senki sem hozza szóba a kockázatokat. A moderátor azt javasolja, hogy tíz percig mindenki csak a lehetséges nehézségeket gyűjtse.
A lényeg: Ha a csoport egyszerre csak egyféle szemszögből gondolkodik, a kimaradó szempontok tudatosan előhívhatók.
Kérdés: Melyik szemszögből vizsgálnád meg elsőként a saját ötletedet?
Szemléltető, kitalált helyzet · D48b · Próbáld ki: h04-kombinator

Edward de Bono *hat gondolkodó kalap* módszere szerint a csoport egyszerre egyféle gondolkodási módban dolgozik: tények és információk, érzések, kockázatok, előnyök, új ötletek, illetve a folyamat irányítása (Bono 1985). A módszer nem a résztvevők személyiségét sorolja be, hanem a megbeszélés menetét szervezi: elválasztja egymástól az ötletgyűjtést és a kritikát, és biztosítja, hogy a kockázatok és az előnyök egyaránt szóhoz jussanak. Empirikus alátámasztása korlátozott; *gyakorlati keretként* érdemes használni, nem igazolt hatékonyságú eljárásként. A tartós csapatszerepeket leíró Belbin-modellt a 26. fejezet tárgyalja, ott a két megközelítés különbségét is megvizsgáljuk.

Próbáld ki: nézőpontváltás egy ötleten

Válaszd ki az egyik gondolkodási szemszöget, és gyűjts hozzá kérdéseket és érveket egy képzési ötletről. Váltogasd a szemszögeket, és figyeld meg, hogyan bővül a lista.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h04-kombinator.html#D48b

4.6. Előszűrés és a lehetőségkészlet dokumentálása

A sok lehetőségből egy kezelhető rövidlistát kell készíteni. Az előszűrés két lépésből áll. Először a **kötelező korlátokat** alkalmazzuk: ami nem felel meg nekik, kiesik, akármilyen jó egyébként (7. fejezet). Másodszor a **dominált** lehetőségeket szűrjük ki: azokat, amelyeknél van egy másik lehetőség, amely minden szempontból legalább olyan jó, és legalább egy szempontból jobb. A dominált alternatívát nincs értelme tovább vizsgálni, mert bármilyen súlyozás mellett van nála jobb.

Az előszűrés eredményét dokumentálni kell. A **lehetőségkészlet naplója** minden vizsgált lehetőségnél rögzíti, hogy továbbment-e, és ha nem, miért: melyik korlátba ütközött, vagy melyik lehetőség dominálta. Ez két okból fontos. Egyrészt utólag is ellenőrizhető, hogy nem esett-e ki egy jó lehetőség elhamarkodottan. Másrészt ha a körülmények változnak (például enyhül egy korlát), a napló alapján tudjuk, mely lehetőségeket kell újra elővenni.

Átviteli példa: mobilitás szélesebb értelemben (CASE02)

A CASE02 eredeti kérdésére („melyik autót?”) a szervizosztály három autótípust javasolt, mindhárom hibrid, vásárlással. A morfológiai tábla és az újrakeretezés után a lehetőségkészlet kibővült: megjelent a bérlet, a megosztott használat, az elektromos hajtás és a mobilitási igény csökkentése is (például a heti hosszú út egy részének távmunkával való kiváltása). Az igénycsökkentés önálló alternatívaként nem teljesíti a napi feladatokat, ezért kiesett, de egy későbbi kiegészítő intézkedésként a döntési feljegyzésbe került.

Sok hasonló változat nem gazdag készlet

Öt, csak árában vagy színében eltérő változat nem öt valódi alternatíva. A rövidlista akkor jó, ha a jelöltek *szerkezetükben* különböznek, és a lehetőségek terének különböző részeiről érkeznek. A szokatlan ötletet sem szabad csak azért megtartani, mert szokatlan: a megvalósíthatóságát ugyanúgy vizsgálni kell, mint a megszokott megoldásokét.

Összefoglalás

- A döntés nem lehet jobb a legjobb megvizsgált alternatívánál; az alternatívák előállítása önálló, értékes lépés.
- Az újrakeretezés a kérdést a célokhoz közelíti, és ezzel tágítja a lehetőségek körét; a különböző reprezentációk más megoldásokat tesznek könnyen elérhetővé.
- A morfológiai tábla a megoldást független tulajdonságokra bontja, a kompatibilitási szabályok kizárják az összeférhetetlen kombinációkat.
- A SCAMPER hét kérdése egy meglévő megoldás elemeit módosítja szándékosan; heurisztikus kérdéssor, nem garancia.

- A rejtett korlátok olyan feltételek, amelyeket senki sem írt elő; a korlátok forrásának kifejezett megadása felszínre hozza őket.
- A helyi keresés megáll az első csúcson; az újrakeretezés, a rekombináció és a nézőpontváltás ki tud lépni belőle; a sokféleség feltételekhez kötött előny.
- Az előszűrés a kötelező korlátokat és a dominanciát alkalmazza, és a lehetőségkészlet naplója minden kizárás okát rögzíti.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség a morfológiai tábla és a SCAMPER szerepe között?
2. Miért nem érdemes egy dominált alternatívát tovább vizsgálni?
3. Egy morfológiai táblában három tulajdonság van 3, 4 és 2 változattal. Egy szabály kizárja az első tulajdonság első és a második tulajdonság első változatának együttes választását. Hány kombináció marad?
4. Fogalmazz meg a CASE07 kiinduló megoldására (jelenléti esti tanfolyam) egy „más célra használás” típusú SCAMPER-változatot!
5. Egy kolléga szerint a csoport sokfélesége mindig jobb megoldást eredményez. Milyen feltételeket hiányolnál ebből az állításból?

Megoldás.

1. A morfológiai tábla a lehetőségek egész terét rendszerezi független tulajdonságok és változataik kombinációjaként. A SCAMPER egy meglévő megoldásból indul ki, és annak egy-egy elemét változtatja meg, vagyis a tér szomszédos részeibe lép át.
2. Mert van egy másik alternatíva, amely minden szempontból legalább olyan jó, és legalább egyben jobb; így bármilyen nemnegatív súlyozás mellett legalább olyan jó lesz, mint a dominált, és egyikben jobb, tehát a dominált sosem lehet egyedüli nyertes.
3. $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ kombinációból a kizárt pár $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ kombinációt érint, így 22 marad.
4. Például: a résztvevők záróprojektje egy szakmai portfólió eleme lesz, amelyet az álláskeresésben is felhasználhatnak; vagy a tananyagból egy nyílt, önállóan is használható online modul készül.
5. A Hong–Page-eredmény feltételeit: a probléma legyen elég nehéz, a résztvevők egyenként is ügyesek legyenek, valóban eltérő reprezentációkat és heurisztikákat hozzanak, a csoport elég nagy legyen, és képes legyen a megoldásokat egymásra építeni. Ezek nélkül a sokféleség nem garantál jobb eredményt.

Továbbolvasás

- Ritchey, T. (2011): *Wicked Problems – Social Messes: Decision Support Modelling with Morphological Analysis.* Springer (Ritchey 2011).
- Keeney, R. L. (1992): *Value-Focused Thinking*, 7–8. fejezet – alternatívák létrehozása a célokból (Keeney 1992).
- Page, S. E. (2007): *The Difference.* Princeton University Press – reprezentációk, heurisztikák és a sokféleség (Page 2007).
- Hong, L., Page, S. E. (2004) – a sokféle problémamegoldók csoportjának modellje (Hong és Page 2004).

Gyakorlat

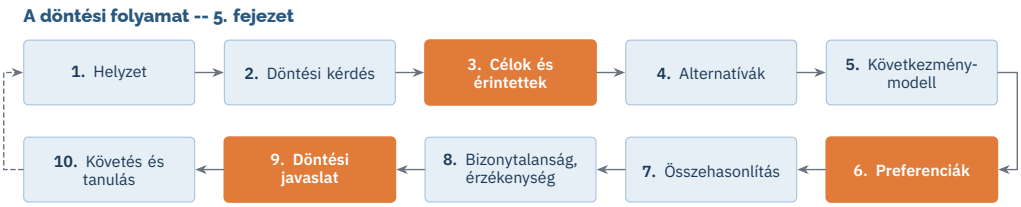
A Döntési műhely 4. műhelyében a kombinátorral (H04) elkészítheted a CASE07 vagy egy saját döntés morfológiai tábláját, kompatibilitási szabályokat adhatsz meg, és SCAMPER-kérdésekkel, rejtett korlátok feloldásával és nézőpontváltással bővítheted a lehetőségkészletet. A műhely leadandója a morfológiai tábla, a szabályok és az indokolt rövidlista.

II. rész – Személyes és stratégiai áttekintés

Pannon Egyetem
University of Pannonia

5.

Személyes célok, figyelem és prioritások



Mikor jut idő arra, ami fontos?

Viktor hétfő reggel, az első kávé mellett írja meg a heti listáját, és minden sora sürgősnek tűnik. A régóta tervezett mentorprogram kidolgozásának nincs közeli határideje, ezért negyedik hete csúszik. Péntek este megint azzal a kellemetlen érzéssel zárja a hetet, hogy a fontos dolgokra nem jutott idő.
A lényeg: Ha a fontosságot és a sürgősséget külön vizsgáljuk, tudatosan helyet teremthetünk a hosszabb távú céloknak.
Kérdés: Melyik feladatnak foglalnál most időt a következő hetedben?
Szemléltető, kitalált helyzet · F05 · Próbáld ki: h05-prioritas

A döntéshozatal nem csak nagy, egyszeri választásokból áll. A legtöbb döntésünk arról szól, mire fordítjuk a következő órát, napot vagy hetet. Ezek a kis döntések összeadódnak: egy félév, egy projekt vagy egy pálya alakulását nagyrészt az határozza meg, hogyan osztjuk el a figyelmünket és az időnket. Ez a fejezet a személyes döntéshozatal leggyakrabban használt kereteit mutatja be. Mindegyik egyszerű, könnyen megtanulható, és mindegyiknek megvan a maga korlátja; ezeket is ugyanolyan gondosan tárgyaljuk, mint a kereteket magukat.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- elkülöníteni a fontosságot és a sürgősséget, és heti tervet készíteni kapacitáskorláttal;
- megindokolni a feladatok átsorolását, és megkülönböztetni a célfontosságot az időigénytől;
- egy célt a Whitmore-féle kérdéssorral pontosítani;
- egy dilemmát a vonzó és a visszatartó tényezők, illetve az útelágazás kérdései alapján rendezni;
- értelmezni a kihívás és a készség illeszkedését, a figyelem időbeli irányát és a feladatok iránti viszonyunkat;
- a Pareto-elvet mérhető koncentrációként, adatfüggő arányként használni.

A fejezet első része az időbeosztással foglalkozik: az Eisenhower-mátrixszal és a megvalósítható heti tervvel. A második rész a célok tisztázásának eszközeit mutatja be, a harmadik a dilemmák rendezését. A negyedik rész a személyes teljesítmény három keretét vizsgálja, a fejezetet pedig a Pareto-elv kritikus olvasata zárja. A személyes keretek többsége *gondolkodási keret* az 1.2. szakasz értelmében: kérdéseket és elrendezést adnak, nem mérnek. A futó eset ebben a fejezetben a CASE05.

CASE05 – Egy dolgozó hallgató hete

Egy harmadéves hallgató heti húsz órában dolgozik egy mérnöki irodában. A következő hétre tizenkét tevékenységet sorol fel: zárthelyi dolgozat (3 nap múlva, 5 óra felkészülés), heti munkahelyi jelentés (holnap, 2 óra), szakdolgozat-fejezet vázlata (12 nap múlva, 6 óra), ösztöndíjpályázat (5 nap múlva, 4 óra), edzés (heti 3 óra), családi születésnap (6 nap múlva, 3 óra), nyelvvizsgára készülés (40 nap múlva, 3 óra), pihenés (3 óra), csoportmunka-egyeztetés (holnap, 1,5 óra), e-mailek (összesen 2,5 óra), rendrakás (2 óra) és egy online kurzus videói (3 óra). A munkán felül a hétre 23 szabad órája van. A tevékenységek összesen 38 órát igényelnének.

5.1. Sürgősség, fontosság és a megvalósítható hét

Mikor foglalkozol azzal, ami fontos?

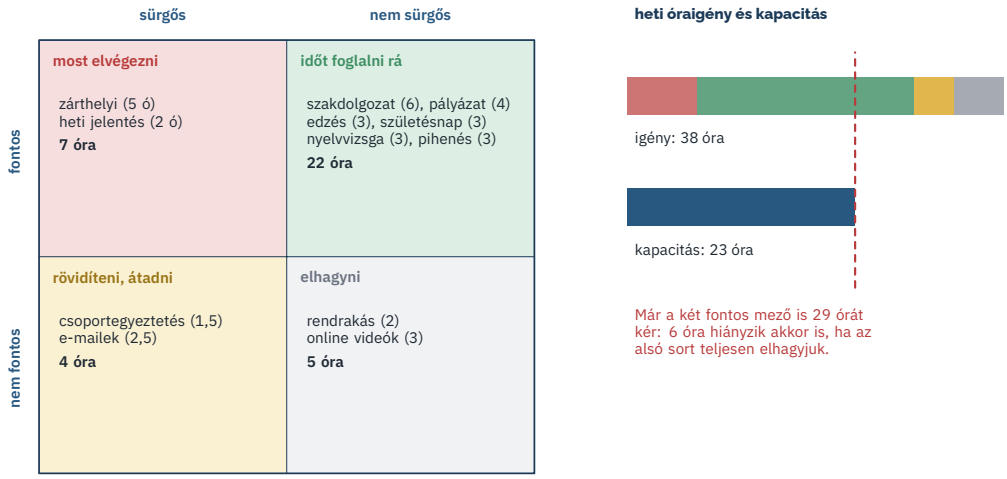
Egész nap üzenetekre válaszoltál és sürgős ügyeket intéztél. Este mégis ugyanaz a fontos fejlesztési feladat vár, amelyet hétfőn félretettél. Holnapra újabb megbeszélések kerültek a naptárba.
A lényeg: A sürgősség és a fontosság külön vizsgálata segíthet helyet teremteni a hosszabb távú céloknak.
Kérdés: Melyik fontos feladatnak foglalnál most időt a következő hetedben?
Szemléltető, kitalált helyzet · D01 · Próbáld ki: h05-prioritas

Az **Eisenhower-mátrix** két kérdést választ szét: *fontos-e* a feladat (hozzájárul-e egy megnevezett célhoz), és *sürgős-e* (közel van-e a határideje, figyelembe véve az előkészítési időt). A négy mező négy bánásmódot javasol: a fontos és sürgős feladatot most kell elvégezni; a fontos, de nem sürgős feladatnak időt kell foglalni; a sürgős, de nem fontos feladatot rövidíteni vagy átadni érdemes; ami egyik sem, azt el lehet hagyni (Covey és mtsai. 1994). A keretet Dwight D. Eisenhower nevéhez kötik, a széles körű elterjedése Stephen Covey és munkatársai könyveinek köszönhető.

A mátrix mögött egy kutatással is alátámasztott jelenség áll. Zhu, Yang és Hsee öt kísérletben mutatta ki, hogy az emberek akkor is hajlamosak a sürgős, de kisebb hasznú feladatot választani, ha az fontosabb feladattal szemben objektíven rosszabb; a hatás erősebb azoknál, akik általában elfoglaltnak érzik magukat, és gyengül, ha a feladatok várható haszna a választás pillanatában jól látható (Zhu és mtsai. 2018). A szerzők ezt a jelenséget *puszta sürgősségi hatásnak* (*mere urgency effect*) nevezik. Az Eisenhower-mátrix pontosan ezt a láthatóságot teremti meg: kényszerít, hogy a fontosságot külön is megkérdezzük.

A CASE05 tanulsága az 5.1. ábrán látható. A fontos és sürgős mezőben 7, a fontos, de nem sürgős mezőben 22 óra van: a két fontos mező együtt 29 órát kér, a hallgatónak viszont csak 23 szabad órája van. Az alsó sor (4 + 5 óra) elhagyása sem elég, *6 óra továbbra is hiányzik*. A mátrix tehát nem időterv. A második lépés a kapacitás ellenőrzése: a feladatokat napokra kell osztani, és ha nem férnek be, döntést kell hozni arról, mi tolódik. A hallgató itt a nyelvvizsgára készülést (40 nap múlva, 3 óra) halasztja a következő hétre, és a szakdolgozat-vázlat hat órájából hármat. Ez a döntés indokolható: mindkettőnek van tartaléka a határidőig.

> **Próbáld ki: prioritás és heti kapacitás**
>
> Előbb tippeld meg, hány óra hiányzik a CASE05 hetéből, ha az alsó sort teljesen elhagyjuk. Ezután változtasd a feladatok határidejét és fontosságát, és oszd el



5.1. ábra. A CASE05 tevékenységei az Eisenhower-mátrixban és a heti kapacitás. A mátrix elrendezi a feladatokat, de nem garantálja, hogy befférnek: a két fontos mező együtt is 29 órát kér a rendelkezésre álló 23 órával szemben.

őket a napokra. Az alkalmazás jelzi a túlterhelt napokat, és egy sürgős feladat hozzáadásakor megmutatja, mit kell átrendezni.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h05-prioritas.html#D01

A mátrix kitöltése nem időterv

A leggyakoribb hiba, hogy minden feladat a fontos mezőbe kerül, és a terv a rendelkezésre álló idő figyelembevétele nélkül készül. A fontosságot egy *megnevezett célhoz* kell kötni („a zárthelyi a félév teljesítéséhez kell”), a sürgősséget a *határidőhöz és az előkészítési időhöz*. Ha a feladatok száma nagy, vagy több erőforrás is korlátoz, a választás már optimalizálási feladat (13. fejezet).

5.2. Célok tisztázása

5.2.1. A Whitmore-féle kérdéssor

> **Mit akarsz valójában elérni?**
>
> A célod az, hogy „jobban beszélj angolul”. Fél év múlva sem tudod megmondani, haladtál-e, mert sosem derült ki, mit jelent a jobban, mikorra és mihez képest.
> **A lényeg:** Egy cél akkor irányít, ha tudjuk, hol tartunk most, mi a következő lépés, és miből látszik, hogy elértük.
> **Kérdés:** Hogyan fogalmaznád meg a saját célodat úgy, hogy egy hónap múlva ellenőrizhető legyen?
> Szemléltető, kitalált helyzet · D05 · Próbáld ki: h05-prioritas

John Whitmore coachingmodellje, a **GROW** négy kérdéscsoportból áll: *Goal* (mi a cél?), *Reality* (hol tartok most?), *Options* (milyen lehetőségeim vannak?) és *Will* (mit fogok tenni, mikor, és mennyire vagyok elkötelezett?) (Whitmore 2017). A *The Decision Book* a modellt a cél megfelelőségének vizsgálatára ajánlja (Krogerus és Tschäppeler 2011). Önmagában gyakorlati keret, de jól illeszkedik a célkitűzés kutatásaihoz: Locke és Latham évtizedes vizsgálatai szerint a konkrét, kihívást jelentő célok átlagosan jobb teljesítményhez vezetnek, mint a homályos „tedd a tőled telhetőt” típusú célok, feltéve, hogy a résztvevő elkötelezett, kap visszajelzést, és a feladat nem túlságosan összetett (Locke és Latham 2002).

A kérdéssor a döntéstámogatásban is használható: a „Reality” kérdés a viszonyítási alapot, az „Options” kérdés az alternatívákat, a „Will” kérdés a megvalósítás feltételeit tisztázza. A 2. fejezet döntési helyzetlapja ugyanezt a szerkezetet követi szervezeti léptékben.

> **Próbáld ki: egy homályos cél pontosítása**
>
> Írj be egy homályos célt, majd válaszolj a négy kérdéscsoportra. Az alkalmazás jelzi, hol hiányzik még a teljesíthetőség vagy az ellenőrizhetőség.
> Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h05-prioritas.html#D05

5.3. Dilemmák rendezése

5.3.1. Mi tart itt, és mi húz el?

Mi tart itt, és mi húz el?

Egy jó állásajánlatot kaptál egy másik városban. Hetek óta nem tudsz dönteni: hol a mostani csapatod, hol az új lehetőség tűnik fontosabbnak, attól függően, kivel beszéltél utoljára.
A lényeg: Egy dilemma rendezhetőbbé válik, ha a maradás és a váltás melletti tényezőket egymás mellé írjuk.
Kérdés: Melyik tényező változna meg, ha egy évre előre gondolkodnál?
Szemléltető, kitalált helyzet · D06 · Próbáld ki: h05-prioritas

A *The Decision Book* gumikötélmodellje két kérdést tesz fel egy dilemmában: *mi tart itt?* és *mi húz el?* (5.2. ábra) (Krogerus és Tschäppeler 2011). A keret szerzői heurisztika, nem mér, és nem dönt; arra jó, hogy a ki nem mondott tényezők papírra kerüljenek. Gyakran kiderül, hogy az egyik oldalon túlnyomórészt *meglévő* előnyök állnak (csapat, megszokott környezet), a másikon *várt* előnyök, amelyek bizonytalanok. Ez a felismerés a következő lépést is kijelöli: a várt előnyökről információt érdemes gyűjteni, például beszélni azokkal, akik már ott dolgoznak.



A két oldal felírása nem dönti el a kérdést, de láthatóvá teszi, melyik tényező mennyire fontos, és milyen információ hiányzik.

5.2. ábra. A gumikötélmodell: a maradás és a váltás mellett szóló tényezők egymás mellett. A keret láthatóvá teszi a tényezőket és az információhiányokat, de nem súlyoz.

Ha a tényezők súlya is kérdéses, a gumikötélmodell egyenes úton vezet a többkritériumos értékeléshez: a tényezőkből kritériumok lesznek, a „mennyire fontos” kérdésből súlyok (8. fejezet).

Próbáld ki: gumikötél

Írd fel a maradás és a váltás melletti tényezőket, jelöld, melyik meglévő és melyik várt, és melyikről hiányzik információ. Az alkalmazás összegzi, mi tűnik a dilemma valódi kérdésének.

Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h05-prioritas.html#D06

5.3.2. Az útelágazás kérdései

Honnan jössz, és merre mehetsz tovább?

A diploma előtt állsz, és három út kínálkozik: mesterképzés, egy biztos munkahely vagy egy kockázatos vállalkozás. Mindenki mást tanácsol, te pedig egyre kevésbé tudod, mi fontos neked.
A lényeg: A jövőbeli utak összevetése előtt érdemes tisztázni, mi vezetett ide, mi a fontos, és mi tart vissza.
Kérdés: Melyik értéked maradna meg mindhárom úton, és melyik csak az egyiken?
Szemléltető, kitalált helyzet · D12 · Próbáld ki: h05-prioritas

Az **útelágazási modell** a *The Decision Book* reflektív kérdéssora nagy, pályát érintő döntésekhez (Krogerus és Tschäppeler 2011). Öt kérdéscsoportot javasol: honnan jöttem (mi vezetett ide), mi fontos nekem (értékek), mi tart vissza (félelmek, korlátok), kik és mi befolyásol, és milyen utak állnak előttem. A keret gondolkodási eszköz; erőssége, hogy az alternatívák összevetése előtt az *értékekre* kérdez rá, ami Keeney értékfókuszú gondolkodásával rokon (2.1. szakasz). A kérdéssor válaszaiból két-három jövőbeli pályát érdemes kidolgozni, és ezeket ugyanazokon az értékeken összevetni.

Próbáld ki: két pálya összevetése

Válaszolj az útelágazás kérdéseire, majd fogalmazz meg két lehetséges pályát. Az alkalmazás a megadott értékek mentén egymás mellé teszi őket, és jelzi, melyik értéket melyik pálya szolgálja.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h05-prioritas.html#D12

5.4. Személyes teljesítmény és figyelem

5.4.1. Kihívás és készség: az áramlat

Mikor feledkezel bele a munkába?

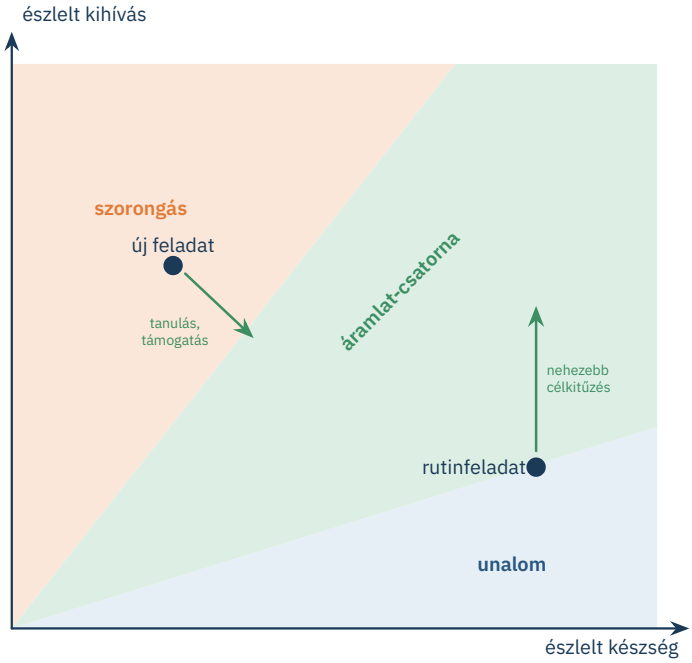
Az egyik feladatnál észre sem veszed, hogy eltelt két óra; a másiknál tízpercenként nézed az órát. Pedig mindkettő ugyanannak a projektnek a része.
A lényeg: A belefeledkezés jellemzően akkor jön létre, ha a kihívás és a készség illeszkedik egymáshoz.
Kérdés: Mit változtatnál a legunalmasabb feladatodon, hogy nagyobb kihívást jelentsen?
Szemléltető, kitalált helyzet · D13 · Próbáld ki: h05-prioritas

Mihály Csíkszentmihályi az **áramlat** (*flow*) élményét a teljes belefeledkezés állapotaként írta le, amely jellemzően akkor jön létre, ha a feladat világos célokat és azonnali visszajelzést ad, és a kihívás illeszkedik az észlelt készséghez (Csikszentmihalyi 1990). Ha a kihívás jóval meghaladja a készséget, szorongás, ha jóval alatta marad, unalom a jellemző (5.3. ábra). A modell kutatással alátámasztott, de az ábra csatornája *szemléltetés*: a zónák határai egyénenként és helyzetenként eltérnek.

A döntéshozatal szempontjából a modell a feladatok *kiosztásában* és *megfogalmazásában* hasznos. Egy szorongást keltő feladatot fel lehet bontani, mentort lehet mellé rendelni; egy unalmasat nehezebb célkitűzéssel vagy új felelősséggel lehet kiegészíteni. A 26. fejezet a csapaton belüli feladatkiosztásnál visszatér erre.

Próbáld ki: kihívás és készség

Állítsd be néhány feladatod kihívását és az észlelt készségedet. Az alkalmazás elhelyezi őket a szemléltető zónákban, és mindegyikhez javasol egy lehetséges módosítást.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h05-prioritas.html#D13



5.3. ábra. Az áramlat-csatorna. A kihívás és az észlelt készség illeszkedése; a nyilak két beavatkozási irányt mutatnak: egy új feladatnál tanulással és támogatással, egy rutinfeladatnál nehezebb célkitűzéssel lehet a csatorna felé mozdulni. Szemléltető ábra.

5.4.2. Hová irányul a figyelmed?

Mennyi időt töltesz a múlton rágódva?

Egy fontos döntés előtt állsz, de a gondolataid újra és újra egy korábbi kudarcnál kötnek ki. Közben a holnapi teendőkre alig marad figyelmed.
A lényeg: A figyelmünk időbeli iránya befolyásolja, mennyi energia jut a jelenlegi döntésre.
Kérdés: Ha a mai gondolataidat múltra, jelenre és jövőre osztanád, milyen arány jönne ki?
Szemléltető, kitalált helyzet · D20 · Próbáld ki: h05-prioritas

A *The Decision Book* energiamodellje azt javasolja, hogy figyeljük meg, gondolataink mekkora része irányul a múltra, a jelenre és a jövőre, és ez a figyelem építő vagy rágódó jellegű-e (Krogerus és Tschäppeler 2011). A keret szerzői heurisztika, nem mérőeszköz. Hasznossága abban áll, hogy egy rövid önmegfigyelési feladatot ad, amely után tudatosabban lehet a figyelmet a döntéshez szükséges információkra irányítani. A múltra irányuló figyelem nem eleve rossz: a 2.5. szakasz visszatekintése éppen a múlt tanulságainak célzott felhasználása. Az a rágódás, amely nem vezet új következtetéshez, viszont csak elveszi az energiát.

Próbáld ki: figyelemprofil

Oszd fel 100 pontot a múlt, a jelen és a jövő, illetve az építő és a rágódó gondolatok között. Az alkalmazás ellenőrzi az összeget, és rövid értelmezést ad a profilhoz. Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h05-prioritas.html#D20

5.4.3. Akarom, tudom, kell

Akarod, tudod vagy csak kell?

A hét végén visszanézed a feladataidat. Sok volt köztük olyan, amit csak muszájból csináltál, és kevés, amit szívesen és jól is tudsz végezni.
A lényeg: A feladatainkhoz való viszonyunk több hét alatt mintázatot rajzol, amely a fejlődési irányokat is kijelöli.
Kérdés: Melyik feladatodat végeznéd szívesen, ha jobban értenél hozzá?
Szemléltető, kitalált helyzet · D23 · Próbáld ki: h05-prioritas

A *The Decision Book* egyéni teljesítménymodellje szerint érdemes hetente végignézni a feladatainkat, és mindegyiknél megkérdezni: akarom-e, tudom-e, és kell-e csinálnom (Krogerus és Tschäppeler 2011). Több hét adatai alapján mintázat rajzolódik ki. Ha sok feladatot csak kell, de nem akarunk és nem

is tudunk jól végezni, az a feladatkör újragondolását jelezheti. Ha valamit akarunk, de még nem tudunk, az fejlődési cél. A keret szerzői heurisztika; a „tudom” rovat önértékelés, amely torzulhat (3.4. szakasz), ezért érdemes visszajelzéssel kiegészíteni.

Próbáld ki: három hét mintázata

Értékeld három hét feladatait az akarom–tudom–kell kérdésekkel. Az alkalmazás összesíti a mintázatot, és kiemeli a fejlődési és az átszervezési jelölteket.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h05-prioritas.html#D23

5.5. A Pareto-elv: mérhető koncentráció, nem állandó

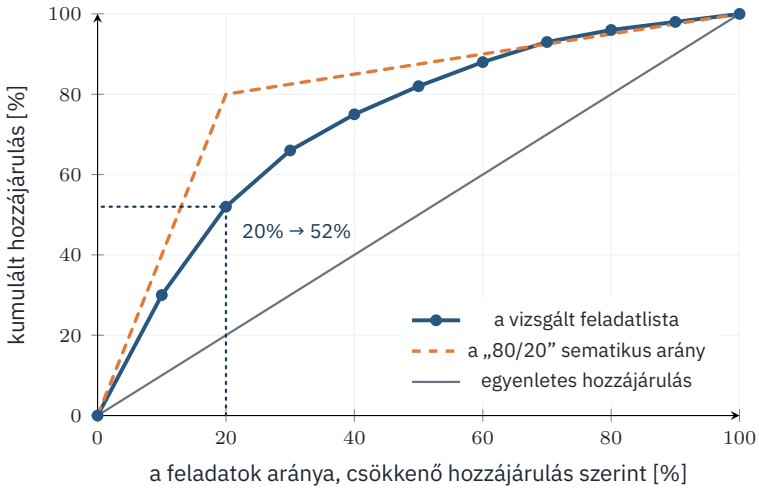
A feladatok ötöde adja az eredmény négyötödét?

Egy kolléga szerint a teendők húsz százaléka adja az eredmény nyolcvan százalékát, ezért elég a legfontosabbakra figyelni. Amikor megnézitek a saját listátokat, más arány jön ki.
A lényeg: A hozzájárulások gyakran koncentráltak, de a koncentráció mértéke adatfüggő, és mérni kell.
Kérdés: A te feladataid hány százaléka adja az eredmény felét?
Szemléltető, kitalált helyzet · D36 · Próbáld ki: h05-prioritas

A **Pareto-elv** Vilfredo Pareto olasz közgazdász megfigyeléséből ered, aki a jövedelmek és a földtulajdon erősen koncentrált eloszlását írta le. Joseph Juran minőségügyi szakember fogalmazta meg általános elvként, hogy a hibák nagy része néhány okra vezethető vissza („a létfontosságú kevés és a hasznos sok”) (Juran 1951). Innen ered a népszerű „80/20 szabály”.

A szabály hasznos figyelmeztetés, de nem természeti állandó. Mark Newman áttekintése szerint a hatványfüggvény-eloszlások sok területen előfordulnak, de a koncentráció mértéke eloszlásonként nagyon különböző, és sok jelenség egyáltalán nem követ ilyen eloszlást (Newman 2005). A gyakorlati használathoz a **kumulált hozzájárulási görbét** érdemes megrajzolni: a feladatokat csökkenő hozzájárulás szerint sorba rendezzük, és ábrázoljuk, hogy a feladatok adott hányada az eredmény mekkora részét adja (7.5. ábra).

A 7.5. ábra listájában a feladatok első 20%-a az eredmény 52%-át adja. A koncentráció tehát jelentős (az egyenletes eloszlás mellett 20% lenne), de messze nem 80%. A döntési következmény is más: itt nem elég a két legfontosabb feladatra figyelni, a következő három is lényeges. A hozzájárulás becslése ráadásul maga is bizonytalan; egy feladat értéke gyakran csak más feladatokkal együtt valósul meg (a szakdolgozat-vázlat csak akkor ér valamit, ha a fejezet is elkészül).



5.4. ábra. Kumulált hozzájárulási görbe egy tíz feladatból álló szemléltető listára. A feladatok 20%-a itt az eredmény 52%-át adja, nem 80%-át. A koncentráció mértéke adatfüggő; az egyenes az egyenletes hozzájárulást jelöli.

Próbáld ki: kumulált hozzájárulás

Becsüld meg a feladataid hozzájárulását egy kiválasztott célhoz. Az alkalmazás megrajzolja a kumulált görbét, és kiszámítja a tényleges koncentrációt: a feladatok hány százaléka adja az eredmény 50, illetve 80%-át.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h05-prioritas.html#D36

Átviteli példa: személyes projektválasztás

Egy szabadúszó grafikus három új megbízás és egy saját projekt között választ. A fontosság–sürgősség rendezés után kiderül, hogy a saját projekt fontos, de soha nem sürgős, ezért évek óta halasztja. Úgy dönt, hetente egy fél napot foglal rá, és egy kis próbával indul: egy hónap alatt elkészít egyetlen mintát, és megnézi a visszajelzéseket. A „kis próba” a 15. fejezet gondolatát előlegezi meg: ha a döntés bizonytalan, és van olcsó információszerzési lehetőség, érdemes előbb azt kihasználni.

Összefoglalás

- Az Eisenhower-mátrix a fontosságot (célhoz kötve) és a sürgősséget (határidőhöz és előkészítési időhöz kötve) választja szét; a puszta sürgősségi hatás kísérletileg is igazolt.
- A mátrix nem időterv: a feladatokat a rendelkezésre álló kapacitásra kell osztani, és a túlterhelést tudatos halasztással kell feloldani.

- A Whitmore-féle GROW-kérdéssor a célt, a jelenlegi helyzetet, a lehetőségeket és a vállalást tisztázza; a konkrét, kihívást jelentő célok átlagosan jobb teljesítményhez vezetnek.
- A gumikötél- és az útelágazási modell a dilemmák tényezőit és értékeit teszi láthatóvá; nem döntenek, de előkészítik a döntést.
- Az áramlat a kihívás és a készség illeszkedésénél jön létre; az energiamodell és az akarom–tudom–kell keret önmegfigyelési eszköz.
- A Pareto-elv hasznos figyelmeztetés a koncentrációra, de a koncentráció mértéke adatfüggő; a kumulált hozzájárulási görbével kell mérni.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség a fontosság és a sürgősség között az Eisenhower-mátrixban?
2. Miért nem oldja meg a CASE05 túlterhelését az alsó sor elhagyása?
3. Egy hétre 18 óra szabad idő jut. A fontos és sürgős feladatok 6, a fontos, nem sürgős feladatok 15 órát igényelnek. Hány órát kell halasztani a fontos feladatokból, és milyen szempont szerint választanál?
4. Egy tízelemű listában a hozzájárulások: 25, 20, 15, 10, 8, 7, 6, 4, 3, 2. Hány százalékát adja az eredménynek a feladatok első 20%-a?
5. Egy vezető azt javasolja, hogy a csapat minden tagja töltse ki az áramlatmodellt, és aki „unalom” zónába kerül, annak csökkentsék a fizetésemelését. Mi a probléma ezzel?

Megoldás.

1. A fontosság azt méri, hozzájárul-e a feladat egy megnevezett célhoz; a sürgősség azt, hogy a határidő és az előkészítési idő mennyire szorít. Egy feladat lehet fontos és nem sürgős (szakdolgozat 12 nap múlva), vagy sürgős és nem fontos (egy csoportegyeztetés, amelyet más is elvégezhet).
2. Mert a két fontos mező együtt is 29 órát igényel, a kapacitás pedig 23 óra; 6 óra a fontos feladatokból is hiányzik.
3. $6 + 15 - 18 = 3$ órát. Azokat érdemes halasztani, amelyeknek a legtöbb a tartaléka a határidőig, és amelyek halasztása nem akadályoz más feladatot.
4. A lista első két eleme $25 + 20 = 45$, az összeg 100, tehát 45%.
5. Az áramlatmodell szemléltető gondolkodási keret, nem érvényes teljesítménymérés; az „unalom” zóna inkább azt jelzi, hogy a feladat nem illeszkedik a készséghez, vagyis a feladatkiosztáson kellene változtatni. Az önértékelés ráadásul torzulhat, és ha következménye van, a válaszadók stratégiailag töltik ki.

Továbbolvasás

- Zhu, M., Yang, Y., Hsee, C. K. (2018): The mere urgency effect – kísérleti bizonyíték a sürgősség túlsúlyára (Zhu és mtsai. 2018).
- Locke, E. A., Latham, G. P. (2002) – a célkitűzés elméletének összefoglalása (Locke és Latham 2002).
- Whitmore, J. (2017): *Coaching for Performance* – a GROW-modell (Whitmore 2017).
- Csikszentmihalyi, M. (1990): *Flow* – az áramlat élménye (Csikszentmihalyi 1990).

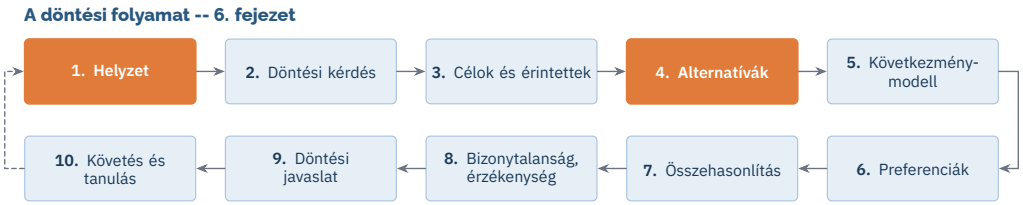
- Newman, M. E. J. (2005) – hatványfüggvények és Pareto-eloszlások, a koncentráció mérése (Newman 2005).

Gyakorlat

A Döntési műhely 5. műhelyében a prioritási alkalmazással (H05) elkészítheted a CASE05 vagy a saját heted prioritási térképét és hétnapos kapacitástervét, és kipróbálhatod a fejezet többi keretét. Az E05 munkafüzet a heti kapacitástervet táblázatosan kezeli, és jelzi a túlterhelt napokat.

6.

Stratégiai helyzetkép és portfóliógondolkodás



Minden jó ötlet belefér a keretbe?

Klára vezeti az intézet stratégiai műhelyét, ahol a lelkes csapat nyolc jó projektet jelöl meg zölddel. Este, a pénzügyi terv összeállításakor derül ki, hogy együtt a keret kétszeresébe kerülnének. Másnap reggel neki kell elmondania, hogy nem fér bele minden.

A lényeg: A projektek egyenkénti vonzereje mellett az együtt megvalósítható csomagot is értékelni kell.

Kérdés: Melyik projektkombinációt vizsgálnád meg először, és milyen korlátot ellenőriznél?

Szemléltető, kitalált helyzet · F06 · Próbáld ki: h06-portfolioterkep

A szervezeti döntések egy része nem egyetlen lehetőség kiválasztása, hanem egy helyzetkép megfogalmazása és abból irányok kijelölése. A stratégiai elemzés eszközei, a SWOT, a portfóliómátrixok és a technológiai görbék, a menedzsment legszélesebb körben használt keretei közé tartoznak. Népszerűségük nem véletlen: egyszerűek, vizuálisak, és jó beszélgetést indítanak. Ugyanakkor könnyű velük többet állítani, mint amit az adatok megengednek. Ez a fejezet azt mutatja meg, hogyan lehet a stratégiai kereteket bizonyítékokkal alátámasztani, a tengelyeiket pontosan definiálni, és a helyzetképből konkrét, a következő fejezetekben értékelhető döntési alternatívákat előállítani.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- bizonyítékot rendelni egy helyzetelemzés állításaihoz, és elkülöníteni a belső adottságot a külső körülménytől;
- helyesen definiálni és értelmezni egy portfóliómátrix tengelyeit, és megnevezni, mit nem árul el az ábra;
- egy projekt elhelyezkedését összevetni a tényleges erőforrásigényével;
- elkülöníteni a várakozást a bizonyított használhatóságtól egy új technológia megítélésekor;
- megvizsgálni egy piaci rés mögötti keresletet;
- egy stratégiai dilemmát konkrét, összevethető döntési alternatívákká alakítani.

A fejezet a SWOT-elemzéssel kezd, amely a stratégiai helyzetkép leggyakoribb kerete. Ezután a portfóliómátrixok következnek: a BCG-mátrix és a projektportfólió-mátrix, a CASE03 nyolc projektjével. A harmadik szakasz a pozicionálás kereteit (piaci rés, tengelyválasztás) tárgyalja, a negyedik a technológiai várakozások és a tényleges elterjedés különbségét. A fejezet azzal zárul, hogyan lesz a helyzetképből döntési alternatíva.

6.1. SWOT: a megállapítások bizonyítékai

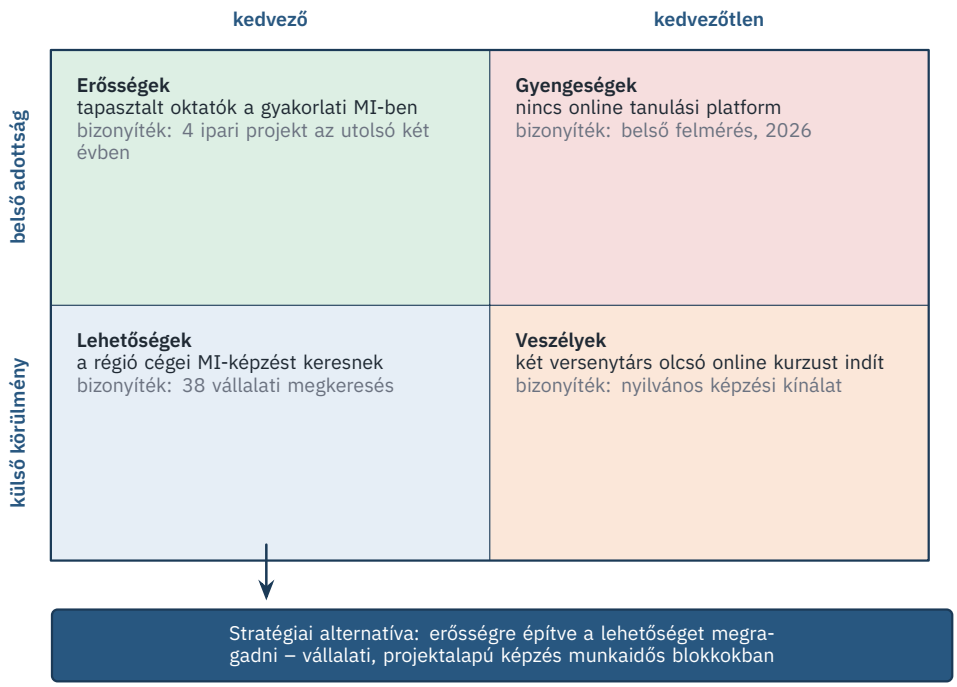
Mire alapozod az erősségeidet?

A stratégiai műhelyen húsz cetli kerül a falra: erősségek, gyengeségek, lehetőségek, veszélyek. Amikor valaki megkérdezi, melyik állítás mögött van adat, a lista a felére zsugorodik.
A lényeg: Egy helyzetelemzés akkor ad alapot a döntésre, ha az állításai bizonyítékokon nyugszanak, és belőlük konkrét alternatívák következnek.
Kérdés: Melyik erősségedet tudnád egy konkrét adattal alátámasztani?
Szemléltető, kitalált helyzet · D02 · Próbáld ki: h06-portfolioterkep

A **SWOT** (*strengths, weaknesses, opportunities, threats*) a belső erősségeket és gyengeségeket, valamint a külső lehetőségeket és veszélyeket rendezi négy mezőbe. Puyt, Lie és Wilderom levéltári kutatása szerint a módszer elődje a Stanford Research Institute-ban, Robert F. Stewart vezetésével kidolgozott SOFT-megközelítés volt, amelyben a vezetők a saját egységük tervezési kérdéseit bizonyítékokkal alátámasztva sorolták be, és az érintettek igényeit is figyelembe vették (Puyt és mtsai. 2023). Az eredeti eljárás tehát részvételi és bizonyítékalapú volt; a mai gyakorlatban ebből gyakran csak a négy mező maradt meg.

Helms és Nixon szakirodalmi áttekintése szerint a SWOT legfőbb gyengeségei a túlzott általánosság, a súlyozás és a rangsorolás hiánya, valamint az, hogy a megállapításokból ritkán következnek konkrét lépések (Helms és Nixon 2010). Ezeket három egyszerű szabállyal lehet kezelni:

1. **Minden állításhoz bizonyíték tartozik** (adat, dokumentum, megfigyelés), forrással és dátummal; ami nem támasztható alá, az hipotézis, és annak jelöljük (6.1. ábra).
2. **A belső és a külső szétválasztása**: a belső adottságokat a szervezet befolyásolhatja, a külső körülményeket nem, csak reagálhat rájuk. A „jó a földrajzi helyzetünk” belső adottság; a „a régióban nő az MI-képzés iránti kereslet” külső körülmény.
3. **A mezők párosítása alternatívákká**: az erősség és a lehetőség párosítása támadó, a gyengeség és a veszély párosítása védekező stratégiát sugall. Ebből lesznek a döntési alternatívák.



6.1. ábra. SWOT-elemzés bizonyítékokkal és a belőle levezetett stratégiai alternatívával. Az erősség és a lehetőség párosítása egy konkrét, értékelhető javaslatot ad.

Próbáld ki: helyzetállítások besorolása

Sorold be a megadott helyzetállításokat a négy mezőbe, és adj meg mindegyikhez bizonyítékot. Az alkalmazás jelzi a bizonyíték nélküli állításokat, és a párosításokból javaslatot tesz egy-egy stratégiai alternatívára.

Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h06-portfolioterkep.html#D02

6.2. Portfóliómátrixok

6.2.1. A BCG-mátrix és a tengelyek értelmezése

Fejőstehén vagy döglött kutya?

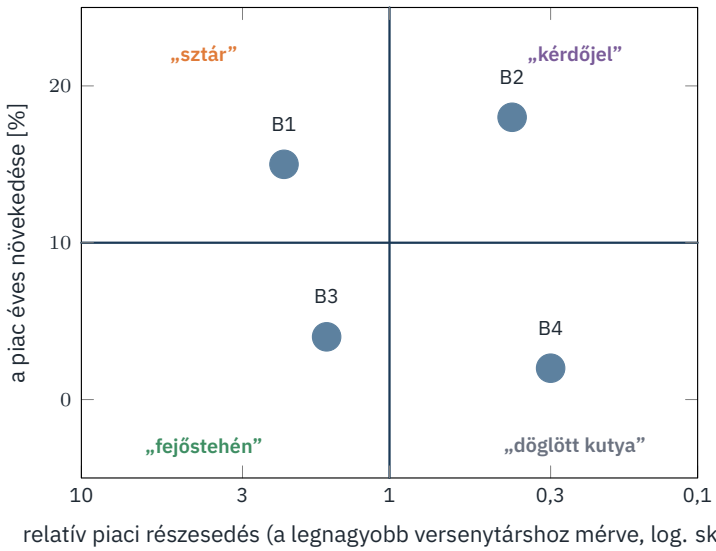
Egy cég négy üzletágát egy színes ábrán helyezik el. Az egyik „döglött kutya" címkét kap, és felmerül, hogy meg kellene szüntetni. Valaki megkérdezi: mit mértek a két tengelyen pontosan?
A lényeg: A portfóliómátrix ajánlása csak akkor érvényes, ha a tengelyek az eredeti definíciót követik, és az ábra mögötti feltevések teljesülnek.
Kérdés: Milyen adat kellene ahhoz, hogy egy üzletágat valóban „fejőstehénnek" nevezz?
Szemléltető, kitalált helyzet · D03 · Próbáld ki: h06-portfolioterkep

A **BCG-mátrixot** a Boston Consulting Group alapítója, Bruce Henderson mutatta be az 1970-es évek elején (Henderson 1970). A két tengely pontosan definiált (6.2. ábra): a vízszintes a **relatív piaci részesedés** (a saját részesedés és a legnagyobb versenytárs részesedésének aránya, jellemzően logaritmikus skálán), a függőleges a **piac éves növekedési üteme**. A tengelyek választása egy közgazdasági feltevésen alapul: a nagy relatív részesedés a tapasztalati görbén keresztül költségelőnyt és erős pénztermelő képességet jelez, a gyorsan növekvő piac pedig sok befektetést igényel. A négy mező elnevezése („sztár", „kérdőjel", „fejőstehén", „döglött kutya") ezekből a feltevésekből következik.

A mátrix ezért csak akkor érvényes, ha a feltevései teljesülnek. Ahol a költségek nem csökkennek számottevően a volumennel, vagy ahol a piaci részesedés nem jár együtt a jövedelmezőséggel, ott a mezők elnevezése félrevezető lehet. Hambrick, MacMillan és Day a PIMS-adatbázis üzletágain azt találták, hogy a négy csoport valóban eltérő jellemzőket mutat, de a mátrixból levont egyszerű stratégiai előírások nem minden helyzetben teljesülnek (Hambrick és mtsai. 1982). Egy „döglött kutya" üzletág lehet nyereséges, stratégiailag fontos, vagy más üzletágak működésének feltétele.

A tengelyek tetszőleges cseréje

Gyakori, hogy a BCG-mátrix tengelyeit más szempontokra cserélik (például „vonzerő" és „képesség"), de a mezők elnevezését és ajánlásait megtartják. Ilyenkor a négy mező értelmezése elveszíti az alapját, mert a „fejőstehén" elnevezés a relatív részesedés és a lassú piac közgazdasági következményeiből ered. Más tengelyekhez más értelmezés tartozik, és azt külön meg kell indokolni.



6.2. ábra. A BCG-mátrix a pontosan definiált tengelyekkel. A relatív piaci részesedés logaritmikus skálán, az 1-es érték a legnagyobb versenytárssal azonos részesedést jelenti. Szemléltető üzletágak (B1–B4).

Próbáld ki: BCG-besorolás

Változtasd egy üzletág relatív piaci részesedését és a piac növekedését. Figyeld meg, hogyan változik a besorolás, és milyen feltételes stratégiai kérdést javasol az alkalmazás. A tengelycsere gombbal azt is megnézheted, mi történik, ha a tengelyeket más szempontokra cseréljük.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h06-portfolioterkep.html#D03

6.2.2. Projektportfólió: helyzet és erőforrás

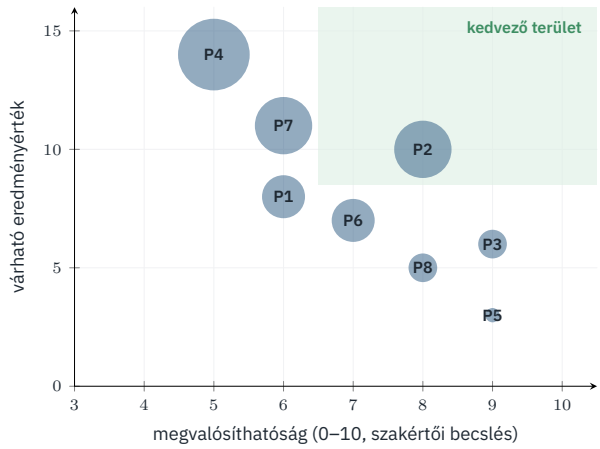
Jó helyen áll, de belefér-e?

A projektportfólió-ábrán egy projekt a kedvező sarokban áll: nagy hatás, jó megvalósíthatóság. Csak az nem látszik az ábrán, hogy a teljes éves fejlesztési kapacitás harmadát igényelné.
A lényeg: Egy portfólióábra a projektek helyzetét mutatja meg, a finanszírozhatóságukat nem.
Kérdés: Melyik projektet vizsgálnád meg újra, ha a költséget is látnád?
Szemléltető, kitalált helyzet · D04 · Próbáld ki: h06-portfolioterkep

A **projektportfólió-mátrix** két tengelyen, jellemzően a várható hatás és a megvalósíthatóság mentén helyezi el a projekteket (Krogerus és Tschäppeler 2011). A buborék mérete egy harmadik dimenziót, például a költséget jelölheti. Az ábra jól mutatja, mely projektek vonzóak egyenként, de két fontos dolgot elrejt: a **közös erőforráskorlátot** és a projektek közötti **függőségeket**.

CASE03 – Nyolc fejlesztési projekt

Egy szervezet nyolc fejlesztési projektből (P1–P8) választ. Mindegyikhez ismert a költség (1–5 egység), a munkaóra-igény, a várható eredményérték és a fenntarthatósági hozzájárulás. A költségkeret 12, a munkaóra-keret 15 egység. P4 csak P2-vel együtt valósítható meg, P1 és P7 pedig kizárja egymást. A nyolc projekt együtt 24 egységbe kerülne, a keret kétszeresébe. Az adatok szintetikusak.



A buborék mérete a költség (1–5 egység).

A nyolc projekt együtt 24 egységbe kerülne, a keret 12. A legnagyobb eredményt ígérő P4 egymaga a keret több mint 40%-át igényli, és a kedvező területen kívül esik; a csomag kiválasztása külön feladat (13. fejezet).

6.3. ábra. A CASE03 projektjei a megvalósíthatóság és a várható eredményérték terében; a buborék mérete a költség. Az ábra a projektek egyenkénti vonzerejét mutatja, a keret és a függőségek nem látszanak rajta.

A 6.3. ábrán a legnagyobb eredményt a P4 ígéri, de egymaga a keret 42%-át igényli, és csak P2-vel együtt valósítható meg; a kettő együtt a keret háromnegyede. A kedvező területen álló projektek egyenként vonzóak, de hogy melyik *csomag* fér bele a keretbe, és melyik adja a legtöbb eredményt, azt az ábráról nem lehet leolvasni. Ez optimalizálási kérdés, amelyet a 13. fejezetben teljes felsorolással oldunk meg. Ott kiderül, hogy a legjobb csomag (P2 + P3 + P4 + P5) éppen kimeríti mindkét keretet, és egyik eleme, a P5, az ábrán a legkevésbé feltűnő projekt.

Próbáld ki: portfóliótérkép és keret

Mozgasd a projekteket a két tengelyen, és jelöld ki azokat, amelyeket megvalósítanál. Az alkalmazás összeadja a kijelölt projektek költségét és munkaóráját, és jelzi, ha a csomag túllépi a keretet vagy sért egy függőséget.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h06-portfolioterkep.html#D04

6.3. Pozicionálás: tengelyválasztás és piaci rés

6.3.1. Pozicionálási térképek

Ugyanazok a márkák, másik térkép

Egy marketingcsapat hat márkát helyez el az „ár” és a „minőség” tengelyén: két tömb rajzolódik ki. Ha a tengelyeket „klasszikus–divatos” és „egyéni–tömeges” párosra cserélik, egészen más csoportok jönnek létre.
A lényeg: A pozicionálási térkép mintázatát a tengelyek választása határozza meg; a kép nem a piac tulajdonsága, hanem egy nézőpont.
Kérdés: Melyik két tengelyt választanád, hogy a saját termékedet a legjobban elkülönítsd?
Szemléltető, kitalált helyzet · D19 · Próbáld ki: h06-portfolioterkep

A *The Decision Book* több pozicionálási keretet is bemutat, köztük a divatmodellt, amely a trendek időbeli megjelenését és a megjelenés jellegét vetíti két tengelyre (Krogerus és Tschäppeler 2011). Az ilyen térképek szemléltető eszközök: a tengelyek szubjektív szempontok, és a pontok elhelyezése legtöbbször értelmezés, nem mérés. Hasznuk abban rejlik, hogy egy vitát indítanak arról, mi különbözteti meg a szereplőket. A legfontosabb tanulságuk módszertani: ugyanazok a szereplők más tengelyeken más csoportokat alkotnak, ezért egy térképből levont következtetés mindig a tengelyválasztástól függ. Ugyanez a tanulság a többkritériumos értékelésre is érvényes: a kritériumok kiválasztása már befolyásolja az eredményt (7. fejezet).

Próbáld ki: tengelycsere a pozicionálásban

Hat szintetikus márka több tulajdonsággal rendelkezik. Válassz ki két tengelyt, és figyeld meg, hogyan rendeződnek a márkák. Válts tengelypárt, és nézd meg, mely csoportosítás marad stabil, és melyik tűnik el.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h06-portfolioterkep.html#D19

6.3.2. A piaci rés és az igazolandó kereslet

Üres a hely, vagy nincs rá igény?

A pozicionálási térképen egy sarok üresen áll: senki sem kínál olcsó, mentorált, esti képzést. A csapat lelkes, amíg valaki fel nem veti, hogy a sarok talán azért üres, mert senki sem keres ilyet.
A lényeg: Egy üres pozíció csak akkor lehetőség, ha igazolható kereslet áll mögötte.
Kérdés: Milyen egyszerű próbával ellenőriznéd, hogy valaki valóban fizetne-e érte?
Szemléltető, kitalált helyzet · D46 · Próbáld ki: h06-portfolioterkep

A **piaci rés** modellje szerint egy versenytérkép üres területei új lehetőségeket jelezhetnek (Krogerus és Tschäppeler 2011). A gondolat vonzó, de egy erős feltevésen nyugszik: hogy az üres területen van kereslet, amelyet eddig senki sem elégített ki. Egy terület azonban több okból is üres lehet: mert senki sem gondolt rá (valódi rés), mert valaki megpróbálta és megbukott, vagy mert a kombináció önellentmondásos (például „prémium és a legolcsóbb"). A döntési következmény egyértelmű: a piaci rés felfedezése *hipotézis*, amelyet kis próbával, például egy próbaregisztrációval vagy egy pilottal érdemes igazolni, mielőtt nagy befektetés követné. A 15. fejezet megmutatja, mennyit ér egy ilyen próba.

Próbáld ki: üres tér és igazolt kereslet

Helyezz el szintetikus versenytársakat egy térképen, és add meg a különböző területekre becsült keresletet. Az alkalmazás megkülönbözteti az üres, igazolt keresletű és az üres, igazolatlan területeket.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h06-portfolioterkep.html#D46

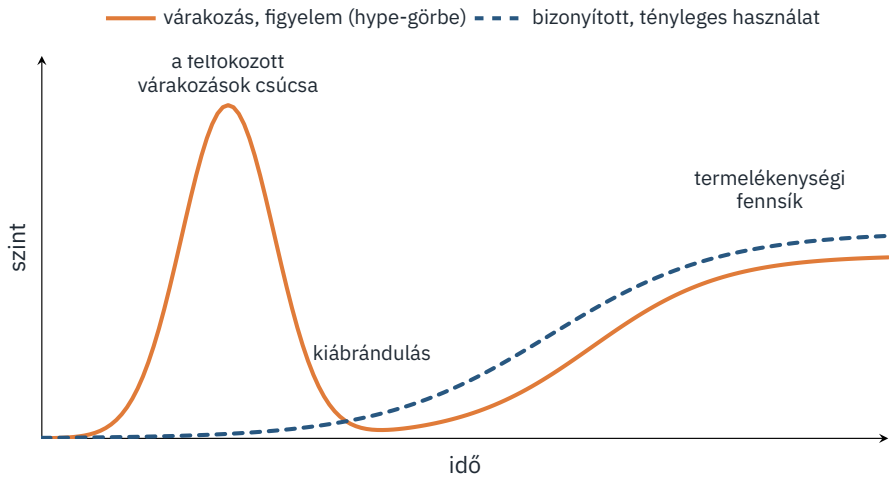
6.4. Technológiai várakozás és tényleges elterjedés

Most kell beszállni, vagy várni?

Egy új technológiáról minden konferencián beszélnek, és a versenytársak sajtóközleményekben jelentik be a bevezetését. Egy év múlva a lelkesedés lecseng, a valódi alkalmazások pedig csak lassan szaporodnak.
A lényeg: A figyelem és a várakozás görbéje nem azonos a bizonyított, tényleges használat görbéjével.
Kérdés: Milyen jelből ismernéd fel, hogy egy technológia túljutott a felfokozott várakozásokon?
Szemléltető, kitalált helyzet · D26 · Próbáld ki: h21-terjedes

A **hype-görbe** (*hype cycle*) a Gartner elemzőcég modellje, amely egy új technológia körüli várakozások jellegzetes pályáját írja le: a felfokozott várakozások csúcsát a kiábrándulás völgye, majd fokozatos javulás és egy termelékenységi fennsík követi (Fenn és Raskino 2008). A modell az üzleti gyakorlatban széles körben ismert. Dedehayir és Steinert szakirodalmi áttekintése szerint azonban az empirikus vizsgálatok vegyes képet mutatnak: a görbe alakja technológiánként eltér, és sok technológia nem követi a jellegzetes mintázatot (Dedehayir és Steinert 2016).

A döntéshozó számára a legfontosabb a két görbe szétválasztása (6.4. ábra): a *várakozás és figyelem* görbéje (hírek, befektetések, konferencia-előadások) gyakran megelőzi és meghaladja a *bizonyított, tényleges használat* görbéjét. Egy bevezetési döntés a második görbére kell, hogy épüljön. A hype-görbe ezért *nem időpont-előrejelzés*: nem mondja meg, mikor ér egy technológia a fennsíkra, és azt sem, hogy egyáltalán eléri-e. A tényleges elterjedés mechanizmusait, a diffúziót és a küszöbhatásokat a 21. fejezet tárgyalja.



6.4. ábra. A várakozás és a bizonyított használat két görbéje szemléltető alakkal. A bevezetési döntéshez a tényleges használatot jelző adatok kellenek, nem a figyelem csúcsa.

Próbáld ki: várakozás és tényleges használat

Válassz egy várakozási narratívát, és tedd mellé a tényleges használatot jelző görbét. Az alkalmazás megmutatja, milyen adatok különböztetik meg a kettőt, és mikor félrevezető a figyelem alapján dönteni.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h21-terjedes.html#D26

6.5. A helyzetképtől a döntési alternatíváig

A stratégiai keretek a döntési folyamat elején állnak: helyzetképet adnak, és ebből alternatívákat lehet levezetni. Egy jól használt stratégiai elemzés kimenete ezért nem egy színes ábra, hanem **két-három konkrét, összevethető alternatíva**, mindegyik a saját feltevéseivel. A SWOT párosításaiból, a portfólióábra vonzó projektjeiből és a piaci résekből jelöltek lesznek, amelyeket a következő fejezetek többkritériumos módszereivel lehet értékelni, és amelyek csomagjait a 13. fejezetben optimalizáljuk.

Az átmenetnél két dologra kell figyelni. Az ábrákból levont állítások korlátait le kell írni: mit mutat az ábra, és mit nem. A tengelyek mérési szabályát és a mérés időpontját is rögzíteni kell, mert egy portfóliótérkép egy év múlva már mást mutathat. A 22.3.1. szakaszban a hosszú farok modelljénél látni fogjuk, hogy a sok kis hozzájárulás együtt is jelentős lehet, ezért a portfólió kis tételeit sem szabad automatikusan elhanyagolni.

Átviteli példa: új képzés bevezetése (CASE07)

Az egyetem SWOT-elemzéséből a vállalati, projektalapú képzés alternatívája következik (6.1. ábra). A keresletről két feltevés van: egy optimista (a 38 vállalati megkeresésből 15 szerződés lesz) és egy visszafogott (5 szerződés). A két forgatókönyv két külön alternatívát indokol: egy teljes programindítást és egy kisebb, pilotként induló változatot. A kettő között a 14. és a 15. fejezet eszközeivel lehet választani, figyelembe véve, mennyit ér a pilot által szerzett információ.

Összefoglalás

- A SWOT akkor ad döntési alapot, ha minden állítása bizonyítékon nyugszik, a belső adottságot elválasztja a külső körülménytől, és a mezők párosításából alternatívákat vezet le.
- A BCG-mátrix tengelyei pontosan definiáltak (relatív piaci részesedés, piaci növekedés); a mezők elnevezése ezekből a közgazdasági feltevésekből következik, ezért a tengelyek tetszőleges cseréje érvényteleníti az értelmezést.
- A projektportfólió-ábra a projektek egyenkénti vonzerejét mutatja; a közös erőforráskorlát és a függőségek miatt a csomag kiválasztása külön feladat.
- A pozicionálási térkép mintázata a tengelyválasztástól függ; a piaci rés hipotézis, amelyet a kereslet igazolásával kell ellenőrizni.
- A hype-görbe a várakozások pályáját írja le, nem időpont-előrejelzés; a bevezetési döntéshez a tényleges használat adataira kell támaszkodni.
- A stratégiai elemzés kimenete két-három konkrét, összevethető alternatíva, a feltevéseivel és az ábrákból levont állítások korlátaival együtt.

Önellenőrzés

1. Miért fontos a SWOT-elemzésben a belső adottság és a külső körülmény szétválasztása?
2. Mit mér pontosan a BCG-mátrix vízszintes tengelye, és miért logaritmikus a skála?
3. A CASE03-ban a P2 és a P4 együtt hány egység költséget és munkaórát igényel? Mennyi marad a keretből a többi projektre?
4. Egy szolgáltatás a pozicionálási térkép üres sarkában állna. Sorolj fel két okot, amiért a sarok üres lehet, és egy próbát a kereslet igazolására!
5. Egy kolléga szerint a hype-görbe alapján egy technológia két év múlva eléri a fennsíkot, ezért most kell beszállni. Mit vetnél ellen?

Megoldás.

1. Mert a belső adottságokat a szervezet befolyásolhatja, a külső körülményekre csak reagálhat; a kettő más típusú intézkedést kíván, és a párosításukból adódnak a stratégiai alternatívák.
2. A saját piaci részesedés és a legnagyobb versenytárs részesedésének arányát. A logaritmikus skála azért indokolt, mert az arány több nagyságrendet ölelhet fel, és a 0,5 és a 2 ugyanolyan távolságra van az 1-től.
3. Költség $4 + 5 = 9$, munkaóra $4 + 6 = 10$; a keretből 3 költség- és 5 munkaóra-egység marad a többi projektre.
4. Például: senki sem keres ilyen szolgáltatást; vagy valaki már megpróbálta, és nem volt jövedelmező; vagy a kombináció önellentmondásos. Próba: egy rövid, valós ajánlattal meghirdetett próbaregisztráció vagy egy kis pilotcsoport.
5. A hype-görbe nem időpont-előrejelzés; sok technológia nem követi a jellegzetes mintázatot, és az empirikus alátámasztás vegyes. A beszállás időzítését a tényleges használat adataira, a saját alkalmazási esetünk igazolására és a várakozás értékére kell alapozni.

Továbbolvasás

- Puyt, R. W., Lie, F. B., Wilderom, C. P. M. (2023): The origins of SWOT analysis – a módszer eredete és részvételi, bizonyítékalapú változata (Puyt és mtsai. 2023).
- Helms, M. M., Nixon, J. (2010) – a SWOT-kutatások áttekintése és a módszer korlátai (Helms és Nixon 2010).
- Hambrick, D. C., MacMillan, I. C., Day, D. L. (1982) – a BCG-mátrix empirikus vizsgálata (Hambrick és mtsai. 1982).
- Dedehayir, O., Steinert, M. (2016) – a hype-görbe modelljének áttekintése (Dedehayir és Steinert 2016).

Gyakorlat

A Döntési műhely 6. műhelyében a portfóliótérkép-alkalmazással (H06) a SWOT-besorolást, a BCG- és a projektportfólió-mátrixot, a pozicionálási tengelycserét és a piaci rés vizsgálatát próbálhatod ki. Az E06 munkafüzet a projektportfólió adatait és a tengelyek mérési szabályát rögzíti, és összeadja a kiválasztott csomag erőforrásigényét.

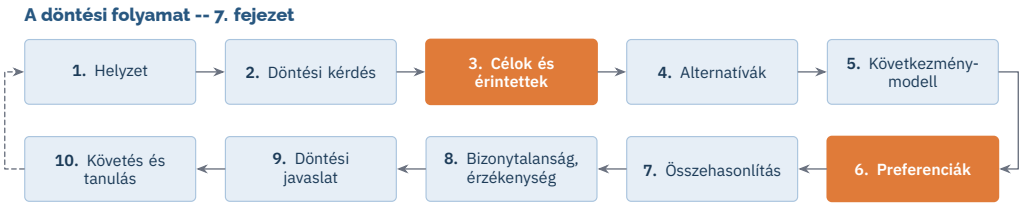
III. rész – Többkritériumos döntéstámogatás



Pannon Egyetem
University of Pannonia

7.

Kritériumok, mérési skálák és kizáró feltételek



Az olcsó megoldás elég jó neked?

Zoli használt elektromos autót keres, hogy hétvégente a vidéken élő szüleit is meglátogathassa. A táblázatában egy olcsó típus kapja a legtöbb pontot, amíg a felesége meg nem kérdezi: hazaérsz vele egy töltéssel? A hiányzó minimumfeltétel egy csapásra átrendezi a listát.
A lényeg: A kötelező feltételeket a pontozás előtt kell ellenőrizni, mert megsértésüket egy magas összpontszám sem teszi jóvá.
Kérdés: Melyik elvárásod legyen kizáró feltétel ebben a helyzetben?
Szemléltető, kitalált helyzet · F07 · Próbáld ki: h07-kriteriumok

A többkritériumos döntéstámogatás (*multiple criteria decision analysis*, MCDA) a könyv központi része. Hét fejezeten át azt vizsgáljuk, hogyan lehet sokféle, egymással gyakran ütköző szempontot átlátható és ellenőrizhető módon összevetni. Az első lépés nem a súlyozás és nem a képlet, hanem annak tisztázása, *mit mérünk* és *mit értékelünk*. Ez a fejezet a kritériumok meghatározását, a mérési skálákat, a kötelező korlátokat és az értékelési táblázat felépítését tárgyalja. A hibák jelentős része már itt keletkezik, és utána semmilyen kifinomult módszer nem javítja ki.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- a célfából kritériumszótárt készíteni: definíció, irány, mértékegység, tartomány, adatforrás és felelős;
- megkülönböztetni a mennyiségi, az ordinális és a kategóriaskálákat, és tudni, milyen műveletek megengedettek rajtuk;
- elkülöníteni a haszon-, a költség- és a célértékjellegű kritériumokat;
- a kötelező korlátokat a pontozás előtt alkalmazni, és az előszűrést visszakereshetően dokumentálni;
- felismerni a redundanciát, a kettős beszámítást és a preferenciális függést;
- dominanciát vizsgálni, és a hiányzó adatot külön státuszként kezelni;
- egy ajánlatkészlet Pareto-frontját meghatározni, a fronton belüli cserearányokat értelmezni, és felismerni, mikor tolja ki a frontot egy innováció.

A fejezet a célfától a kritériumszótárig vezető úttal kezd. Ezután a mérési skálák és a kritériumok irányának kérdését tárgyalja, majd a kötelező korlátokat és az elfogadhatósági küszöböket. A negyedik szakasz a kritériumok közötti átfedésekkel és függésekkel foglalkozik, az ötödik a teljes értékelési táblázattal, a dominanciával és a hiányzó adatokkal. A hatodik szakasz a dominanciából a Pareto-front fogalmához jut el egy ár–minőség–határidő példán, és megmutatja, hogyan tolja el a frontot egy innováció. A fejezet két rövid pozicionálási kerettel zárul, amelyek a szubjektív tengelyek használatának korlátait mutatják meg.

7.1. A célfától a kritériumszótárig

A 2.2.2. szakaszban a CASE02 célfáját három részcélra és hat mérhető kritériumra bontottuk. Egy kritérium akkor használható, ha mindenki ugyanazt érti rajta, és a jelölteken egyértelműen mérhető. Ezt a **kritériumszótár** biztosítja, amely minden kritériumnál hat elemet rögzít:

- **definíció:** pontosan mit mérünk (például „ötéves teljes birtoklási költség, állandó árszinten, beszerzés, energia, karbantartás és biztosítás, a maradványérték levonásával”);
- **irány:** a nagyobb vagy a kisebb érték a jobb, vagy egy célérték;
- **mértékegység:** millió Ft, g CO_2e/km, km, nap/év, darab, pont;
- **tartomány és horgonyok:** milyen értékek közé esnek a jelöltek, és milyen rögzített referenciapontokhoz mérünk;
- **adatforrás:** honnan származik az érték (ajánlat, mérés, becslés, szakértői ítélet);
- **felelős:** ki gyűjti és ki ellenőrzi az adatot.

CASE02 – A kritériumszótár

Kritérium	Jel	Irány	Mértékegység	Alsó / felső horgony	Adatforrás
Ötéves teljes birtoklási költség	C1	kisebb a jobb	millió Ft, állandó árszint	8 / 18	ajánlatok és saját számítás
Becsült életciklus-kibocsátás	C2	kisebb a jobb	g CO_2e/km	0 / 200	egységes rendszerhatárú becslés
Hatótáv	C3	nagyobb a jobb	km	200 / 600	gyártói adat, téli korrekcióval
Éves kiesési idő	C4	kisebb a jobb	nap/év	0 / 20	szervizstatisztika, becslés
Elérhető szervizpontok	C5	nagyobb a jobb	darab a régióban	0 / 10	partnerlisták
Komfortérték	C6	nagyobb a jobb	0–100 pont	0 / 100	lehorgonyzott értékelés

Kötelező korlát: hatótáv legalább 250 km. A komfortskála horgonyai: 0 = a munkafeladatra elfogadhatatlan; 50 = az alapelvárást teljesíti; 100 = a vizsgált feladatra kívánt felső szint. Az adatok szintetikusak.

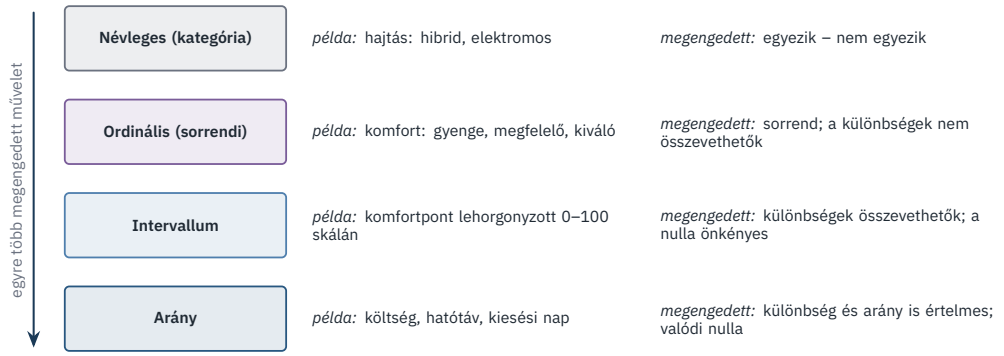
A horgonyok a legkevésbé feltűnő, de az egyik legfontosabb elemek. A C1 horgonyai (8 és 18 millió Ft) nem a jelöltek minimuma és maximuma, hanem egy előre rögzített tartomány: azoknak az értékeknek a köre, amelyeket a döntéshozó egy ilyen döntésnél reálisnak tart. A 8. fejezetben látni fogjuk, hogy a súlyok jelentése ezektől a horgonyoktól függ: ha a tartományt szűkítjük, ugyanannak a súlynak más lesz a jelentése.

A legolcsóbb ajánlatot választanád?

Öt mobilitási megoldás közül választotok a következő öt évre. A megbeszélésen a legolcsóbb ajánlatról esik a legtöbb szó. A végén derül ki, hogy ennek a járműnek a hatótávja a szokásos heti feladathoz sem elég.
A lényeg: Először azt kell tisztázni, mely lehetőségek teljesítik a nélkülözhetetlen feltételeket.
Kérdés: Melyik követelményt ellenőriznéd, mielőtt pontozni kezdenéd az ajánlatokat?
Szemléltető, kitalált helyzet · K02 · Próbáld ki: h07-kriteriumok

7.2. Mérési skálák és a kritériumok iránya

A mérés nem csak számok hozzárendelése: a számokkal végezhető műveletek a skála típusától függenek (7.1. ábra). A **névleges** (kategória-) skálán csak az egyezés értelmes: a „hibrid” és az „elektromos” nem kisebb vagy nagyobb egymásnál. Az **ordinális** skálán a sorrend értelmes, a különbségek nagysága viszont nem: ha a komfortot „gyenge, megfelelő, kiváló” fokozatokkal mérjük, nem tudjuk, hogy a megfelelő és a kiváló közötti különbség ugyanakkora-e, mint a gyenge és a megfelelő közötti. Az **intervallumskálán** a különbségek összevethetők, de a nulla önkényes. Az **arányskálán** valódi nulla van, és az arányok is értelmesek: a 400 km kétszer annyi, mint a 200 km.



7.1. ábra. A négy mérési skála és a rajtuk megengedett műveletek. A súlyozott összegzéshez legalább intervallumskálán mért, közös skálára transzformált értékek kellenek.

A gyakorlati következmény: ordinális értékeket (1–5-ös osztályzatokat) nem szabad gondolkodás nélkül átlagolni vagy súlyozva összeadni, mert az eredmény attól függ, milyen számokat rendeltünk a fokozatokhoz. Ha mégis pontozni kell, a fokozatokat **lehorgonyozzuk**: minden fokozathoz megfigyelhető leírást rendelünk („3 = a jármű vezetőüléséből a napi 4 óra vezetés nem okoz panaszt a tesztvezetők felénél sem”), és a döntéshozóval megerősítjük, hogy a fokozatok közötti különbségek nagyjából egyenlők. Ezzel az ordinális skálát intervallumskálává alakítjuk, de ez *értékítélet*, amelyet dokumentálni kell.

A kritérium **iránya** háromféle lehet. A **haszonjellegű** kritériumnál a nagyobb érték a jobb (hatótáv, szervizpontok), a **költségjellegű** kritériumnál a kisebb (költség, kibocsátás, kiesés). A **célértékjellegű** kritériumnál egy köztes érték a legjobb, és mindkét irányban romlik az érték: a CASE01-ben a laptop kijelzőmérete ilyen, mert a 14 colos képernyő a hordozhatóság és a kényelem legjobb egyensúlya, a 13 colos már kicsi, a 16 colos pedig nehéz. A célértékes kritérium nem monoton értékfüggvényt kap (8. fejezet).

Próbáld ki: kritériumszerkesztő és előszűrés

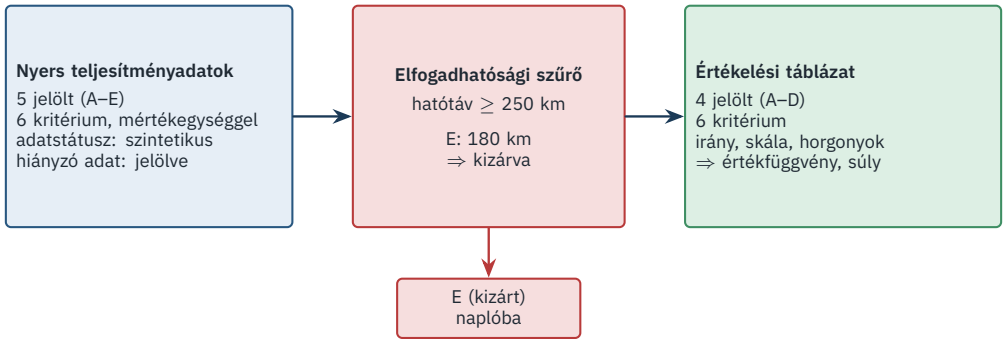
Előbb tippeld meg, hány jelölt marad 300 km-es minimum-hatótáv mellett. Ezután változtasd a kritériumok irányát, skáláját és a kötelező korlát értékét. Az alkalmazás megmutatja az előszűrt értékelési táblázatot és az adatminőségi listát, a dominancia nézetben pedig a dominált jelölteket.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h07-kriteriumok.html#K02

7.3. Kötelező korlátok és elfogadhatósági küszöbök

Kötelező korlát és kompenzáció

A **kötelező korlát** olyan feltétel, amelynek minden elfogadható alternatívának meg kell felelnie. A **kompenzáció** azt jelenti, hogy egy kritériumban elért rossz eredményt egy másikban elért jó eredmény ellensúlyozhat. A súlyozott összegzés *teljesen kompenzáló*: elég nagy előny bármely kritériumban bármely hátrányt ellensúlyoz. A kötelező korlát ezzel szemben *nem kompenzálható*.

A CASE02-ben az E jelölt a legolcsóbb (9 millió Ft), a legtisztább (10 g/km), és a kiesése is kicsi. Hatótávja azonban csak 180 km, a heti hosszú út pedig 240 km. Ha a hatótávot csak egy kritériumként pontozzuk, E a kiváló költség- és kibocsátási eredménye miatt a rangsor élére kerülhet, pedig a feladatot nem tudja ellátni. Ezért a hatótáv minimuma **kötelező korlát**: az előszűrés a pontozás előtt kizárja E-t (7.2. ábra).



A kötelező korlát a pontozás előtt szűr: egy kizárt jelölt nem kap rangsorpozíciót, és egyetlen kritériumban elért kiváló eredménye sem hozhatja vissza.

7.2. ábra. Az előszűrés helye az értékelés folyamatában. A kötelező korlát a pontozás előtt szűr; a kizárt jelölt nem kap rangsorpozíciót, és a kizárás oka a lehetőségkészlet naplójába kerül.

A korlátokat gondosan kell megválasztani, mert minden korlát egy erős értékítélet: azt állítja, hogy a határ alatt semmilyen más előny nem számít. Egy jó korlátnak három tulajdonsága van. **Indokolt:** a határ mögött valódi követelmény áll (a 240 km-es heti út), nem csak megszokás. **Mérhető:** egyértelműen eldönthető, ki felel meg. **Minimális:** csak annyi korlátot vezetünk be, amennyi valóban nélkülözhetetlen; minden további szempont kritériumként, kompenzálható módon szerepel. A 4.4. szakaszban láttuk, hogy a felesleges korlát éppúgy kizárhat jó lehetőségeket, mint a hiányzó korlát rosszakat beengedhet.

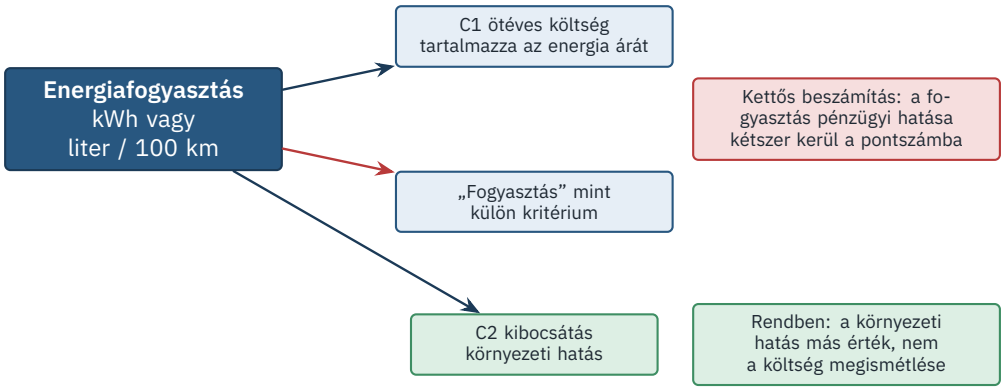
Az előszűrés naplója a CASE02-ben

Jelölt	Hatótáv	Szűrés	Megjegyzés
A	600 km	megfelel	
B	550 km	megfelel	
C	400 km	megfelel	
D	450 km	megfelel	
E	180 km	**nem felel meg**	a heti 240 km-es út nem teljesíthető; ha a beosztás átszervezhető, újra vizsgálandó
jelenlegi állapot	520 km	**nem felel meg**	a szerződéses futáskorlát öt év alatt túllépne

A napló azt is rögzíti, *milyen változás* esetén kell egy kizárt jelöltet újra vizsgálni.

7.4. Redundancia, kettős beszámítás és preferenciális függés

A kritériumlista akkor jó, ha minden fontos szempont benne van, és egyik sem szerepel kétszer. A **kettős beszámítás** akkor fordul elő, ha ugyanaz a következmény két kritériumban is megjelenik (7.3. ábra). A CASE02-ben az energiafogyasztás a C1 költségben már benne van (az energia ára része a teljes birtoklási költségnek). Ha a fogyasztást külön kritériumként is felvennénk, a pénzügyi hatása kétszer kerülne a pontszámba, és a fogyasztás aránytalanul nagy súlyt kapna. A C2 kibocsátás viszont nem kettős beszámítás, mert más értéket képvisel: a környezeti hatást, nem a költséget. Ha később a költségbe karbonárat építenénk, a két kritérium részben átfedné egymást, és ezt tárgyalni kellene.



7.3. ábra. A kettős beszámítás felismerése. Az energiafogyasztás pénzügyi hatása a költségben már szerepel; külön kritériumként kétszer kerülne a pontszámba. A környezeti hatás más érték, ezért önálló kritérium lehet.

A **redundancia** tágabb fogalom: két kritérium erősen együtt mozog a jelöltek között, mert ugyanannak a mögöttes tulajdonságnak a két megnyilvánulása (például a motorteljesítmény és a gyorsulás). A redundancia nem mindig hiba, de növeli a mögöttes tulajdonság tényleges súlyát. A gyakorlati próba: ha két kritériumot összevonnánk, változna-e, amit mérni akarunk?

A **preferenciális függés** finomabb probléma. Az additív értékelés (8. fejezet) azt feltételezi, hogy egy kritérium értékelése nem függ attól, milyen szinten áll a többi. Ez nem mindig igaz: a nagyobb hatótáv értéke kisebb lehet, ha sok a szervizpont és a töltőállomás, mert ilyenkor a rövidebb hatótáv kevésbé zavaró. Ha ilyen függést észlelünk, három lehetőségünk van: a kritériumokat újradefiniáljuk (például „a heti útvonal teljesíthetősége” egyetlen kritériumként), kölcsönhatást is megengedő modellt választunk, vagy a függést érzékenységvizsgálattal kezeljük. A preferenciális függetlenség pontos feltételeit Keeney és Raiffa klasszikus műve tárgyalja (Keeney és Raiffa 1976).

7.5. Az értékelési táblázat, a dominancia és a hiányzó adatok

Az előszűrés után az **értékelési táblázat** (teljesítménytáblázat) a jelöltek nyers teljesítményét mutatja kritériumonként, mértékegységgel. A CASE02 táblázata:

7.1. táblázat. A CASE02 értékelési táblázata az előszűrés után (szintetikus adatok)

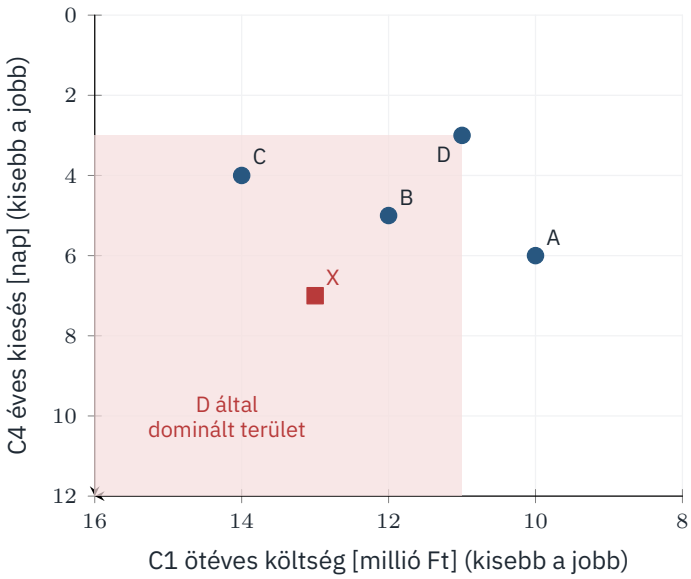
Jelölt	C1 [M Ft]	C2 [g/km]	C3 [km]	C4 [nap/év]	C5 [db]	C6 [pont]
A hibrid, vásárlás	10	150	600	6	8	65
B konnektoros hibrid, bérlet	12	90	550	5	8	75
C elektromos, bérlet zöldárammal	14	30	400	4	7	85
D elektromos, vásárlás	11	70	450	3	9	80

A táblázatban minden jelöltnek van gyengesége: A a legolcsóbb és a legnagyobb hatótávú, de a legtöbbet bocsátja ki; C a legtisztább és a legkényelmesebb, de a legdrágább; D a legkevesebbet áll, és a legtöbb szervizponttal rendelkezik, de hatótávja közepes. Ez a tipikus többkritériumos helyzet: nincs olyan jelölt, amely mindenben a legjobb.

> **Dominancia**
>
> Az a alternatíva **dominálja** a b alternatívát, ha minden kritérium szerint legalább olyan jó, és legalább egy szerint szigorúan jobb nála. A dominált alternatíva bármilyen nemnegatív súlyozás mellett legfeljebb holtversenyben lehet első, ezért a rangsorolás előtt kizárható.

A CASE02 négy jelöltje között **nincs dominancia**: bármely két jelöltet nézzük, mindegyik jobb a másiknál legalább egy kritériumban. Ez azért fontos, mert azt jelenti, hogy a végső sorrendet a preferenciák, vagyis a súlyok és az értékfüggvények döntik el. A 7.4. ábra egy csapdára is figyelmeztet: ha csak két kritériumot nézünk (költség és kiesés), D dominálja B-t és C-t is. Mind a hat kritériumot figyelembe véve azonban ez a dominancia eltűnik, mert B és C kibocsátásban és komfortban jobb D-nél. A dominanciát tehát mindig a teljes kritériumkészleten kell vizsgálni.

A **hiányzó adat** különleges kezelést kíván. A leggyakoribb hiba, hogy a táblázatkezelő az üres cellát nullának veszi: egy hiányzó kiesési adat így a legjobb (0 nap), egy hiányzó hatótáv a legrosszabb (0 km) értéket kapná. A hiányzó adat ezért *külön státusz*. Három szabályos eljárás közül választhatunk: az adatot beszerezzük, mielőtt számolnánk; az érintett számítást leállítjuk, és jelezzük, hogy az eredmény nem értelmezhető; vagy egy dokumentált pótlási



7.4. ábra. Dominancia két kritérium alapján. A D által dominált területre eső X jelölt kizárható; ebben a két dimenzióban B és C is a dominált területre esik, de mind a hat kritériumot figyelembe véve nem dominált. A tengelyek úgy fordítottak, hogy jobbra és felfelé legyen a jobb.

forgatókönyvet készítünk (például a legkedvezőbb és a legkedvezőtlenebb reális értékkel), és megnézzük, változik-e a rangsor.

Átviteli példa: szubjektív minősítés a laptopválasztásban (CASE01)

A laptopok billentyűzetét a hallgató 1–5-ös skálán értékeli. Mielőtt a minősítéseket súlyozott összegbe tenné, minden fokozathoz leírást rendel: 1 = egy óránál hosszabb gépelésre alkalmatlan; 3 = egy jegyzetelős előadás végig kényelmes; 5 = egy egész napos írás is kényelmes. Azt is megkérdezi magától, hogy a 3 és a 4 közötti különbség ugyanannyit ér-e neki, mint az 1 és a 2 közötti. Mivel nem, az 1–5-ös értékekhez egy nem egyenletes értékskálát rendel (0, 40, 70, 90, 100), és ezt a választást a döntési naplóba is beírja.

7.6. Pareto-hatékonyság: ár, minőség és idő

Gyorsan, jól vagy olcsón?

Nóra tavasszal nyitotta meg a kis pékségét, és weboldalt szeretne. Tizenegy ajánlatot kap: van, amelyik olcsó, de két hónapig tart; van, amelyik gyors és gyönyörű, de a havi bevétele felébe kerül. A barátja nevetve idézi a régi mondást: „gyorsan, jól, olcsón – ebből kettőt választhatsz”.

A lényeg: Ha egy ajánlat minden szempontból legalább olyan jó, mint egy másik, és valamiben jobb, a gyengébbet nyugodtan elengedhetjük. Ami marad, a Pareto-front, az a valódi választék; a fronton belül már csak cserearányok vannak.

Kérdés: A tizenegy ajánlat közül melyeket zárnád ki azonnal, és melyek között kell valóban mérlegelned?

Szemléltető, kitalált helyzet · K24 · Próbáld ki: h07-kriteriumok

A projektmenedzsment egyik legrégebbi tapasztalata, hogy a költség, az idő és a minőség egymással ütközik: ez a „vasháromszög” (Atkinson 1999). Az előző szakasz dominanciafogalma ezt a tapasztalatot pontossá teszi. Tekintsünk egy A alternatívakészletet és k kritériumot, amelyeket a $f(a) = (f_1(a), \dots, f_k(a))$ vektor foglal össze; az egyszerűség kedvéért mindegyiket maximalizálni szeretnénk (a költségjellegű kritériumot ellentett előjellel vesszük).

Pareto-hatékonyság és Pareto-front

Az a alternatíva **dominálja** a b-t ($a \succ b$), ha $f_i(a) \geq f_i(b)$ minden i-re, és legalább egy j-re $f_j(a) > f_j(b)$. Az $a \in A$ alternatíva **Pareto-hatékony** (nem dominált), ha nincs olyan $b \in A$, amely dominálja. A Pareto-hatékony alternatívák halmaza

$$P = \{\, a \in A : \nexists\, b \in A,\ b \succ a \,\},$$

a képük a kritériumok terében, $f(P)$, a **Pareto-front**. Az **ideálpont** kritériumonként a legjobb elérhető értékekből áll; általában nem valósítható meg, mert a kritériumok ütköznek.

A fogalom Vilfredo Pareto olasz közgazdász nevét viseli, aki a gazdasági jólét olyan állapotát vizsgálta, amelyben senki helyzete nem javítható anélkül, hogy másé ne romlana (Pareto 1906). A többcélú optimalizálás ugyanezt a gondolatot alkalmazza a kritériumokra: a fronton egy kritérium csak egy másik rovására javítható (Ehrgott 2005).

Tizenegy ajánlat egy weboldalra

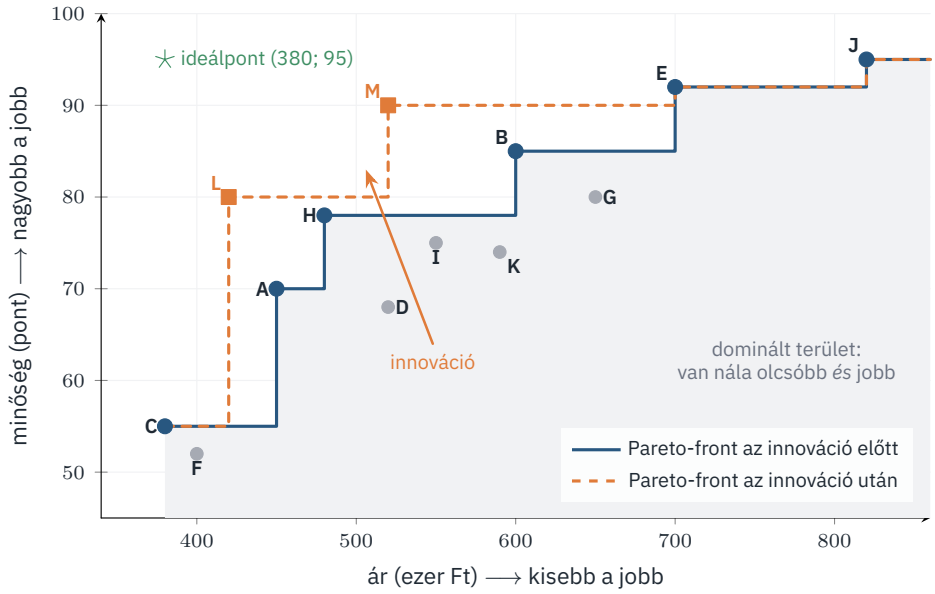
Nóra tizenegy ajánlata három kritérium szerint:

7.2. táblázat. Weboldal-ajánlatok ár, minőség és határidő szerint (szemléltető adatok)

Ajánlat	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
ár (ezer Ft) ↓	450	600	380	520	700	400	650	480	550	820	590
minőség (pont) ↑	70	85	55	68	92	52	80	78	75	95	74
határidő (munkanap) ↓	30	25	40	35	20	45	30	28	40	15	18

A páronkénti összevetés négy dominált ajánlatot talál. D-t A és H is dominálja (mindkettő olcsóbb, jobb és gyorsabb), F-et C, G-t B, I-t H. A maradék hét ajánlat – A, B, C, E, H, J és K – alkotja a háromdimenziós Pareto-frontot: közülük bármelyik javítása valamelyik szempontban egy másik szempont romlásával jár.

A 7.5. ábra az ár és a minőség síkjában mutatja az ajánlatokat. Két tanulság olvasható le róla. Az első a **cserearány**: a fronton haladva egy minőségpont egyre többe kerül. C-ből A-ba lépve 70 ezer forintért 15 pontot nyerünk (pontonként kb. 4,7 ezer forint), B-ből E-be 100 ezerért 7 pontot (kb. 14 ezer), E-ből J-be 120 ezerért már csak 3 pontot (40 ezer forint pontonként). A front tehát *csökkenő hozadékot* mutat, és a döntés ezen a ponton már arról szól, mennyit ér nekünk egy további minőségpont; ezt a kérdést a 8. fejezet értékfüggvényei és súlyai teszik mérhetővé. A második tanulság a K ajánlaté: az ár–minőség síkban H dominálja, a háromdimenziós fronton mégis rajta van, mert ez a második leggyorsabb ajánlat. Ugyanaz a figyelmeztetés ez, mint a 7.4. ábránál: egy szempont elhagyása hamis kizáráshoz vezet.



7.5. ábra. A weboldal-ajánlatok az ár és a minőség síkjában. A kék lépcsős vonal a Pareto-front; tőle jobbra és lefelé a dominált terület, ahol minden ajánlatnál van olcsóbb *és* jobb. Az új munkamódszerrel készült L és M ajánlat kitolja a frontot (narancs szaggatott vonal), és négy korábbi frontpontot (A, B, H, K) dominálttá tesz.

Az innováció a frontot tolja el. A fronton belüli választás mindig lemondással jár: a jobb minőséget idővel vagy pénzzel fizetjük meg. A valódi előrelépés az, ha a front maga mozdul el az ideálpont felé. Tegyük fel, hogy két ügynökség egy új, sablonokra és automatizált tesztelésre épülő munkamódszerrel ad ajánlatot: L 420 ezer forintért, 80 pontos minőséggel, 20 nap alatt; M 520 ezerért, 90 ponttal, 15 nap alatt. Az új front C, L, M, E és J lesz: L dominálja A-t és H-t, M pedig B-t és K-t. Négy korábban hatékony ajánlat egyetlen lépésben elveszíti az értelmét, miközben senki sem lett rosszabb, csak megjelent egy jobb lehetőség. Michael Porter ugyanezt írja le a vállalatok **termelékenységi határáról**: a működési hatékonyság javítása a határt tolja ki, a stratégia viszont arról szól, hol helyezkedik el valaki rajta (Porter 1996). Az értékinnováció gondolata szerint a legsikeresebb új ajánlatok éppen a megszokott cserearányt törik meg, egyszerre csökkentik a költséget és növelik a vevő értékét (Kim és Mauborgne 2005). A 4. fejezet alternatívakeresési módszerei tehát nemcsak a fronton belül keresnek, hanem a front eltolását is célozhatják; a 19. fejezet Solow-modellje a gazdaság egészére mutatja meg ugyanezt.

A dominált alternatíva is befolyásolhatja a választást

A dominált ajánlatot elvileg nyugodtan elhagyhatjuk, a viselkedési kísérletek mégis azt mutatják, hogy jelenléte eltolja a választást. Ha egy ajánlat mellé egy nála kicsit rosszabb, általa egyértelműen dominált „csali” kerül, többen választják a dominált ajánlatot, mint nélküle; ez a *csalihatás* (*decoy effect*) (Huber és mtsai. 1982). Ezért érdemes a Pareto-szűrést a döntés elején, írásban elvégezni, és a kizárt ajánlatokat indoklással naplózni: a táblázatból eltűnő csali már nem keretezi az összehasonlítást (vö. 3.2. szakasz).

Próbáld ki: a Pareto-front és eltolása

Előbb tippeld meg, hány ajánlat marad a háromdimenziós fronton. Ezután válts tengelyt (ár–minőség, ár–határidő, minőség–határidő), és figyeld, mely pontok kerülnek a frontra a vetületben. Végül kapcsold be az innovációt: az alkalmazás megmutatja, mely korábbi frontpontok válnak dominálttá.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h07-kriteriumok.html#K24

Pareto-szűrés és a front eltolása

A kód a dominanciát a definíció szerint ellenőrzi: minden ajánlatot összevet minden másikkal. Az `irany` vektor jelzi, melyik kritériumnál jobb a kisebb érték; ilyenkor a kód ellentett előjellel számol, így mindent maximalizálhat.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

nevek = list("ABCDEFGHIJK")
# ár (ezer Ft), minőség (pont), határidő (munkanap)
X = np.array([[450, 70, 30], [600, 85, 25], [380, 55, 40],
              [520, 68, 35], [700, 92, 20], [400, 52, 45],
              [650, 80, 30], [480, 78, 28], [550, 75, 40],
              [820, 95, 15], [590, 74, 18]], dtype=float)
irany = np.array([-1, 1, -1])   # -1: kisebb a jobb

def dominalja(a, b, ir):
    """Igaz, ha a minden szempontból legalább olyan jó,
    mint b, és legalább egyben szigorúan jobb nála."""
    a, b = a * ir, b * ir          # így mindent maximalizálunk
    return np.all(a >= b) and np.any(a > b)

def pareto(X, ir):
    return [i for i in range(len(X))
            if not any(dominalja(X[j], X[i], ir)
                       for j in range(len(X)) if j != i)]

front = pareto(X, irany)
print("Pareto-front:", " ".join(nevek[i] for i in front))
for i in range(len(X)):
    ki = [nevek[j] for j in range(len(X))
          if dominalja(X[j], X[i], irany)]
    if ki:
        print(f"  {nevek[i]} dominált, dominálók: {ki}")

# Innováció: két új ajánlat egy új munkamódszerrel
X2 = np.vstack([X, [[420, 80, 20], [520, 90, 15]]])
nevek2 = nevek + ["L", "M"]
front2 = pareto(X2, irany)
print("Új front:", " ".join(nevek2[i] for i in front2))

# Az ár–minőség sík frontja az innováció előtt és után
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 4))
ax.scatter(X2[:, 0], X2[:, 1], color="lightgray")
for Y, nv, szin in [(X, nevek, "C0"), (X2, nevek2, "C1")]:
    f2 = sorted(pareto(Y[:, :2], irany[:2]), key=lambda i: Y[i, 0])
    ax.step(Y[f2, 0], Y[f2, 1], where="post", color=szin)
    for i in f2:
        ax.annotate(nv[i], Y[i, :2], xytext=(4, 4),
                    textcoords="offset points")
ax.set_xlabel("ár (ezer Ft)"); ax.set_ylabel("minőség (pont)")
plt.show()
```

A futás eredménye: a front A, B, C, E, H, J és K; D-t A és H, F-et C, G-t B, I-t H dominálja. Az innováció után a front C, E, J, L és M.

7.7. Szubjektív tengelyek és kategorizálás

Két, a *The Decision Book*-ban szereplő keret jól mutatja, milyen nehéz szubjektív szempontokat skálára tenni. Mindkettő *szemléltető pozicionálás*, nem mérőeszköz.

7.7.1. Zenei mátrix: két szubjektív tengely

Hova tennéd a kedvenc zenédet?

Egy baráti társaság ugyanazt a tíz dalt helyezi el két tengelyen: mennyire ismert és mennyire tetszik. Mindenki térképe más, és a vita hamarosan arról szól, mit jelent egyáltalán az „ismert”.
A lényeg: Szubjektív tengelyeken az elhelyezés a tengely értelmezésétől is függ; az eltérés gyakran a definícióról szól, nem a dalokról.
Kérdés: Hogyan definiálnád úgy az egyik tengelyt, hogy mindenki ugyanazt értse rajta?
Szemléltető, kitalált helyzet · D16 · Próbáld ki: h07-kriteriumok

A *The Decision Book* zenei mátrixa a zenei ízlést két tengelyen ábrázolja (Krogerus és Tschäppeler 2011). A keret haszna módszertani: jól szemlélteti, hogy egy szubjektív tengelyen az elhelyezés mögött eltérő definíciók húzódhatnak meg. Ugyanez a probléma jelenik meg a többkritériumos értékelésben is, amikor a „komfort” vagy a „felhasználói élmény” kritériumot lehorgonyzás nélkül pontozzák. A megoldás ugyanaz: a tengely minden fokozatához megfigyelhető leírást kell rendelni.

Próbáld ki: szubjektív tengelyek

Helyezz el néhány zeneszámot két szubjektív tengelyen, majd cseréld le az egyik tengely definícióját. Figyeld meg, mennyire változik az elrendezés, és mely csoportosítások maradnak meg.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h07-kriteriumok.html#D16

7.7.2. Kétdimenziós preferenciatér

Közelebb állsz hozzám, vagy csak máshogy kérdeztünk?

Egy online kérdőív két dimenzióban helyezi el a válaszadók nézeteit. Két kolléga meglepődik, milyen messze kerültek egymástól, pedig a legtöbb kérdésben egyetértettek. Kiderül, hogy néhány kérdést egészen másként értelmeztek.
A lényeg: Egy preferenciatérben a távolság a dimenziók és a kérdések megválasztásától is függ.
Kérdés: Melyik kérdés átfogalmazása változtatná meg leginkább a két ember közötti távolságot?
Szemléltető, kitalált helyzet · D22 · Próbáld ki: h07-kriteriumok

A *The Decision Book* a politikai iránytűt két dimenzió, egy gazdasági és egy társadalmi tengely mentén mutatja be (Krogerus és Tschäppeler 2011). A gondolat a döntéselméletben a **térbeli preferenciamodellek** családjába tartozik: Anthony Downs óta ismert, hogy a választók és a jelöltek egy ideológiai térben elhelyezhetők, és a választó a hozzá legközelebbi jelöltet részesíti előnyben (Downs 1957). A könyvben a keret csak szemléltetésre szolgál, politikai állásfoglalást nem tartalmaz. A módszertani tanulság kettős. A távolság a kérdések kiválasztásától és értelmezésétől függ, és két dimenzió gyakran elrejt olyan különbségeket, amelyek egy harmadik dimenzióban jelennének meg. A 10. fejezetben a TOPSIS-módszer ugyanígy egy ideálponttól mért távolságra épül, és ott is látni fogjuk, hogy a távolság a választott skáláktól és súlyoktól függ.

Próbáld ki: távolság egy preferenciatérben

Helyezz el két szintetikus válaszadót egy kétdimenziós térben, majd módosítsd egy kérdés értelmezését. Az alkalmazás kiszámítja a távolságot, és megmutatja, melyik dimenzió felel a változásért.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h07-kriteriumok.html#D22

Különböző mértékegységek közvetlen összeadása

Egy táblázatban gyakran látni, hogy a millió forintot, a kilométert és az 1–5-ös osztályzatot közvetlenül összeadják. Az eredmény értelmetlen, mert attól függ, milyen egységben mértünk: ha a költséget ezer forintban írjuk, az eltörpít minden más szempontot. Az összegzés előtt minden kritériumot közös, értelmezett skálára kell transzformálni, és ez a transzformáció maga is értékítélet. A következő fejezet erről szól.

Összefoglalás

- A kritériumszótár minden kritériumnál rögzíti a definíciót, az irányt, a mértékegységet, a tartományt és a horgonyokat, az adatforrást és a felelőst.
- A mérési skála típusa meghatározza a megengedett műveleteket; ordinális értékeket csak lehorgonyzás és dokumentált értékítélet után szabad összegezni.
- A kritérium lehet haszon-, költség- vagy célértékjellegű; a célértékes kritérium nem monoton értékfüggvényt kap.
- A kötelező korlát nem kompenzálható, ezért a pontozás előtt szűr; a korlátnak indokoltnak, mérhetőnek és minimálisnak kell lennie, az előszűrést naplózni kell.
- A kettős beszámítás ugyanazt a következményt kétszer számolja el; a redundancia és a preferenciális függés az additív modell feltételeit veszélyezteti.
- A dominanciát a teljes kritériumkészleten kell vizsgálni; a CASE02 négy jelöltje között nincs dominancia, így a végső sorrendet a preferenciák döntik el.
- A hiányzó adat külön státusz, nem nulla.
- A nem dominált alternatívák alkotják a Pareto-frontot; a fronton belül csak cserearányok vannak, a valódi előrelépés a front eltolása, amelyet egy új megoldás (innováció) hozhat.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség a kötelező korlát és a kritérium között? Miért nem elég a hatótávot egy nagy súlyú kritériumként kezelni?
2. Milyen skálán mérjük a CASE02 hat kritériumát? Melyiknél volt szükség lehorgonyzásra, és miért?
3. Egy új jelölt, F: költség 11, kibocsátás 80, hatótáv 440, kiesés 4, szervizpont 8, komfort 75. Dominálja-e valamelyik CASE02-jelölt?
4. Egy elemző a „fogyasztás” és a „ötéves költség” kritériumot is felvenné. Mikor jelent ez kettős beszámítást, és mikor nem?
5. Egy táblázatkezelő a hiányzó kiesési adatot nullának veszi. Milyen irányban torzítja ez az eredményt, és mit kellene tenni helyette?
6. Nóra kap egy tizenkettedik ajánlatot: 500 ezer forint, 72 pont, 26 munkanap. Rákerül-e a Pareto-frontra (az innováció előtti tizenegy ajánlat mellett), és ha igen, melyik ajánlatot teszi dominálttá?

Megoldás.

1. A kötelező korlát olyan feltétel, amelyet minden elfogadható jelöltnek teljesítenie kell; a megsértését semmi sem kompenzálja. A kritérium kompenzálható: egy rossz eredményt másutt elért előny ellensúlyozhat. Egy akármilyen nagy súlyú kritérium is kompenzálható, így egy elég olcsó és tiszta, de a feladatot nem teljesítő jelölt is nyerhetne.
2. C1–C5 arányskálán (valódi nullával), C6 egy lehorgonyzott 0–100-as skálán, amely intervallumskálaként kezelhető. A komfortnál volt szükség lehorgonyzásra, mert az eredetileg szubjektív, fokozatos értékelés.
3. D dominálja F-et: D költsége 11 (egyenlő), kibocsátása 70 (jobb), hatótávja 450 (jobb), kiesése 3 (jobb), szervizpontja 9 (jobb), komfortja 80 (jobb). F így kizárható.

4. Kettős beszámítás, ha a fogyasztást a pénzügyi hatása miatt vesszük fel, mert az energia ára már a teljes birtoklási költség része. Nem az, ha a fogyasztás más értéket képvisel, amely a költségben nem jelenik meg, például az energiaellátás bizonytalanságát; ezt azonban külön meg kell indokolni.
5. A kiesés költségjellegű kritérium, ezért a nulla a legjobb érték: a hiányzó adat a jelöltet indokolatlanul előnyhöz juttatja. Helyette az adatot be kell szerezni, vagy a számítást meg kell állítani, vagy egy dokumentált pótlási forgatókönyvvel kell megvizsgálni a rangsor érzékenységét.
6. Rákerül, mert egyik ajánlat sem dominálja: H olcsóbb és jobb, de lassabb (28 > 26 nap); A olcsóbb, de rosszabb és lassabb; a nála gyorsabb ajánlatok (B, E, J, K) mind drágábbak. Az új ajánlat D-t (520; 68; 35) dominálja, amely azonban már korábban is dominált volt, így frontpontot nem szorít ki.

Továbbolvasás

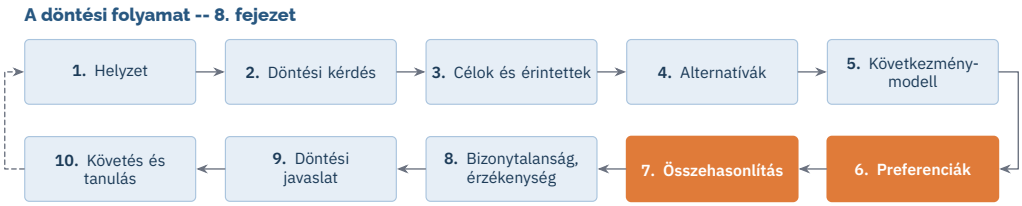
- Belton, V., Stewart, T. J. (2002): *Multiple Criteria Decision Analysis*, 3–4. fejezet – a problémastrukturálás és a kritériumok (Belton és Stewart 2002).
- Keeney, R. L., Raiffa, H. (1976): *Decisions with Multiple Objectives* – a preferenciális függetlenség (Keeney és Raiffa 1976).
- Dodgson, J. S. és mtsai (2009): *Multi-Criteria Analysis: A Manual* – a teljesítménytáblázat és a kritériumok gyakorlati kezelése (Dodgson és mtsai. 2009).
- HM Treasury és DESNZ (2024) – a többkritériumos elemzés hivatalos brit útmutatója (HM Treasury és Department for Energy Security and Net Zero 2024).
- Ehrgott, M. (2005): *Multicriteria Optimization* – a Pareto-hatékonyság és a front matematikai kezelése (Ehrgott 2005).
- Porter, M. E. (1996): What is strategy? – a termelékenységi határ és a stratégiai pozíció (Porter 1996).

Gyakorlat

A Döntési műhely 7. műhelyében a kritériumszerkesztővel (H07) elkészítheted a CASE02 vagy egy saját döntés kritériumszótárát, alkalmazhatod a kötelező korlátokat, és vizsgálhatod a dominanciát; a K24 nézetben a Pareto-frontot és annak eltolását is kipróbálhatod. Az E07 munkafüzet a kritériumszótárt, az adatminőségi táblát és a szűrési naplót tartalmazza; az üres cellák nem válnak nullává, hanem külön jelzést kapnak. Az N07 notebook a fejezet Python-demóját futtatja.

8.

Értékfüggvények, súlyok és additív értékelés



Ugyanazok az adatok, másik győztes

Rita a pénzügyeket, Ákos a terepen dolgozó kollégákat képviseli az új járművek beszerzésénél. Az adatokban gyorsan megegyeznek. A vita akkor kezdődik, amikor arról beszélnek, mennyit ér egy nappal kevesebb kiesés a drágább beszerzéshez képest: nem a számokban, hanem az átváltásokban térnek el.

A lényeg: A súlyok és az értékfüggvények azt mutatják meg, milyen átváltásokat fogadunk el a számunkra fontos következmények között.

Kérdés: Mennyi többletköltséget érne meg neked egy nappal kevesebb kiesés?

Szemléltető, kitalált helyzet · F08 · Próbáld ki: h08-ertekelo

Az előző fejezetben elkészült a CASE02 értékelési táblázata: négy jelölt, hat kritérium, mértékegységekkel. A jelöltek között nincs dominancia, tehát a sorrendet a preferenciák döntik el. Ez a fejezet azt mutatja meg, hogyan lehet a preferenciákat átlátható, ellenőrizhető formába önteni. A **többattribútumos értékelmélet** (*multi-attribute value theory*, MAVT) két lépésben dolgozik: először minden kritériumon egy **értékfüggvény** fejezi ki, mennyire jó egy teljesítmény, aztán a **súlyok** mondják meg, mennyit ér egymáshoz képest a kritériumok tartományának bejárása. A kettő együtt egy additív értékmodellt ad, amely a könyv számszerű alapmintája lesz.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- rögzített referenciapontokkal lineáris, célértékes és szakaszonként lineáris értékfüggvényt felírni;
- a súlyokat a swing-eljárással meghatározni, és megmagyarázni, miért függ a súly jelentése a kritérium tartományától;
- kiszámítani egy jelölt additív értékét és kritériumonkénti hozzájárulásait;
- megfogalmazni az additív modell feltételeit (preferenciális függetlenség, teljes kompenzáció);
- meghatározni egy rangsorváltás küszöbét egy súly változtatásakor;
- dokumentálni a súlyválasztást, és feltételes döntési javaslatot megfogalmazni.

A fejezet először a referenciapontokat és az értékfüggvényeket vezeti be, majd a swing-súlyozást. Ezután a súlyozott összeget és a feltételeit tárgyalja, a CASE02 teljes, kézzel is követhető számításával. A negyedik szakasz a kompenzációval és az érzékenységgel foglalkozik, levezetjük az első rangsorváltás küszöbét. A fejezet a döntési javaslat megfogalmazásával és a súlyválasztás dokumentálásával zárul. Ez a könyv mintafejezete: a hozzá tartozó H08 alkalmazás, az E08 munkafüzet és az N08 notebook ugyanazokat az adatokat és képleteket használja, és ugyanazokat a számokat adja.

8.1. Referenciapontok és értékfüggvények

Mennyit ér a 450 kilométer?

Az egyik jármű 450, a másik 550 kilométert tesz meg egy töltéssel. A heti leghosszabb út 240 kilométer. Megéri-e a többlet, és ha igen, mennyire?
A lényeg: Egy teljesítmény értéke attól függ, mihez viszonyítjuk, és a további javulás nem mindig ér ugyanannyit.
Kérdés: Hol húznád meg azt a hatótávot, amely fölött a további kilométerek már alig érnek valamit?
Szemléltető, kitalált helyzet · K03 · Próbáld ki: h08-ertekelo

Értékfüggvény

Az j-edik kritérium **értékfüggvénye** $v_j(x)$ a nyers teljesítményt egy közös, értelmezett skálára képezi le. A könyvben a 0–100-as skálát használjuk: a 0 a kritérium rögzített alsó (legrosszabb) horgonyát, a 100 a felső (legjobb) horgonyát jelenti. Az értékfüggvény két dolgot fejez ki: a horgonyok közötti tartományt és azt, hogy a tartományon belül hogyan nő az érték.

A legegyszerűbb a **lineáris** értékfüggvény. Haszonjellegű kritériumnál (a nagyobb a jobb)

$$v_j(x) = 100\,\frac{x - L_j}{U_j - L_j}, \tag{8.1}$$

költségjellegű kritériumnál (a kisebb a jobb)

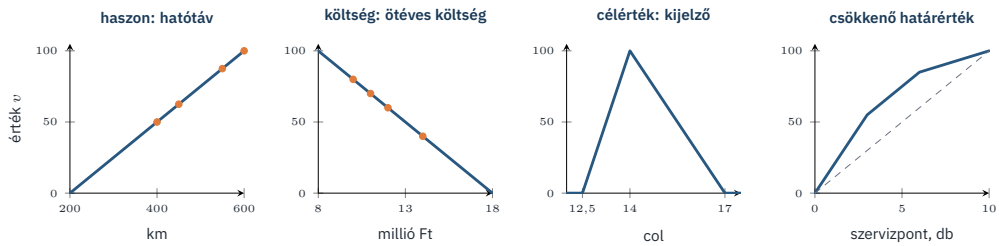
$$v_j(x) = 100\,\frac{U_j - x}{U_j - L_j}, \tag{8.2}$$

ahol L_j és U_j a rögzített alsó és felső horgony. A CASE02 horgonyait a 7.1. szakasz kritériumszótára rögzíti. Például az A jelölt 10 millió forintos költsége $v_1 = 100 \cdot (18 - 10)/(18 - 8) = 80$ pont, a 600 km-es hatótávja $v_3 = 100 \cdot (600 - 200)/(600 - 200) = 100$ pont.

A horgonyokat a döntés előtt, a jelöltektől függetlenül rögzítjük. Ennek két oka van. Egyrészt így az értékek nem változnak, ha egy új jelölt kerül a listára; ha a horgonyokat a jelöltek legkisebb és legnagyobb értékéből vennénk, egy új jelölt minden pontszámot átírhatna. Másrészt a súlyok értelmezése a horgonyok közötti tartományhoz kötődik, ahogy a következő szakaszban látni fogjuk. A tartományon kívüli érték hibát jelez: ilyenkor vagy a horgonyokat kell felülvizsgálni, vagy egy előre rögzített levágási szabályt kell alkalmazni. Ha $U_j = L_j$, a kritérium nem különbözteti meg a jelölteket, és osztás helyett állandóként kell kezelni.

A lineáris értékfüggvény feltevés: azt állítja, hogy a tartomány minden egységnyi javulása ugyanannyit ér. Ez sokszor nem igaz (8.1. ábra). A **célértékes** kritériumnál egy köztes érték a legjobb: a CASE01 laptopjainál a 14 colos kijelző kapja a 100 pontot, a 12,5 és a 17 colos 0 pontot, köztük lineárisan változik az érték. A **csökkenő határértékű** (konkáv) értékfüggvény azt fejezi ki, hogy az első néhány egység sokat, a további egységek egyre kevesebbet érnek: az első három szervizpont a régióban sokat jelent, a tizedik már alig. Az ilyen függvényeket a gyakorlatban **szakaszonként lineáris** alakban adjuk meg: néhány pontban megkérdezzük a döntéshozót, mennyit ér az adott teljesítmény, és a pontok között lineárisan interpolálunk (Belton és Stewart 2002; Goodwin és Wright 2014).

Az értékfüggvény alakjának meghatározására a legegyszerűbb a **felezési eljárás** (*bisection*): megkérdezzük, melyik az a hatótáv, amely félúton van a 200 és a 600 km értéke között, vagyis a 200 km-ről erre a pontra való javulás ugyanannyit ér, mint innen a 600 km-re való javulás (Winterfeldt és Edwards 1986). Ha a válasz 400 km, a függvény lineáris; ha 320 km, a függvény konkáv, mert az első 120 km ugyanannyit ér, mint az utána következő 280. Az ilyen kérdésekre adott válaszok mérhető értékfüggvényt adnak, amelyben a különbségek is értelmesek (Dyer és Sarin 1979).



8.1. ábra. Értékfüggvény-típusok. A lineáris haszon- és költségfüggvények (a narancs pontok a CASE02 jelöltjei), a célértékes kijelzőméret a CASE01-ből, és egy szakaszonként lineáris, csökkenő határértékű függvény a szervizpontokra, amelynek lineáris megfelelőjét a szaggatott vonal mutatja.

> **Próbáld ki: értékfüggvény és horgonyok**
>
> Előbb tippeld meg, hány pontot ér a 450 km-es hatótáv lineáris értékfüggvénnyel. Ezután mozgasd a felezési pontot és a horgonyokat, és figyeld meg, hogyan változnak a jelöltek pontszámai. A swing-nézetben a súlyok meghatározását is kipróbálhatod.
> Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h08-ertekelo.html#K03

8.2. Swing-súlyozás és a skálatartomány jelentősége

A súly a többkritériumos értékelés leggyakrabban félreértett fogalma. A hétköznapi kérdés, „mennyire fontos a költség a kényelemhez képest?”, értelmetlen, amíg nem mondjuk meg, *mekkora* költségkülönbségről és *mekkora* kényelemkülönbségről van szó. Egy 100 forintos költségkülönbség senkinek sem fontos, egy 10 millió forintos mindenkinek. A súlynak ezért a kritérium **tartományához** kell kötődnie.

> **Swing-súly**
>
> A j-edik kritérium **swing-súlya** w_j arányos azzal, mennyit ér a döntéshozónak az, ha ez a kritérium a legrosszabb horgonyáról a legjobbra ugrik, miközben minden más kritérium változatlan. A súlyok nemnegatívak, és összegük 1.

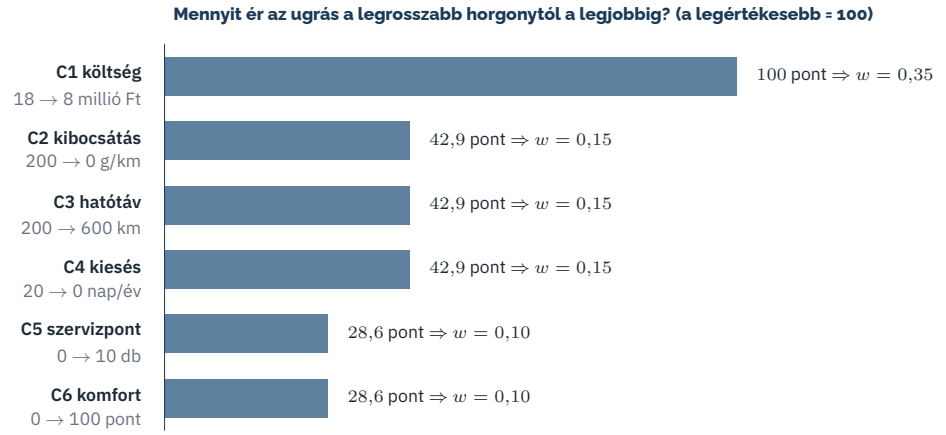
A **swing-eljárás** (Winterfeldt és Edwards 1986; Edwards és Barron 1994) lépései:

1. Képzeljünk el egy olyan alternatívát, amely minden kritériumban a legrosszabb horgonyon áll (18 millió Ft, 200 g/km, 200 km, 20 nap kiesés, 0 szervizpont, 0 komfortpont).

2. Ha egyetlen kritériumot a legjobb horgonyra emelhetnénk, melyiket választanánk? Ez kapja a 100 pontot.
3. A többi kritérium ugrását ehhez mérjük: „a kibocsátás 200-ról 0 g/km-re való javulása a költség 18-ról 8 millió forintra való csökkenésének hányadát éri?”
4. A pontokat elosztjuk az összegükkel, így a súlyok összege 1 lesz.

CASE02 – A bázissúlyok meghatározása

A gazdasági igazgató és a szervizvezető közösen végzi el a swing-eljárást. A legértékesebb ugrásnak a költség 18 millió forintról 8 millió forintra való csökkenését tartják (100 pont). A kibocsátás, a hatótáv és a kiesési idő teljes ugrását egyenként a költségugrás $3/7$ részének értékelik (kb. 42,9 pont), a szervizpontokét és a komfortét $2/7$ részének (kb. 28,6 pont). A pontok összege $100 + 3 \cdot \frac{300}{7} + 2 \cdot \frac{200}{7} = \frac{2000}{7}$, így a súlyok: $w_1 = 0{,}35$; $w_2 = w_3 = w_4 = 0{,}15$; $w_5 = w_6 = 0{,}10$ (8.2. ábra).



8.2. ábra. A swing-súlyozás a CASE02 esetre. Minden sáv azt mutatja, mennyit ér a kritérium teljes ugrása a legrosszabb horgonytól a legjobbig a legértékesebb ugráshoz (100 pont) képest.

A swing-súly **átváltást** fejez ki, és ez az átváltás közvetlenül is kiolvasható. A költség teljes ugrása (10 millió Ft) 100 értékpont a C1 skáláján, súlyozva $0{,}35 \cdot 100 = 35$ pont a végső skálán; egymillió forint tehát $3{,}5$ végső pontot ér. A kiesési idő teljes ugrása (20 nap) $0{,}15 \cdot 100 = 15$ végső pontot ér, egy nap $0{,}75$ pontot. Egy nappal kevesebb kiesés így $0{,}75/3{,}5 \approx 0{,}214$ millió forintot, mintegy **214 ezer forintot** ér a döntéshozónak. Ez a szám válasz a nyitókártya kérdésére, és egyben a súlyok legjobb ellenőrzése: ha a döntéshozó szerint egy nap kiesés valójában 400 ezer forintba kerül (pótjármű, elmaradt munka), akkor a súlyok nem tükrözik a valódi preferenciáit, és felül kell vizsgálni őket.

A súlyt nem lehet a tartománytól függetlenül megadni

Ha a C1 horgonyait 8–18 helyett 10–14 millió forintra szűkítenénk, de a súlyt 0,35-ön hagynánk, egymillió forint már $0{,}35 \cdot 100/4 = 8{,}75$ végső pontot érne $3{,}5$ helyett: a költség észrevétlenül két és félszer fontosabb lenne. A tartomány változásakor a súlyokat újra meg kell határozni. A „fontossági súly” kifejezés ezért félrevezető; pontosabb a *tartományhoz kötött átváltási súly*.

8.3. A súlyozott összeg és feltételei

Miből áll össze a győztes pontszáma?

A táblázat szerint D nyer 73,4 ponttal, A a második 71,8-del. A vezetőség megkérdezi: miben jobb D, és mekkora a különbség valójában?
A lényeg: Az additív pontszám kritériumonkénti hozzájárulásokból épül fel; a részek láthatóvá teszik, mi viszi a rangsort.
Kérdés: Melyik kritérium hozzájárulása választja el leginkább D-t és A-t?
Szemléltető, kitalált helyzet · K04 · Próbáld ki: h08-ertekelo

Az előszűrt a alternatíva **additív értéke**

$$V(a) = \sum_{j=1}^{m} w_j \, v_j(x_{aj}), \qquad w_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} w_j = 1. \tag{8.3}$$

A $w_j v_j(x_{aj})$ tagok a kritériumonkénti **hozzájárulások**. A CASE02 teljes számítása kézzel is követhető. Az értékfüggvények szerint

8.1. táblázat. A CASE02 értékei és additív pontszámai a bázissúlyokkal

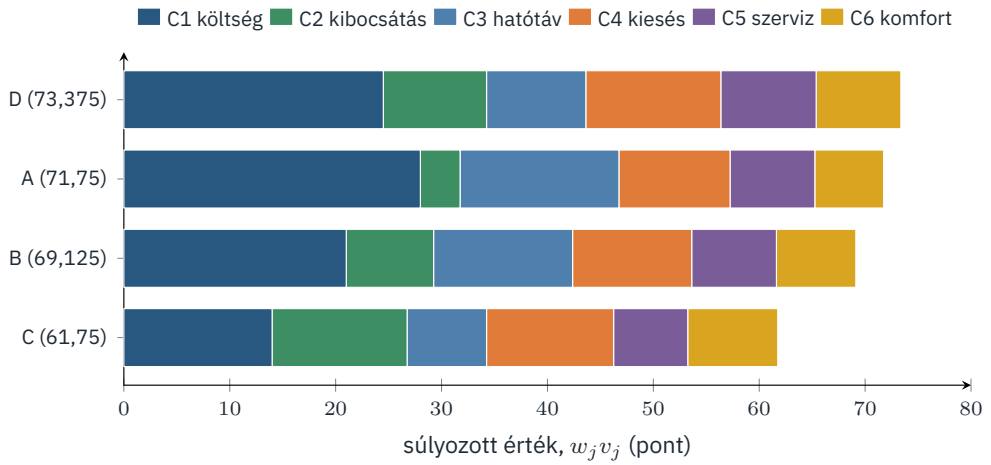
Jelölt	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	V
A	80	25	100	70	80	65	71,75
B	60	55	87,5	75	80	75	69,125
C	40	85	50	80	70	85	61,75
D	70	65	62,5	85	90	80	**73,375**

Az A jelölt értéke például

$$V(\mathrm{A}) = 0{,}35{\cdot}80 + 0{,}15{\cdot}25 + 0{,}15{\cdot}100 + 0{,}15{\cdot}70 + 0{,}10{\cdot}80 + 0{,}10{\cdot}65 = 28 + 3{,}75 + 15 + 10{,}5$$

A bázisrangsor: **D > A > B > C**; az E jelölt az előszűrésen kiesett, ezért nem kap rangsorpozíciót. A 8.3. ábra a hozzájárulásokat mutatja. D és A különbsége

1,625 pont. A A költségben (28 a 24,5-tel szemben) és hatótávban (15 a 9,375-tel szemben) előzi meg D-t, D pedig kibocsátásban (9,75 a 3,75-tel szemben), kiesésben, szervizpontokban és komfortban jobb. A rangsort tehát nem egyetlen kritérium dönti el, hanem az, hogy D sok kisebb előnye együtt valamivel többet ér, mint A két nagy előnye.



8.3. ábra. A CASE02 jelöltjeinek additív pontszáma kritériumonkénti hozzájárulásokra bontva. A sávok hossza a súlyozott érték, a zárójelben a teljes pontszám áll.

Az additív modell két fontos feltételen nyugszik. Az első a **kölcsönös preferenciális függetlenség**: két kritérium közötti átváltás nem függhet attól, milyen szinten áll a többi kritérium (Keeney és Raiffa 1976). Ha a hatótáv értéke attól függ, hány szervizpont van, a feltétel sérül (7.4. szakasz). A második a **teljes kompenzáció**: bármely kritériumban elért hátrány ellensúlyozható elég nagy előnnyel máshol. Ezért kell a nem kompenzálható követelményeket kötelező korlátként, a pontozás előtt kezelni (7.3. szakasz). Ha egyik feltétel sem teljesül, más modell kell: a 11. fejezet outranking-módszerei részben kompenzáló megközelítést kínálnak.

Próbáld ki: súlyozott értékelő

Előbb tippeld meg, melyik jelölt nyerne, ha a költség súlyát 0,50-re emelnéd. Ezután mozgasd a súlyokat; a többi súly a korábbi arányában normálódik. Figyeld a hozzájárulási sávokat, a rangsort és azt a küszöböt, ahol két jelölt helyet cserél. Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h08-ertekelo.html#K04

8.4. Dominancia, kompenzáció és érzékenység

A bázisrangsor egyetlen súlyprofil eredménye. Mielőtt javaslatot tennénk, meg kell vizsgálnunk, mennyire érzékeny a súlyokra. A legegyszerűbb az **egyparaméteres érzékenységvizsgálat**: egyetlen súlyt változtatunk, a többit eredeti egymáshoz viszonyított arányukban újranormáljuk.

> **Újranormalizálási szabály**
>
> Ha a k-adik súlyt t-re állítjuk, a többi súly
>
> $$w_j(t) = w_j^0 \,\frac{1-t}{1-w_k^0}, \qquad j \neq k,$$
>
> így az összegük $1-t$, és egymáshoz viszonyított arányuk nem változik.

Ezzel a szabállyal minden jelölt értéke t lineáris függvénye: $V_a(t) = t\,v_{ak} + (1-t)\,S_a/(1-w_k^0)$, ahol $S_a = \sum_{j\neq k} w_j^0 v_{aj}$. A költségsúlyra ($k=1$, $w_1^0 = 0{,}35$) A és D különbsége

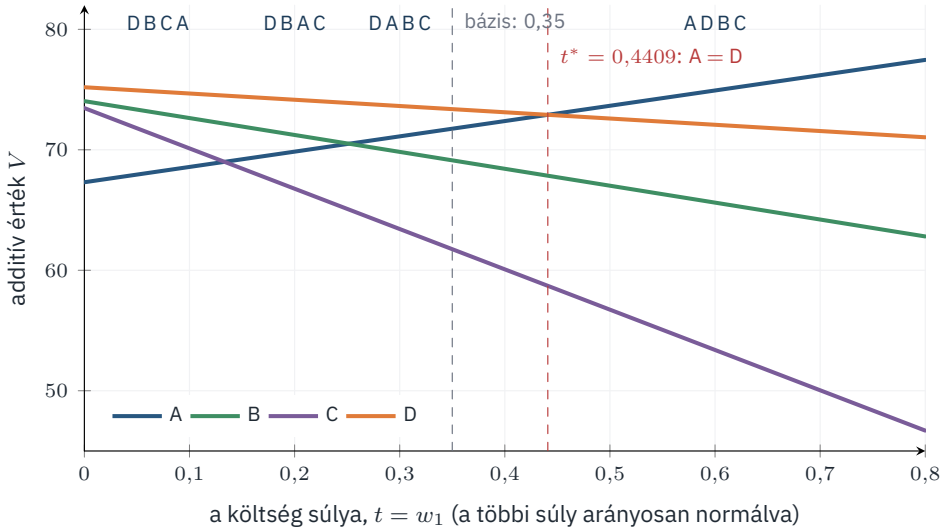
$$V_{\mathrm{A}}(t) - V_{\mathrm{D}}(t) = t\,(80-70) + \frac{1-t}{0{,}65}\sum_{j=2}^{6} w_j^0\,(v_{\mathrm{A}j} - v_{\mathrm{D}j}).$$

A második tag összege $0{,}15\cdot(-40) + 0{,}15\cdot 37{,}5 + 0{,}15\cdot(-15) + 0{,}10\cdot(-10) + 0{,}10\cdot(-15) = -5{,}125$, így a különbség $10t - 7{,}8846\,(1-t)$, amely

$$t^{*} = \frac{7{,}8846}{17{,}8846} = 0{,}44086$$

mellett nulla. Ha a költségsúly 0,4409 fölé nő, A megelőzi D-t (21.2. ábra). A bázissúly 0,35, tehát a költségsúlynak mintegy 9 százalékponttal kellene nőnie a rangsorváltáshoz. Az ábráról az is leolvasható, hogy a teljes rangsor több ponton is változik: 0,14 alatt a sorrend D > B > C > A, 0,14 és 0,26 között D > B > A > C, 0,26 és 0,44 között D > A > B > C, 0,44 fölött A > D > B > C. D tehát a 0–0,44 tartományban végig első.

Hasonló vizsgálat a többi kritériumra is elvégezhető, és tanulságos eredményt ad. A számítás szerint D első helye a költség mellett még három irányban változhat meg: ha a kibocsátás súlya 0,15-ről 0,1145 alá csökken, ha a hatótáv súlya 0,1855 fölé nő, vagy ha a kiesési idő súlya 0,047 alá csökken. Mindhárom esetben A kerül az élre. A kibocsátás és a hatótáv súlyának már 3,5 százalékpontos változása is elég ehhez, ami a súlyfelvétel szokásos bizonytalanságán belül van. D első helye tehát a költségsúlyra nézve viszonylag stabil, a kibocsátás és a hatótáv súlyára nézve viszont érzékeny. Ez nem a



8.4. ábra. Az additív értékek a költségsúly függvényében, a többi súly arányos újranormálásával. A szaggatott függőleges vonalak a bázissúlyt és az A–D rangsorváltás küszöbét jelölik; fent a sávonkénti teljes rangsor.

modell hibája, hanem fontos információ a döntéshozó számára: a választás azon múlik, mennyit ér neki a kisebb kibocsátás a nagyobb hatótávhoz képest. A 12. fejezetben ezt a kérdést több súly egyidejű változtatásával és a rangelfogadottsággal vizsgáljuk tovább.

A D és A közötti 1,625 pontos különbséget ezért nem értelmezzük erős fölényként. A különbség kisebb, mint amekkorát egy-egy bemenet ésszerű bizonytalansága okozhat: ha D ötéves költsége 11 helyett 11,5 millió forint lenne, az D értékét $0{,}35 \cdot 5 = 1{,}75$ ponttal csökkentené, és A kerülne előre. A költségbecslés bizonytalanságát a 16. fejezet szimulációja kezeli.

8.5. A döntési javaslat és a súlyválasztás dokumentálása

Az additív értékelés eredménye nem egyetlen szám, hanem egy **feltételes javaslat**: mit javasolunk, milyen preferenciák mellett, és mi változtatná meg. A CASE02-re ez így hangozhat:

> A bázissúlyokkal (költség 0,35; kibocsátás, hatótáv és kiesés 0,15; szervizpont és komfort 0,10) a D jelölt (elektromos jármű vásárlással) kapja a legmagasabb értéket (73,4 pont), közvetlenül A (hibrid vásárlással, 71,8 pont) előtt. D első helye megmarad, ha a költségsúly 0,44 alatt, a hatótáv súlya 0,185 alatt és a kibocsátás

súlya 0,115 fölött marad. A rangsor tehát azon múlik, mennyit ér a szervezetnek a kisebb kibocsátás a nagyobb hatótávhoz képest; ezt a döntéshozónak kifejezetten meg kell erősítenie. A két jelölt különbsége kicsi, egy fél millió forintos költségtöbblet D-nél már megfordítaná. Javasoljuk ezért a D és az A ajánlat költségbecslésének pontosítását és a bizonytalanság számszerű vizsgálatát a végső döntés előtt.

A súlyválasztás dokumentálása legalább a következőket tartalmazza: a horgonyokat és azok indoklását; az értékfüggvények alakját; a swing-eljárás menetét, résztvevőit és a pontokat; a kapott átváltások ellenőrzését (például „egy nap kiesés 214 ezer Ft-ot ér”); a preferenciális függetlenség vizsgálatát; és az érzékenységvizsgálat eredményét a rangsorváltási küszöbökkel. Ha a döntéshozó egy átváltást nem fogad el, nem a végeredményt kell kozmetikázni, hanem a súlyokat vagy az értékfüggvényeket kell újra meghatározni.

Átviteli példa: célértékes tulajdonság a laptopválasztásban (CASE01)

A CASE01-ben a kijelzőméret célértékes kritérium: a 14 col a legjobb (100 pont), a 12,5 és a 17 col 0 pont. L3 és L5 (14 col) 100, L1 (13,6 col) 73,3, L2 (15,6 col) 46,7, L4 (16 col) 33,3 pontot kap. Ha a kijelzőt lineáris haszonkritériumként kezelnénk („a nagyobb a jobb”), L4 kapná a legtöbb pontot, pedig a hallgató számára a nagy kijelző a hordozhatóság rovására megy. Az értékfüggvény alakja tehát nem technikai részlet: a preferencia lényegét fejezi ki.

Az eredmény utólagos „igazítása”

Ha a végeredmény nem tetszik, kísértés a súlyokat addig csavarni, amíg a kívánt jelölt nyer. Ez a modellt érvekből díszletté változtatja. A súlyokat a jelöltek ismerete előtt, a horgonyokhoz kötve kell meghatározni, és a változtatásokat a döntési naplóban indokolni. Az érzékenységvizsgálat éppen arra jó, hogy őszintén megmutassa, milyen preferenciák mellett nyerne a másik jelölt; ezt a döntéshozó elé kell tárni, nem elrejteni.

Összefoglalás

- Az értékfüggvény a nyers teljesítményt rögzített horgonyokhoz kötött 0–100-as skálára képezi; lehet lineáris, célértékes vagy szakaszonként lineáris, és alakját a döntéshozó preferenciái határozzák meg.
- A horgonyokat a jelöltektől függetlenül rögzítjük, hogy egy új jelölt ne írja át a pontszámokat.
- A swing-súly a kritérium teljes tartományának bejárásához kötött átváltást fejez ki; a súly jelentése a tartománytól függ, ezért a tartomány változásakor újra kell határozni.
- Az additív érték a kritériumonkénti hozzájárulások összege; a CASE02 bázisrangsora D (73,375) > A (71,75) > B (69,125) > C (61,75).

- Az additív modell feltétele a kölcsönös preferenciális függetlenség és a teljes kompenzáció; a nem kompenzálható követelményeket korlátként kell kezelni.
- Az egyparaméteres érzékenységvizsgálat arányos újranormálással lineáris; a CASE02-ben A a költségsúly $t^{*} = 0{,}4409$ fölötti értékénél előzi meg D-t, de a kibocsátás és a hatótáv súlyának 3,5 százalékpontos változása is elég ehhez.
- Az eredmény feltételes javaslat a preferenciák, a küszöbök és a további vizsgálatok megnevezésével.

Önellenőrzés

1. Mit jelent a swing-súly, és miért nem lehet a kritérium tartományától függetlenül megadni?
2. Számold ki a B jelölt additív értékét a bázissúlyokkal, és ellenőrizd a táblázatot!
3. A bázissúlyok mellett hány forintot ér a döntéshozónak 100 km többlethatótáv?
4. Ha a hatótáv értékfüggvénye nem lineáris, hanem 250 km fölött lassan telítődik, hogyan változhat A és D sorrendje? Indokold minőségileg!
5. Egy kolléga szerint a TOPSIS és az additív modell eltérő rangsora azt bizonyítja, hogy valamelyik számítás hibás. Mit válaszolnál?

Megoldás.

1. A swing-súly azzal arányos, mennyit ér a kritérium legrosszabb horgonyától a legjobbig való ugrás a többi ugráshoz képest. Mivel az ugrás nagysága a horgonyok közötti tartománytól függ, a súly is attól függ: szűkebb tartományhoz ugyanaz a súly erősebb átváltást jelent.
2. $0{,}35 \cdot 60 + 0{,}15 \cdot 55 + 0{,}15 \cdot 87{,}5 + 0{,}15 \cdot 75 + 0{,}10 \cdot 80 + 0{,}10 \cdot 75 = 21 + 8{,}25 + 13{,}125 + 11{,}25 + 8 + 7{,}5 = 69{,}125$.
3. 100 km a C3 skáláján 25 értékpont, súlyozva $0{,}15 \cdot 25 = 3{,}75$ végső pont. Egymillió forint 3,5 végső pontot ér, így 100 km $3{,}75/3{,}5 \approx 1{,}07$ millió forintot.
4. Ha a 250 km fölötti hatótáv alig ér többet, A 600 km-es és D 450 km-es hatótávja közötti különbség értéke csökken. Mivel A a hatótávban szerzett nagy előnyt D-vel szemben, A pontszáma relatíve csökken, és D előnye nő.
5. Az eltérő rangsor nem automatikusan számolási hiba: a két módszer más geometriai és preferenciafeltevésekre épül, és az azonos súlyszámok jelentése sem ugyanaz bennük. Mindkét számítást ellenőrizni kell a referenciaértékekkel, és ha helyesek, meg kell vizsgálni, melyik feltevés tükrözi jobban a döntéshozó preferenciáit (10. fejezet).

Továbbolvasás

- Keeney, R. L., Raiffa, H. (1976): *Decisions with Multiple Objectives* – az additív értékmodell és a preferenciális függetlenség elmélete (Keeney és Raiffa 1976).
- von Winterfeldt, D., Edwards, W. (1986): *Decision Analysis and Behavioral Research* – az értékfüggvények és a swing-súlyozás felvétele (Winterfeldt és Edwards 1986).

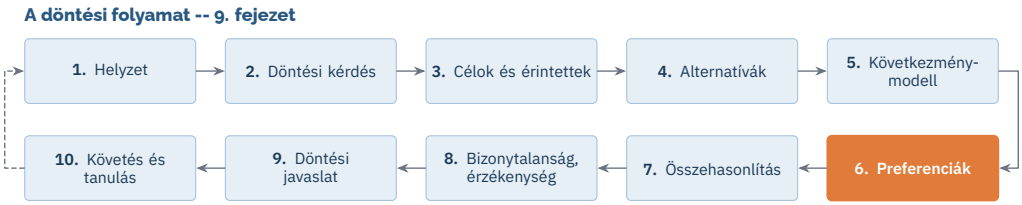
- Edwards, W., Barron, F. H. (1994): SMARTS and SMARTER (Edwards és Barron 1994).
- Belton, V., Stewart, T. J. (2002), 5. fejezet; Goodwin, P., Wright, G. (2014), 3. fejezet – gyakorlati bevezetés (Belton és Stewart 2002; Goodwin és Wright 2014).
- HM Treasury és DESNZ (2024) – a súlyozás és az érzékenységvizsgálat dokumentálása a közszférában (HM Treasury és Department for Energy Security and Net Zero 2024).

Gyakorlat

A Döntési műhely 8. műhelyében a súlyozott értékelővel (H08) a CASE02 teljes számítását, a súlyok változtatását és a rangsorváltási küszöböket próbálhatod ki. Az E08 munkafüzet látható képletekkel ugyanezt a számítást végzi, az N08 notebook pedig Pythonban számolja végig, ábrázolja a küszöböt, és ellenőrzi, hogy a három eszköz eredménye 10^{-8} pontos eltérésen belül egyezik.

9.

AHP: páronkénti összehasonlítás



Mennyire illenek össze az ítéleteid?

Misi három albérlet közül választ, és páronként mondja ki, melyik szempont fontosabb neki. A közelség kétszer fontosabb az árnál, az ár kétszer a méretnél, aztán a méretet mégis fontosabbnak mondja a közelségnél. Amikor a nővére egymás mellé írja a három ítéletet, Misi elneveti magát, és újragondolja őket.

A lényeg: Ha a páronkénti ítéleteket együtt vizsgáljuk, észrevehetjük a tisztázásra szoruló ellentmondásokat.

Kérdés: Melyik összehasonlítást gondolnád újra, ha a három ítéletet egyszerre látnád?

Szemléltető, kitalált helyzet · F09 · Próbáld ki: h09-ahp

Sokan könnyebben mondják meg két dolog közül, melyik a fontosabb és mennyivel, mint hogy hat szempontnak egyszerre adjanak súlyt. Az **analitikus hierarchia eljárás** (*analytic hierarchy process*, AHP) erre a képességre épít. Thomas Saaty az 1970-es években dolgozta ki (Saaty 1980, 1990), és azóta a legszélesebb körben alkalmazott többkritériumos módszerek közé tartozik. Az AHP három dolgot tesz: hierarchiába rendezi a döntési problémát, páronkénti ítéletekből prioritásokat számol, és méri, mennyire következetesek ezek az ítéletek. Ez a fejezet mindhárom lépést bemutatja, és azt is, mire kell figyelni, ha az AHP-val kapott súlyokat egy additív értékmodellben használjuk.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- egy döntési problémát hierarchiába rendezni, és helyesen megfogalmazni az összehasonlítási kérdést;
- felépíteni egy pozitív reciprok páros összehasonlítási mátrixot, és ellenőrizni a reciprok tulajdonságot;
- kiszámítani a prioritásokat a fő sajátvektorral és a geometriai átlaggal, és megmagyarázni a kettő különbségét;
- kiszámítani és értelmezni a konzisztenciaindexet és a konzisztenciaarányt;
- elkülöníteni a teljes AHP-t és az AHP-val súlyozott értékmodellt;
- csoportos ítéleteket összesíteni, és megnevezni az összesítés két módját.

A fejezet a hierarchiával és az összehasonlítási kérdéssel kezd, mert a jó kérdés itt is a helyes eredmény előfeltétele. Ezután a páros összehasonlítási mátrixot, a prioritások számítását és a konzisztencia mérését tárgyalja. A negyedik szakasz a sajátvektoros és a geometriai átlagos eljárást veti össze, az ötödik az AHP-súlyok és a swing-súlyok kapcsolatát vizsgálja, az utolsó pedig a csoportos ítéleteket.

9.1. Hierarchia és összehasonlítási kérdés

Az AHP első lépése a döntési probléma **hierarchiába** rendezése: legfelül a fő cél, alatta a célcsoportok, alattuk a kritériumok, a legalsó szinten pedig az alternatívák. Ez lényegében a 2.2.2. szakasz célfája, kiegészítve az alternatívák szintjével. Minden szinten az azonos szülőhöz tartozó elemeket hasonlítjuk össze páronként a szülőre való tekintettel: a három célcsoportot a fő célra, a gazdaságosság két kritériumát a gazdaságosságra nézve, és így tovább.

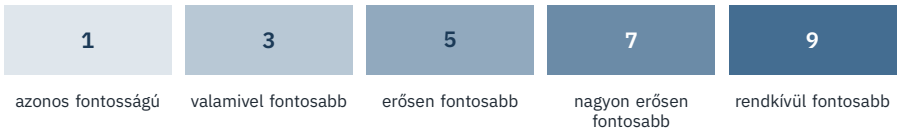
A kérdés megfogalmazása kulcsfontosságú. A „mennyivel fontosabb a gazdaságosság a környezeti hatásnál?” kérdés ugyanabban a csapdában van, mint a 8.2. szakaszban a tartomány nélküli fontossági kérdés: nem mondja meg, *mekkora* gazdaságossági és környezeti különbségről van szó. A jól megfogalmazott kérdés a tartományokra hivatkozik: „a mi döntésünkben a jelöltek közötti költségkülönbség (8–18 millió Ft) mennyivel fontosabb, mint a kibocsátási különbség (0–200 g/km)?” Ezzel az AHP-ítélet közel kerül a swing-ítélethez.

9.2. A pozitív reciprok mátrix és az ítéleti skála

Mennyivel fontosabb?

Három célcsoport közül kell súlyt adni: gazdaságosság, környezet, használhatóság. Hármat egyszerre nehéz összevetni, de két-két szempontról könnyen megmondod, melyik a fontosabb, és nagyjából mennyivel.
A lényeg: A páronkénti ítéletekből súlyok számolhatók, és az ítéletek következetessége is mérhető.
Kérdés: Hányszor fontosabb neked a gazdaságosság a környezeti hatásnál ebben a döntésben?
Szemléltető, kitalált helyzet · K05 · Próbáld ki: h09-ahp

A páronkénti ítéleteket egy $n \times n$-es **páros összehasonlítási mátrixba** gyűjtjük. Az a_{ij} elem azt fejezi ki, hányszor fontosabb az i-edik elem a j-ediknél. Saaty 1–9-es **ítéleti skálát** javasolt (9.1. ábra): az 1 azonos fontosságot, a 3 valamivel, az 5 erősen, a 7 nagyon erősen, a 9 rendkívül fontosabbat jelent, a páros számok a köztes fokozatok (Saaty 1980).



A páros értékek (2, 4, 6, 8) a köztes fokozatok; a fordított összehasonlítás reciprok értéket kap ($a_{ji} = 1/a_{ij}$).

9.1. ábra. Saaty ítéleti skálája. A páros értékek a köztes fokozatok, a fordított összehasonlítás reciprok értéket kap.

Pozitív reciprok mátrix

Az $A = (a_{ij})$ mátrix **pozitív reciprok**, ha minden eleme pozitív, és $a_{ji} = 1/a_{ij}$, $a_{ii} = 1$. Egy $n \times n$-es mátrixhoz így elég $n(n-1)/2$ ítéletet megadni; három elemhez hármat, hat elemhez tizenötöt. A mátrix **konzisztens**, ha minden i, j, k-ra $a_{ik} = a_{ij}\,a_{jk}$: ha A kétszer fontosabb B-nél, B kétszer C-nél, akkor A négyszer fontosabb C-nél.

Egy konzisztens mátrix

Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix konzisztens: $a_{13} = 4 = a_{12}\,a_{23} = 2 \cdot 2$. Konzisztens mátrixnál minden oszlop arányos ugyanazzal a súlyvektorral; itt az első oszlop $(1;\ 1/2;\ 1/4)$, normálva $(4/7;\ 2/7;\ 1/7) \approx (0{,}571;\ 0{,}286;\ 0{,}143)$. Ez a prioritásvektor.

9.3. Prioritások a fő sajátvektorból

A valódi ítéletek ritkán teljesen konzisztensek. Saaty ezért azt javasolta, hogy a prioritásokat a mátrix **fő jobb sajátvektorából** számoljuk:

$$A\,w = \lambda_{\max}\,w, \qquad \sum_{i} w_i = 1, \tag{9.1}$$

ahol $\lambda_{\max}$ a legnagyobb sajátérték. Pozitív mátrixnak a Perron–Frobenius-tétel szerint van egyértelmű legnagyobb pozitív sajátértéke és pozitív sajátvektora. Konzisztens mátrixnál $\lambda_{\max} = n$, és a sajátvektor a fenti súlyvektor; minél kevésbé konzisztens a mátrix, annál nagyobb $\lambda_{\max}$ az n-nél. A sajátvektor egyszerű közelítő számítása a **hatványiteráció**: egy tetszőleges pozitív kiinduló vektort ismételten megszorzunk A-val és normálunk, amíg a változás egy rögzített küszöb alá nem esik. Az E09 munkafüzet makró nélkül ezt az eljárást használja.

CASE02 – A célcsoportok súlyozása AHP-val

A gazdasági igazgató a három célcsoportot hasonlítja össze. Ítélete szerint a gazdaságosság háromszor fontosabb a környezetnél, a használhatóság szintén háromszor, a gazdaságosság és a használhatóság pedig egyformán fontos. A mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

konzisztens ($a_{13} = 1 = a_{12}\,a_{23} = 3 \cdot \tfrac{1}{3}$), a prioritásvektor $(3/7;\ 1/7;\ 3/7) \approx (0{,}429;\ 0{,}143;\ 0{,}429)$, $\lambda_{\max} = 3$ (9.2. ábra, bal oldal).

9.4. Konzisztenciaindex és konzisztenciaarány

Az ítéletek következetességét Saaty két mutatóval méri:

$$\mathrm{CI} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \qquad \mathrm{CR} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{RI}_n}, \tag{9.2}$$

ahol RI_n a **véletlen index**: véletlenszerűen kitöltött $n \times n$-es reciprok mátrixok átlagos CI-értéke. Saaty eredeti táblázata szerint $\mathrm{RI}_3 = 0{,}58$, $\mathrm{RI}_4 = 0{,}90$,

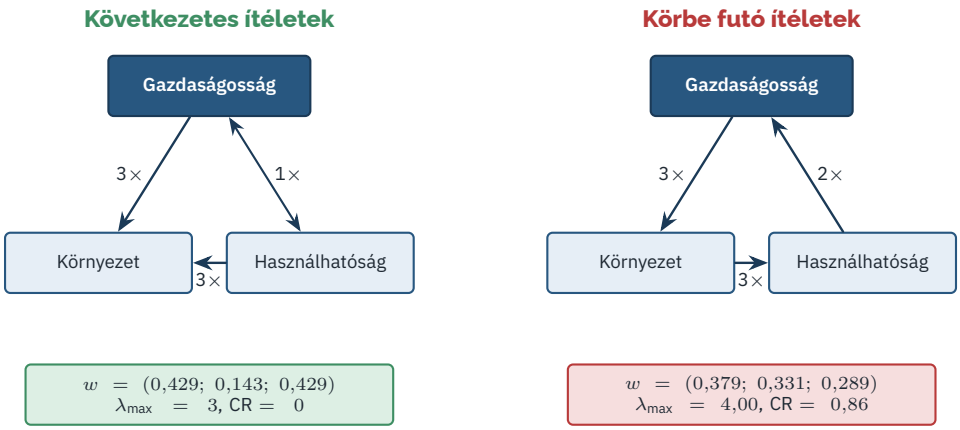
$\mathrm{RI}_5 = 1{,}12$, $\mathrm{RI}_6 = 1{,}24$ (Saaty 1980). Más szerzők kissé eltérő táblázatokat közöltek, ezért a használt táblázatot mindig meg kell nevezni. A gyakran idézett $\mathrm{CR} \leq 0{,}10$ határ *gyakorlati jelzőszám*, nem statisztikai próba. Egy- és kételemű mátrixnál a CR nem értelmezett: egyetlen ítélet nem lehet következetlen önmagával.

Körbe futó ítéletek

Egy másik résztvevő szerint a gazdaságosság háromszor fontosabb a környezetnél, a környezet háromszor a használhatóságnál, de a használhatóság kétszer fontosabb a gazdaságosságnál. Az ítéletek körbe futnak (9.2. ábra, jobb oldal). A mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

amelyre $\lambda_{\max} = 4{,}002$, $\mathrm{CI} = (4{,}002 - 3)/2 = 0{,}501$ és $\mathrm{CR} = 0{,}501/0{,}58 = 0{,}864$. A prioritásvektor $(0{,}379;\ 0{,}331;\ 0{,}289)$ szinte egyenletes: a körbe futó ítéletek kioltják egymást. A magas CR jelzi, hogy az ítéleteket újra kell gondolni.



9.2. ábra. Következetes és körbe futó páros ítéletek. A nyíl a fontosabb elem felé mutat, a szám az ítélet erőssége. A konzisztenciaarány jelzi az ellentmondást, de nem mondja meg, melyik ítéletet kell módosítani.

Az alacsony CR nem bizonyítja a helyességet

A konzisztenciaarány csak azt méri, hogy az ítéletek *egymással* összhangban vannak-e. Egy teljesen konzisztens mátrix is lehet téves, ha a döntéshozó következetesen rosszul ítél, vagy ha a kérdést tartomány nélkül tette fel. Fordítva, egy kissé magasabb CR nem feltétlenül baj: négy-öt elemnél a valódi ítéletek

ritkán teljesen konzisztensek. A magas CR beszélgetésre hív: melyik ítéletben a legnagyobb az eltérés, és miért?

Próbáld ki: AHP-ítéletek

Előbb tippeld meg, mekkora lesz a CR, ha a harmadik ítéletet megfordítod. Ezután állítsd be a három páros ítéletet a csúszkákkal. Az alkalmazás kiszámítja a sajátvektoros és a geometriai átlagos prioritásokat, a $\lambda_{\max}$-ot, a CI-t és a CR-t, és megmutatja, melyik ítélet tér el leginkább a többiből következő értéktől.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h09-ahp.html#K05

9.5. Sajátvektor és geometriai átlag

A sajátvektor mellett a prioritások számításának másik elterjedt módja a **sorok geometriai átlaga**: minden sor elemeit összeszorozzuk, n-edik gyököt vonunk, majd normálunk (Crawford és Williams 1985):

$$w_i = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{1/n}}{\sum_{k}\left(\prod_{j=1}^{n} a_{kj}\right)^{1/n}}. \tag{9.3}$$

Konzisztens mátrixnál a két eljárás azonos eredményt ad. Inkonzisztens mátrixnál általában kissé eltérnek; 3×3-as mátrixnál azonban a kettő mindig egybeesik, amit a fenti körbe futó példa is mutat. A geometriai átlagnak két előnye van: egyszerűen számolható (egy táblázatkezelőben egyetlen képlet), és a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének megoldása, így statisztikailag is értelmezhető. A sajátvektor Saaty eredeti javaslata, és a konzisztenciaindex is rá épül. A könyv alapeljárása a fő sajátvektor; a geometriai átlagot összehasonlító eljárásként mutatjuk be, és az N09 notebook mindkettőt kiszámolja.

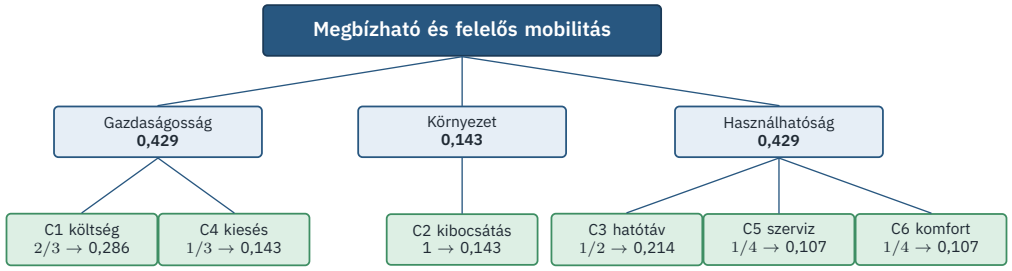
9.6. Teljes AHP és AHP-val súlyozott értékmodell

Az AHP-t kétféleképpen szokás alkalmazni, és fontos, hogy megnevezzük, melyiket használjuk.

- A **teljes AHP** a hierarchia minden szintjén páronként hasonlít össze, az alternatívákat is: „a mobilitási döntésben A mennyivel jobb B-nél a költség szempontjából?” Az alternatívák prioritásait a kritériumok súlyaival összegezzük.

- Az **AHP-val súlyozott értékmodell** csak a kritériumok súlyait határozza meg páros összehasonlítással, az alternatívákat pedig értékfüggvényekkel értékeli, ahogy a 8. fejezetben.

A teljes AHP egyik ismert, vitatott tulajdonsága, hogy egy új, akár irreleváns alternatíva felvétele megváltoztathatja a meglévők sorrendjét (*rangsorfordulás*, *rank reversal*). Belton és Gear mutatott rá elsőként, hogy ez a prioritások normálásának módjából ered (Belton és Gear 1983). Az AHP-val súlyozott értékmodellben, rögzített horgonyokkal, ez a jelenség nem fordul elő, mert az alternatívák értékei nem függnek egymástól.



9.3. ábra. A CASE02 hierarchiája AHP-val kapott helyi prioritásokkal és a belőlük számított globális súlyokkal. A globális súly a célcsoport prioritásának és a helyi prioritásnak a szorzata.

A CASE02-ben a célcsoportok súlya $(0{,}429;\ 0{,}143;\ 0{,}429)$. Ha a gazdasági igazgató a gazdaságosságon belül a költséget kétszer olyan fontosnak tartja, mint a kiesést, a használhatóságon belül pedig a hatótávot kétszer olyan fontosnak, mint a szervizpontokat és a komfortot, a globális súlyok: költség 0,286, kiesés 0,143, kibocsátás 0,143, hatótáv 0,214, szervizpont és komfort 0,107 (9.3. ábra). Ezekkel a súlyokkal az additív értékek: A 73,39, D 73,04, B 71,07, C 62,32, vagyis **A kerül az élre**, alig megelőzve D-t.

Az eltérés a bázissúlyoktól (költség 0,35, hatótáv 0,15) két forrásból ered. Az egyik, hogy a páros ítéletek a hatótávnak a bázisnál nagyobb súlyt adnak; a 8.4. szakaszban láttuk, hogy 0,1855 fölötti hatótávsúlynál A kerül előre. A másik, hogy az AHP-kérdések nem hivatkoztak a tartományokra, így nem világos, hogy az ítéletek ugyanazt az átváltást fejezik-e ki, mint a swing-súlyok. A tanulság nem az, hogy az egyik eljárás jó, a másik rossz, hanem az, hogy az eltérést a döntéshozóval tisztázni kell: melyik ítélet tükrözi jobban a valódi átváltásait?

9.7. Csoportos ítélet és érzékenység

Ha több résztvevő ad páros ítéleteket, kétféleképpen lehet összesíteni őket (Forman és Peniwati 1998). Az **ítéletek összesítésekor** (*aggregation of individual judgments*, AIJ) a résztvevők ítéleteinek elemenkénti geometriai átlagából egyetlen mátrixot képezünk, és abból számolunk prioritásokat. A geometriai átlag az egyetlen olyan átlag, amely megőrzi a reciprok tulajdonságot (Aczél és Saaty 1983). A **prioritások összesítésekor** (*aggregation of individual priorities*, AIP) mindenki saját prioritásvektort kap, és ezeket átlagoljuk. Az AIJ akkor indokolt, ha a csoport egyetlen közös döntéshozóként működik; az AIP akkor, ha az egyének külön-külön döntéshozók, akiknek a nézeteit össze akarjuk vetni.

Két résztvevő összesítése

A gazdasági igazgató prioritásai $(0{,}429;\ 0{,}143;\ 0{,}429)$. A fenntarthatósági felelős szerint a gazdaságosság és a környezet egyformán fontos, a használhatóság mindkettőnél kétszer fontosabb; prioritásai $(0{,}25;\ 0{,}25;\ 0{,}50)$. Az ítéletek geometriai átlagából (AIJ) $(0{,}334;\ 0{,}193;\ 0{,}473)$, a prioritások számtani átlagából (AIP) $(0{,}339;\ 0{,}196;\ 0{,}464)$ adódik. A különbség itt kicsi, de az összesítés módját mindig meg kell nevezni. A súlyok összevonása helyett gyakran informatívabb, ha az egyéni profilokat külön is megvizsgáljuk; a 12. fejezet ezt teszi.

Átviteli példa: projektprioritások két érintetti profillal (CASE03)

A CASE03 nyolc projektjének értékelésekor a pénzügyi vezető és a fenntarthatósági felelős két célcsoportot, az eredményértéket és a fenntarthatósági hozzájárulást hasonlítja össze. A pénzügyi vezető szerint az eredmény háromszor fontosabb $(0{,}75;\ 0{,}25)$, a fenntarthatósági felelős szerint a kettő egyformán fontos $(0{,}5;\ 0{,}5)$. A két profil eltérő projektsorrendet ad. A 13. fejezetben látni fogjuk, hogy a projektek sorrendje és a ténylegesen finanszírozható csomag eltérhet, ezért a végső döntéshez a csomagokat kell összevetni.

Összefoglalás

- Az AHP a problémát hierarchiába rendezi, páronkénti ítéletekből prioritásokat számol, és méri az ítéletek következetességét.
- A páros összehasonlítási mátrix pozitív reciprok; konzisztens, ha minden ítélet következik a többiből ($a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$).
- A prioritásokat a fő jobb sajátvektor adja; konzisztens mátrixnál $\lambda_{\max} = n$, és $\mathrm{CI} = (\lambda_{\max} - n)/(n-1)$, $\mathrm{CR} = \mathrm{CI}/\mathrm{RI}_n$; a 0,10-es határ gyakorlati jelzőszám, a használt RI-táblázatot meg kell nevezni.
- Az alacsony CR nem bizonyítja az ítéletek helyességét, a magas CR beszélgetésre hív.

- A geometriai átlagos eljárás egyszerűbb, 3×3-as mátrixnál egybeesik a sajátvektorral.
- A teljes AHP és az AHP-val súlyozott értékmodell különböző eljárás; a teljes AHP-ban rangsorfordulás léphet fel.
- A tartomány nélküli AHP-ítéletek más átváltást fejezhetnek ki, mint a swing-súlyok; a CASE02-ben az AHP-súlyokkal A kerül az élre.
- A csoportos ítéletek összesíthetők az ítéletek geometriai átlagával (AIJ) vagy a prioritások átlagával (AIP); a módot meg kell nevezni.

Önellenőrzés

1. Hány független ítéletet kell megadni egy 5×5-ös páros összehasonlítási mátrixhoz?
2. Konzisztens-e a következő mátrix: $a_{12} = 2$, $a_{23} = 3$, $a_{13} = 5$? Ha nem, mekkora a_{13} tenné azzá?
3. Egy 4×4-es mátrix legnagyobb sajátértéke 4,24. Mekkora a CI és a CR Saaty táblázatával?
4. Mi a különbség a teljes AHP és az AHP-val súlyozott értékmodell között, és melyikben fordulhat elő rangsorfordulás?
5. Egy elemző szerint a CR = 0,03 bizonyítja, hogy a csoport súlyai helyesek. Mit vetnél ellen?

Megoldás.

1. $n(n-1)/2 = 5 \cdot 4/2 = 10$ ítéletet.
2. Nem, mert $a_{12}\,a_{23} = 6 \neq 5$. Konzisztens akkor lenne, ha $a_{13} = 6$.
3. $\text{CI} = (4{,}24 - 4)/3 = 0{,}08$; $\text{CR} = 0{,}08/0{,}90 \approx 0{,}089$, a 0,10-es gyakorlati határ alatt.
4. A teljes AHP az alternatívákat is páronként hasonlítja össze, és az alternatívák prioritásait normálja; az AHP-val súlyozott értékmodell csak a kritériumsúlyokat határozza meg páros összehasonlítással, az alternatívákat rögzített horgonyú értékfüggvényekkel értékeli. A rangsorfordulás a teljes AHP-ban fordulhat elő.
5. A CR csak az ítéletek belső következetességét méri, a helyességüket nem. Egy következetesen téves vagy tartomány nélkül feltett kérdésre adott ítéletsor is lehet konzisztens. Az átváltásokat külön ellenőrizni kell a döntéshozóval.

Továbbolvasás

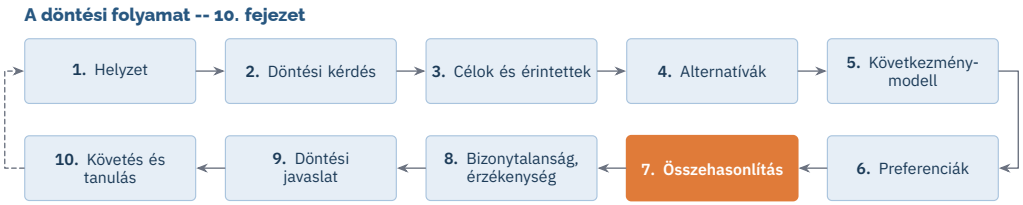
- Saaty, T. L. (1980): *The Analytic Hierarchy Process*; Saaty, T. L. (1990): How to make a decision – az eljárás eredeti leírásai (Saaty 1980, 1990).
- Crawford, G., Williams, C. (1985) – a geometriai átlagos eljárás (Crawford és Williams 1985).
- Aczél, J., Saaty, T. L. (1983); Forman, E., Peniwati, K. (1998) – a csoportos ítéletek összesítése (Aczél és Saaty 1983; Forman és Peniwati 1998).
- Belton, V., Gear, T. (1983) – a rangsorfordulás problémája (Belton és Gear 1983).

Gyakorlat

A Döntési műhely 9. műhelyében az AHP-alkalmazással (H09) páros ítéleteket adhatsz meg, és vizsgálhatod a prioritásokat és a konzisztenciát. Az E09 munkafüzet hatványiterációval, makró nélkül számolja a sajátvektort, az N09 notebook pedig a sajátvektoros és a geometriai átlagos eljárást veti össze, és ellenőrzi a munkafüzet eredményét.

10.

TOPSIS és az ideális megoldás közelsége



Milyen messze van az ideális?

Emese csapata új szolgálati autót keres, és az ötletbörzén mindenki ugyanazt kívánja: legyen a legolcsóbb, a legtisztább és a legnagyobb hatótávú. Emese felrajzolja a táblára ezt az álomautót, mellé pedig a valódi jelölteket. Egyik sem ilyen, ezért az a kérdés, mit jelent közel lenni hozzá.

A lényeg: Az ideálhoz való közelség a választott skáláktól, a súlyoktól és a távolság fogalmától is függ.

Kérdés: Melyik tulajdonságban fogadnál el nagyobb eltérést az ideálistól a saját helyzetedben?

Szemléltető, kitalált helyzet · F10 · Próbáld ki: h10-topsis

Az additív értékmodell azt kérdezi, *mennyi értéket* gyűjt össze egy jelölt a kritériumokon. Egy másik, szemléletes kérdés is feltehető: *milyen közel* van egy jelölt egy elképzelt ideális megoldáshoz, és milyen messze a legrosszabbtól? Erre épül a **TOPSIS** (*Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution*), amelyet Hwang és Yoon 1981-ben mutatott be (Hwang és Yoon 1981). A módszer egyszerű, geometriailag jól elképzelhető, ezért széles körben használják (Behzadian és mtsai. 2012). Ugyanakkor a CASE02-n más rangsort ad, mint az additív modell, és ez a fejezet egyik fő tanulsága: a két eredmény eltérése nem hiba, hanem a módszerek eltérő feltevéseinek következménye.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- megmagyarázni az ideálpont és a negatív ideál gondolatát, és a távolság megválasztásának szerepét;
- vektornormalizálással és súlyozással felírni a súlyozott normált mátrixot;
- meghatározni a pozitív és a negatív ideált haszon- és költségkritériumra;
- kiszámítani a távolságokat és a relatív közelséget egy kis, kézzel követhető példán;
- bemutatni, hogyan változik az eredmény a normalizálással és az alternatívakészlettel;
- értelmezni a TOPSIS és az additív értékmodell eltérő rangsorát.

A fejezet először az ideálpont gondolatát mutatja be. Ezután a TOPSIS négy számítási lépését veszi sorra egy háromjelöltes, kétkritériumos kézi példán, majd a teljes CASE02-n. A negyedik szakasz a normalizálás és az alternatívakészlet változásának hatását vizsgálja, az ötödik az additív modellel veti össze az eredményt.

10.1. Az ideálpont és a távolság megválasztása

Közel a legjobbhoz vagy távol a legrosszabbtól?

Két jelölt ugyanolyan messze van az ideális megoldástól, de az egyik sokkal közelebb áll a legrosszabbhoz. Egy harmadik mindenben középszerű, mégis jól szerepel.
A lényeg: A TOPSIS egyszerre méri a közelséget az ideálhoz és a távolságot a legrosszabbtól; a kettő aránya adja a rangsort.
Kérdés: Melyik számít neked többet: elkerülni a legrosszabbat, vagy megközelíteni a legjobbat?
Szemléltető, kitalált helyzet · K06 · Próbáld ki: h10-topsis

Ha minden kritériumban kiválasztjuk a jelöltek legjobb értékét, egy **pozitív ideált** kapunk: egy elképzelt jelöltet, amely mindenben a legjobb. A CASE02-ben ez 10 millió forintba kerülne, 30 g/km-t bocsátana ki, 600 km-t menne, évi 3 napot állna, 9 szervizpontja és 85 komfortpontja lenne. Ilyen jelölt nincs. Ugyanígy a legrosszabb értékekből egy **negatív ideál** állítható elő. A TOPSIS alapgondolata, hogy egy jó jelölt közel van a pozitív és távol a negatív ideáltól (10.1. ábra).

A „közel” és a „távol” egy **távolságfogalmat** feltételez, és a választásnak következménye van. A TOPSIS alapváltozata az euklideszi távolságot használja, amelyben a nagy eltérések négyzetesen számítanak: egy kritériumban elszenvedett nagy hátrány erősebben rontja a helyzetet, mint több kisebb. Ez éles különbség az additív modellhez képest, amelyben a hátrányok

lineárisan összegződnek. A távolságot továbbá csak akkor lehet értelmezni, ha a kritériumok közös skálán vannak, ezért a TOPSIS normalizálással kezd.

10.2. A számítás lépései

A TOPSIS négy lépésben számol (Hwang és Yoon 1981).

1. Vektornormalizálás. Minden oszlopot elosztunk a hosszával:

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_i x_{ij}^2}}. \tag{10.1}$$

2. Súlyozás. A normált értékeket egyszer szorozzuk a súlyokkal: $z_{ij} = w_j \, r_{ij}$.

3. Ideálok. A pozitív ideál haszonkritériumnál az oszlop maximuma, költségkritériumnál a minimuma; a negatív ideál fordítva:

$$z_j^+ = \begin{cases} \max_i z_{ij} & \text{haszonkritérium} \\ \min_i z_{ij} & \text{költségkritérium} \end{cases}, \qquad z_j^- = \begin{cases} \min_i z_{ij} & \text{haszonkritérium} \\ \max_i z_{ij} & \text{költségkritérium} \end{cases}.$$

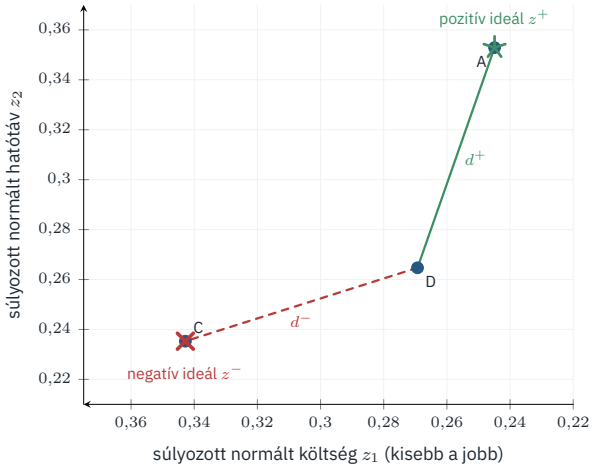
4. Távolságok és relatív közelség. Euklideszi távolság mindkét ideáltól, majd ezek aránya:

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_j (z_{ij} - z_j^+)^2}, \qquad d_i^- = \sqrt{\sum_j (z_{ij} - z_j^-)^2}, \qquad C_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}. \tag{10.2}$$

A C_i 0 és 1 közé esik: 1, ha a jelölt egybeesik a pozitív ideállal, 0, ha a negatívval. A rangsor C_i csökkenő sorrendje.

> **Kézi példa: három jelölt, két kritérium**
>
> Vegyük a CASE02 három jelöltjét csak két kritériummal, a költséggel (C1, költségjellegű) és a hatótávval (C3, haszonjellegű), egyenlő, 0,5-ös súllyal: A (10; 600), C (14; 400), D (11; 450).
> *1. lépés.* Az oszlophosszak $\sqrt{10^2 + 14^2 + 11^2} = \sqrt{417} = 20{,}42$ és $\sqrt{600^2 + 400^2 + 450^2} = 850$. A normált értékek: A (0,4897; 0,7059), C (0,6856; 0,4706), D (0,5387; 0,5294).
> *2. lépés.* A súlyozott értékek a fenti számok fele: A (0,2449; 0,3529), C (0,3428; 0,2353), D (0,2693; 0,2647).
> *3. lépés.* A pozitív ideál (0,2449; 0,3529), mert a költségnél a kisebb, a hatótávnál a nagyobb a jobb; a negatív ideál (0,3428; 0,2353). Ebben a két kritériumban A mindkettőben a legjobb, ezért egybeesik a pozitív ideállal; C mindkettőben a legrosszabb.

4. lépés. D-re $d^+ = \sqrt{0{,}0244^2 + 0{,}0882^2} = 0{,}0916$, $d^- = \sqrt{0{,}0735^2 + 0{,}0294^2} = 0{,}0791$, így $C_{\mathrm{D}} = 0{,}0791/(0{,}0916 + 0{,}0791) = 0{,}464$. A-ra $C = 1$, C-re $C = 0$.



Kézi példa: három jelölt, két kritérium, egyenlő súllyal.
D: $d^+ = 0{,}0916$, $d^- = 0{,}0791$
$C_{\mathrm{D}} = \dfrac{0{,}0791}{0{,}0916 + 0{,}0791} = 0{,}464$
A mindkét kritériumban a legjobb, ezért egybeesik a pozitív ideállal ($C = 1$); C a negatívval ($C = 0$).

10.1. ábra. A kézi példa súlyozott normált terében a pozitív és a negatív ideál, valamint D két távolsága. A vízszintes tengely fordított, hogy jobbra legyen a jobb.

10.3. A CASE02 TOPSIS-rangsora

A teljes CASE02-re, az előszűrt A–D jelöltekkel, a nyers adatokkal és a bázissúlyokkal (0,35; 0,15; 0,15; 0,15; 0,10; 0,10) az eredmény:

10.1. táblázat. A CASE02 TOPSIS-eredménye és az additív rangsor összevetése

Jelölt	d^+	d^-	C	TOPSIS-rang	Additív rang
A	0,1071	0,0664	0,3828	4.	2.
B	0,0654	0,0627	0,4895	3.	3.
C	0,0692	0,1006	0,5924	2.	4.
D	0,0414	0,0926	0,6913	1.	1.

A TOPSIS-rangsor **D > C > B > A**, az additív rangsor D > A > B > C. D mindkét módszer szerint első, de A és C helyet cserél: A az additív modellben a második, a TOPSIS-ban az utolsó. A magyarázat az euklideszi távolságban van. A kibocsátásban nagyon messze esik a legjobb értéktől (150 g/km a C 30 g/km-ével szemben), és ez a nagy eltérés a távolságban négyzetesen számít, így A d^+ értéke a legnagyobb. C viszont a kibocsátásban egybeesik

az ideállal, a költségben pedig a negatív ideállal, de a többi kritériumban kiegyensúlyozottabb, mint A.

Próbáld ki: TOPSIS-geometria

Előbb tippeld meg, melyik jelölt lesz az utolsó a TOPSIS szerint. Ezután változtasd a súlyokat és a kritériumok irányát; az alkalmazás megmutatja a normált és a súlyozott mátrixot, az ideálokat, a távolságokat és a relatív közelséget, valamint egy választott kritériumpár kétdimenziós képét.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h10-topsis.html#K06

10.4. A normalizálás és az alternatívakészlet szerepe

A TOPSIS egyik fontos tulajdonsága, hogy minden jelölt pontszáma a *többi jelölttől* is függ, mert a normalizálás és az ideálok a jelöltekből számolódnak. Ez két következménnyel jár.

Az első, hogy egy új jelölt felvétele megváltoztatja a meglévők pontszámát, akkor is, ha az új jelölt rosszabb mindegyiknél. A CASE01 laptopjainál például (ár 0,4, a többi három kritérium 0,2 súllyal) L1 közelsége 0,634. Ha egy minden szempontból rosszabb hatodik gépet veszünk fel (480 ezer Ft, 2,6 kg, 4 óra, 58 pont), L1 közelsége 0,698-ra nő, mert a negatív ideál távolabb kerül. A sorrend ebben az esetben nem változik.

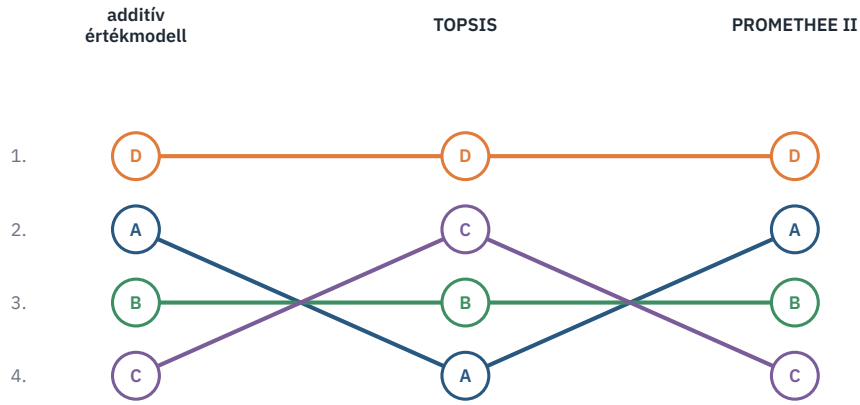
A második következmény, hogy szoros helyzetben a sorrend is megváltozhat. A CASE02-ben B és C közelsége 0,49 és 0,59. Ha a jelöltek közé egy F jelöltet veszünk fel (12 millió Ft, 200 g/km, 250 km, 8 nap, 7 szervizpont, 60 komfortpont), amelyet B minden szempontból dominál, a négy eredeti jelölt sorrendje D > C > B > A-ról **D > B > C > A**-ra változik: B és C helyet cserél, pedig az új jelölt egyikükkel sem versenyképes. Ez a **rangsorfordulás**, amelyet a 9.6. szakaszban a teljes AHP-nál is láttunk. Az additív értékmodellben, rögzített horgonyokkal, ilyen nem fordulhat elő.

Kétszeres súlyozás és a speciális esetek

A súlyokat a TOPSIS-ban egyszer kell alkalmazni: vagy a normált mátrixra, vagy a távolság képletében, de nem mindkét helyen. A kétszeres súlyozás a súlyok négyzetét alkalmazná, ami a nagy súlyú kritériumokat észrevétlenül felerősíti. Két további speciális esetet is kezelni kell. Ha egy oszlop minden eleme nulla, a normalizálás nullával osztana; ilyenkor a kritérium nem különbözteti meg a jelölteket, és ki kell hagyni. Ha két jelölt minden kritériumban azonos, vagy egyetlen jelölt maradt, $d^+ + d^- = 0$ lehet; ekkor a helyes eredmény az, hogy „nem különböztethető meg”, nem egy önkényesen választott rangsor. Az alapváltozat nemnegatív adatokat feltételez, más skálákhoz külön transzformációs szabály kell.

10.5. Összevetés az additív értékmodellel

A 10.2. ábra a CASE02 három módszerrel kapott rangsorát mutatja: az additív értékmodellét, a TOPSIS-ét és a következő fejezet PROMETHEE II-módszeréét. D mindhárom módszer szerint első, ami erősíti a javaslatot. A második helyen azonban eltérés van.



Azonos adatok és azonos súlyszámok, három módszer. D mindhárom módszerrel első; A helye a TOPSIS-ban az utolsó, mert a kibocsátásban nagyon távol esik az ideáltól.

10.2. ábra. A CASE02 rangsora három módszerrel, azonos adatokkal és azonos súlyszámokkal. D mindhárom módszerrel első; A és C helye a TOPSIS-ban felcserélődik.

A különbség három forrásból ered. Az első a **geometria**: az additív modell lineárisan összegzi az értékeket, a TOPSIS az euklideszi távolsággal a nagy egyedi eltéréseket bünteti. A második a **skálázás**: az additív modell rögzített, a döntéshozó által megadott horgonyokhoz mér, a TOPSIS a jelöltekből számolt vektornormalizálással. A harmadik a **súlyok jelentése**: a 8.2. szakaszban a súly a horgonyok közötti tartományhoz kötött átváltás volt; a TOPSIS-ban ugyanaz a 0,35 a vektornormált skálához kötődik, így más átváltást fejez ki. Az azonos súlyszámok tehát nem jelentenek azonos preferenciát.

Melyik eredmény a „helyes”? Egyik sem modellfüggetlen igazság. Ha a döntéshozó elfogadja, hogy a hátrányok kompenzálhatók, és a horgonyokhoz kötött átváltásokat tudatosan rögzítette, az additív modell a következetesebb. Ha fontos neki, hogy egyetlen kritériumban se legyen nagyon messze a legjobbtól, a TOPSIS geometriája jobban kifejezheti a preferenciáit. A választást a döntéshozóval együtt, a feltevések megbeszélése után kell meghozni, és a döntési feljegyzésben indokolni.

Átviteli példa: egy dominált alternatíva hatása (CASE01)

A laptopválasztásban a hallgató egy hatodik, minden szempontból rosszabb gépet is felvesz a listára, mert egy ismerőse ajánlotta. A TOPSIS-pontszámok mind megváltoznak, bár a sorrend most nem. Ha a hallgató az eredményt két hét múlva újraszámolja egy bővebb listával, nem kell meglepődnie, hogy a számok mások lettek. Ezért a TOPSIS-eredmény mellé mindig oda kell írni, milyen jelöltkészleten számolták. Ha az összehasonlításnak a jelöltkészlettől függetlennek kell lennie, rögzített horgonyú értékfüggvényekre van szükség.

Összefoglalás

- A TOPSIS a jelölteket a pozitív ideáltól és a negatív ideáltól mért távolságuk aránya, a relatív közelség szerint rangsorolja.
- A számítás négy lépése: vektornormalizálás, egyszeri súlyozás, az ideálok meghatározása az irány szerint, a távolságok és a relatív közelség kiszámítása.
- Az euklideszi távolság a nagy egyedi eltéréseket négyzetesen bünteti; ez a TOPSIS fő geometriai különbsége az additív modelltől.
- A normalizálás és az ideálok a jelöltekből számolódnak, ezért egy új, akár dominált jelölt megváltoztathatja a pontszámokat és szoros helyzetben a sorrendet is.
- A CASE02 TOPSIS-rangsora D > C > B > A, az additív modellé D > A > B > C; az eltérés a geometriából, a skálázásból és a súlyok eltérő jelentéséből ered, nem számolási hibából.
- Az azonos súlyszámok különböző módszerekben nem azonos preferenciát jelentenek.

Önellenőrzés

1. Mi a pozitív és a negatív ideál egy költségkritériumnál?
2. Számold ki a kézi példában A d^+, d^- és C értékét!
3. Miért kerül A a TOPSIS-rangsor végére, ha az additív modellben a második?
4. Mit jelent, hogy a TOPSIS-ban rangsorfordulás léphet fel? Miért nem fordul elő ez a rögzített horgonyú additív modellben?
5. Egy kolléga a súlyokat a normált mátrixra és a távolságképletben is alkalmazza. Milyen hatása van ennek?

Megoldás.

1. Költségkritériumnál a pozitív ideál a súlyozott normált oszlop legkisebb, a negatív ideál a legnagyobb értéke.
2. A egybeesik a pozitív ideállal: $d^+ = 0$; $d^- = \sqrt{(0{,}2449-0{,}3428)^2+(0{,}3529-0{,}2353)^2} = \sqrt{0{,}00958+0{,}01383} = 0{,}1530$; $C = 0{,}1530/(0+0{,}1530) = 1$.
3. Mert a kibocsátásban (és a komfortban) nagyon messze esik a legjobb értéktől, és az euklideszi távolságban ez a nagy eltérés négyzetesen számít; az additív modellben ugyanezt a hátrányt a költségben és a hatótávban elért nagy előnye lineárisan kompenzálja.

4. Egy új jelölt felvétele (akár egy dominált jelölté is) megváltoztathatja a meglévők sorrendjét, mert a normalizálás és az ideálok a jelöltekből számolódnak. A rögzített horgonyú additív modellben minden jelölt értéke csak a saját adataitól és a horgonyoktól függ, ezért egy új jelölt nem hat a meglévők értékére.
5. A súlyok négyzete érvényesül, ami a nagy súlyú kritériumokat aránytalanul felerősíti; a súlyokat csak egyszer szabad alkalmazni.

Továbbolvasás

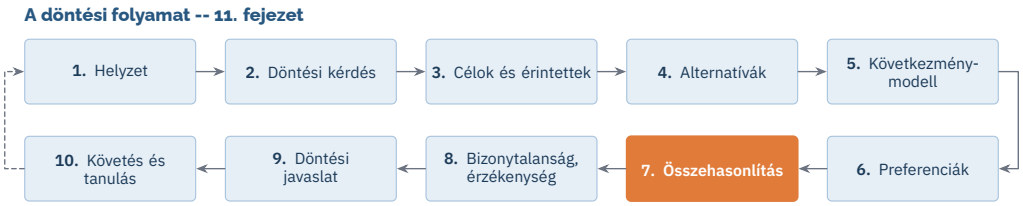
- Hwang, C.-L., Yoon, K. (1981): *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications.* Springer – a TOPSIS eredeti leírása (Hwang és Yoon 1981).
- Behzadian, M. és mtsai (2012): A state-of-the-art survey of TOPSIS applications (Behzadian és mtsai. 2012).
- Greco, S., Ehrgott, M., Figueira, J. R. (szerk., 2016): *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys* – a módszercsaládok összehasonlítása (Greco és mtsai. 2016).

Gyakorlat

A Döntési műhely 10. műhelyében a TOPSIS-alkalmazással (H10) követheted a számítás minden lépését, és egy dominált jelölt felvételével kipróbálhatod a normalizálás hatását. Az E10 munkafüzet és az N10 notebook a CASE02 referenciaértékeit állítja elő, és kezeli a nulla normájú oszlop és az azonos jelöltek speciális esetét.

11.

Outranking: PROMETHEE és ELECTRE



Mekkora különbség számít neked?

Levente két szerviz ajánlata közül választ. Az ígért javítási idők között alig fél nap a különbség, pedig tapasztalatból tudja, hogy a valóságban ennél jóval nagyobb a szórás. A rangsor mégis ezen a fél napon fordulna meg, és ez nem hagyja nyugodni.
A lényeg: Két teljesítmény különbségét akkor érdemes erős preferenciává alakítani, ha valódi jelentést tudunk adni neki.
Kérdés: Mekkora eltérésnél mondanád biztosan, hogy az egyik ajánlat a kedvezőbb?
Szemléltető, kitalált helyzet · F11 · Próbáld ki: h11-outranking

Az additív értékmodell és a TOPSIS minden jelöltnek egyetlen számot ad, és a számok egy teljes rangsort határoznak meg. Ez nem mindig tükrözi jól a döntéshozó gondolkodását. Egy félnapos kiesési különbség lehet a mérési pontatlanságon belül; egy nagyon súlyos hátrány pedig lehet olyan, amelyet semmilyen előny nem kompenzál. Az **outranking** (*túlszárnyalási*) módszerek, amelyek főként Bernard Roy és munkatársai francia iskolájához kötődnek, a jelölteket páronként hasonlítják össze, és azt vizsgálják, van-e elég ok azt mondani, hogy az egyik legalább olyan jó, mint a másik (Roy 1968, 1991). Ez a fejezet a két legismertebb családot, a PROMETHEE-t és az ELECTRE-t mutatja be.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- megmagyarázni, miért lehet indokolt két jelöltet összehasonlíthatatlannak tekinteni;
- közömbösségi és preferenciaküszöbbel kritériumonkénti preferenciát számolni;
- kiszámítani egy kis PROMETHEE II-példa pozitív, negatív és nettó áramait;
- felírni egy ELECTRE I-reláció konkordancia- és diszkordanciafeltételét, és felrajzolni a relációgráfot;
- megindokolni a küszöbök választását, és megnevezni egy vitatható párt;
- elkülöníteni a PROMETHEE II, az ELECTRE I és az ELECTRE III eltérő konstrukcióját.

A fejezet az összehasonlíthatatlanság gondolatával kezd. Ezután a páros fölény és a kritériumonkénti preferencia fogalmát vezeti be, majd a PROMETHEE II áramait számolja végig a CASE02-n. A negyedik szakasz a küszöbök szerepét, az ötödik az ELECTRE I relációját tárgyalja, az utolsó a különböző ELECTRE-változatok határait.

11.1. Miért lehet indokolt az összehasonlíthatatlanság?

A kompenzáló modellekben két jelölt mindig összevethető: vagy az egyik jobb, vagy egyformák. A valóságban azonban előfordul, hogy két lehetőségről a döntéshozó őszintén nem tudja megmondani, melyik a jobb, és ez nem a figyelmetlenség, hanem a helyzet jele. Az egyik jelölt olcsó, de sokat bocsát ki, a másik tiszta, de drága, és nincs olyan átváltás, amelyet a döntéshozó magabiztosan vállalna. Ilyenkor az **összehasonlíthatatlanság** (*incomparability*) őszintébb eredmény, mint egy erőltetett sorrend.

Az outranking-módszerek három lehetséges viszonyt különböztetnek meg két jelölt között: az egyik **előnyben részesített** a másikkal szemben, a kettő **közömbös**, vagy **összehasonlíthatatlan**. A harmadik kategória a fontos újdonság. Egy részleges rangsor, amelyben néhány pár nincs összevetve, kevesebbet állít, de amit állít, azt jobban alátámasztja (Roy 1991; Belton és Stewart 2002).

11.2. Páros fölény és kritériumonkénti preferencia

Mikor számít egy különbség valódi előnynek?

Az egyik jármű egymillió forinttal olcsóbb a másiknál öt évre. Ha a különbség csak félmillió lenne, már a becslés bizonytalanságán belül volna, kétmillió fölött viszont egyértelmű előny.
A lényeg: A különbségek fokozatosan válnak preferenciává; a közömbösségi és a preferenciaküszöb ezt az átmenetet rögzíti.
Kérdés: Mekkora költségkülönbséget tartanál még a becslés pontatlanságának?
Szemléltető, kitalált helyzet · K07 · Próbáld ki: h11-outranking

A **PROMETHEE** (*Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations*) módszercsaládot Jean-Pierre Brans és munkatársai dolgozták ki (Brans és mtsai. 1986). Kiindulópontja két jelölt, a és b összehasonlítása kritériumonként. Először a különbséget egységesítjük úgy, hogy a javára pozitív legyen: $d_j(a,b) = x_{aj} - x_{bj}$ haszonkritériumnál, és $x_{bj} - x_{aj}$ költségkritériumnál. Ezután egy **preferenciafüggvény** $P_j(d) \in [0,1]$ megmondja, mennyire erős a előnye ezen a kritériumon. A könyv a **lineáris preferenciafüggvényt közömbösségi tartománnyal** használja (11.1. ábra):

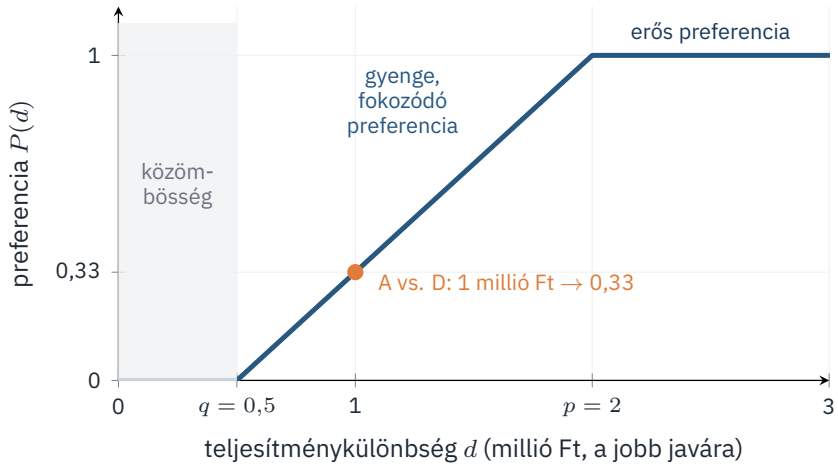
$$P_j(d) = \begin{cases} 0, & d \le q_j, \\ \dfrac{d - q_j}{p_j - q_j}, & q_j < d < p_j, \\ 1, & d \ge p_j. \end{cases} \tag{11.1}$$

A q_j **közömbösségi küszöb** alatt a különbség nem számít, a p_j **preferenciaküszöb** fölött teljes, köztük fokozatosan erősödik. Követelmény, hogy $0 \le q_j < p_j$, és a küszöböket a nyers mértékegységben adjuk meg.

A CASE02 küszöbei a következők. A költségnél $q = 0{,}5$, $p = 2$ millió Ft; a kibocsátásnál $q = 10$, $p = 50$ g/km; a hatótávnál $q = 20$, $p = 100$ km; a kiesésnél $q = 1$, $p = 4$ nap; a szervizpontoknál $q = 1$, $p = 3$ darab; a komfortnál $q = 5$, $p = 20$ pont. A küszöbök a mérés és a becslés bizonytalanságából, valamint a döntéshozó megítéléséből származnak: a félmillió forint a költségbecslés tipikus pontatlansága, az egy nap a kiesési statisztika évenkénti ingadozása.

A kritériumonkénti preferenciákból a súlyokkal **páros preferenciaindexet** képezünk:

$$\pi(a,b) = \sum_{j=1}^{m} w_j \, P_j\big(d_j(a,b)\big). \tag{11.2}$$



11.1. ábra. Lineáris preferenciafüggvény közömbösségi tartománnyal a költségkritériumra. Félmillió forint alatt a különbség közömbös, kétmillió fölött teljes preferencia; A és D egymillió forintos különbsége 0,33-os preferenciát ad.

D és A páros összevetése

D és A különbségei D javára: költség -1 millió Ft (A az olcsóbb), kibocsátás $+80$ g/km, hatótáv -150 km, kiesés $+3$ nap, szervizpont $+1$, komfort $+15$ pont. D preferenciái: a kibocsátásban $P = 1$ ($80 > 50$), a kiesésben $(3-1)/(4-1) = 0{,}667$, a komfortban $(15-5)/(20-5) = 0{,}667$, a szervizpontokban 0, mert az egy darab különbség éppen a közömbösségi küszöbön van. Így $\pi(\mathrm{D},\mathrm{A}) = 0{,}15 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 0{,}667 + 0{,}10 \cdot 0{,}667 = 0{,}317$. A preferenciái: a költségben $(1-0{,}5)/(2-0{,}5) = 0{,}333$, a hatótávban 1, így $\pi(\mathrm{A},\mathrm{D}) = 0{,}35 \cdot 0{,}333 + 0{,}15 \cdot 1 = 0{,}267$. D tehát valamivel erősebben szárnyalja túl A-t, mint fordítva, de mindkét irányban van fölény.

11.3. PROMETHEE II: pozitív, negatív és nettó áram

A páros indexekből minden jelöltre két **áramot** számolunk, a többi $n-1$ jelölttel szemben átlagolva:

$$\phi^{+}(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b \neq a} \pi(a,b), \qquad \phi^{-}(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b \neq a} \pi(b,a), \qquad \phi(a) = \phi^{+}(a) - \phi^{-}(a) \tag{11.3}$$

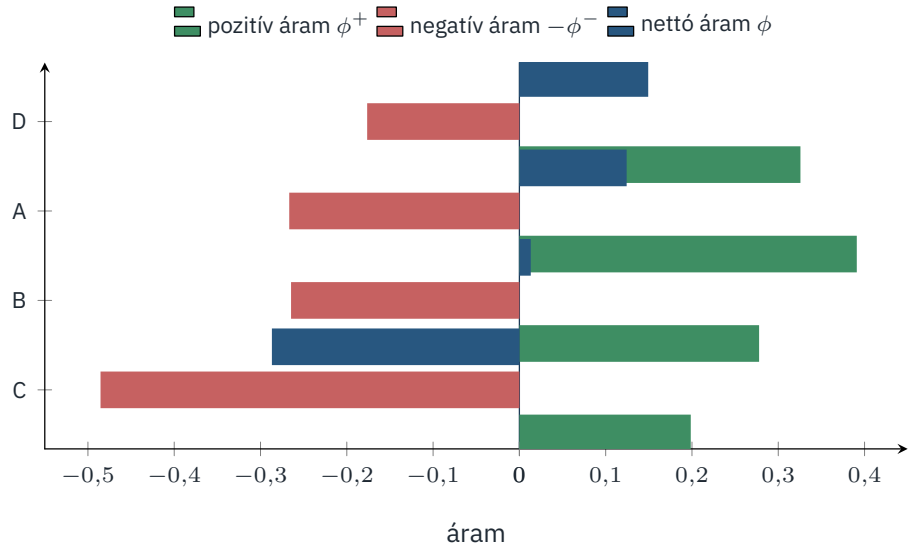
A **pozitív áram** azt méri, mennyire szárnyalja túl a jelölt a többit, a **negatív áram** azt, mennyire szárnyalják túl őt. A PROMETHEE I a két áramot külön tartja meg, és csak akkor mondja egy jelöltet jobbnak, ha mindkét áram szerint az;

ellenkező esetben a két jelölt összehasonlíthatatlan. A **PROMETHEE II** a **nettó áram** szerint teljes rangsort ad. A nettó áramok összege mindig nulla, ami jó ellenőrzési pont.

11.1. táblázat. A CASE02 PROMETHEE II-áramai

Jelölt	ϕ^+	ϕ^-	ϕ (nettó)	PROMETHEE II-rang
A	0,3910	0,2667	0,1243	2.
B	0,2778	0,2646	0,0132	3.
C	0,1986	0,4854	−0,2868	4.
D	0,3257	0,1764	**0,1493**	1.

A PROMETHEE II-rangsor **D > A > B > C**, ugyanaz, mint az additív modellé. Az áramok azonban többet mutatnak (11.2. ábra): A-nak a legnagyobb a pozitív árama, vagyis A szárnyalja túl a legerősebben a többieket, de a negatív árama is jelentős. D-nek a legkisebb a negatív árama: őt szárnyalják túl a legkevésbé. A PROMETHEE I szerint D és A **összehasonlíthatatlan**, mert A pozitív árama nagyobb, D negatív árama kisebb. Ez a részleges rangsor őszintén mutatja, hogy a két jelölt között nincs egyértelmű fölény, ami megfelel a 8.4. szakasz érzékenységvizsgálatának is.



11.2. ábra. A CASE02 jelöltjeinek pozitív, negatív és nettó árama. A-nak a legnagyobb a pozitív, D-nek a legkisebb a negatív árama; a nettó áram szerint D az első.

Próbáld ki: páros fölény és áramok

Előbb tippeld meg, változik-e D és A sorrendje, ha a költség preferenciaküszöbét 2-ről 1 millió forintra csökkented. Ezután mozgasd a küszöböket és a súlyokat, és kövesd a páros preferenciatáblát, az áramokat és a PROMETHEE I részleges rangsorát.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h11-outranking.html#K07

11.4. A küszöbök szerepe

A küszöbök a PROMETHEE legfontosabb, egyben legvitatottabb paraméterei. A 11.1. ábra szerint a költségkülönbségek fél- és kétmillió forint között fokozatosan válnak preferenciává. Ha a preferenciaküszöböt kétmillióról egymillióra csökkentjük, A egymillió forintos előnye D-vel szemben teljes preferenciává válik, és A nettó árama nő. A küszöböknek ezért ugyanolyan gondos indoklás kell, mint a súlyoknak.

A küszöbök megválasztásának három forrása van. A **mérési pontosság**: ha a kiesési adat évente ± 1 nappal ingadozik, az egy nap alatti különbség közömbös. A **döntési jelentőség**: ha egy szervizpont többlet a gyakorlatban alig változtat az elérhetőségen, a $q = 1$ indokolt. A **döntéshozó megítélése**: a p küszöb az a különbség, amely fölött a döntéshozó „biztosan” a jobbat választaná. Egy jó gyakorlat az, ha a küszöböket a döntéshozóval közösen, a jelöltek ismerete előtt rögzítjük, és dokumentáljuk, melyik forrásból erednek.

A nettó áram és a részleges reláció összekeverése

A PROMETHEE II nettó árama teljes rangsort ad, de elveszíti az információ egy részét: két jelölt nettó árama lehet közel azonos úgy, hogy az egyik sok jelöltet szárnyal túl, és őt is sokan, a másik pedig keveset és őt is kevesen. A PROMETHEE I részleges relációja ezt megőrzi. Ha a két eredmény eltér, a részleges reláció a megbízhatóbb jelzés arra, hol nincs egyértelmű fölény.

11.5. ELECTRE I: konkordancia, diszkordancia és reláció

Elég, hogy a többségben jobb?

Az egyik jelölt a hat szempontból ötben jobb a másiknál. A hatodikban viszont olyan nagy a hátránya, hogy a csapat egy része szerint ez önmagában kizáró ok lehet.
A lényeg: A túlszárnyaláshoz kettő kell: elég erős támogatás a kritériumok részéről, és ne legyen túl erős ellenvetés egyetlen kritériumban sem.
Kérdés: Mekkora hátrányt fogadnál el egyetlen szempontban, ha a többiben jobb a jelölt?
Szemléltető, kitalált helyzet · K08 · Próbáld ki: h11-outranking

Az **ELECTRE** (*ELimination Et Choix Traduisant la REalité*) család első tagját Bernard Roy publikálta 1968-ban (Roy 1968). Az ELECTRE I két kérdést tesz fel minden (a, b) párra.

A **konkordancia** azt méri, a kritériumok mekkora súlya támogatja, hogy a legalább olyan jó, mint b:

$$c(a,b) = \sum_{j:\, v_{aj} \geq v_{bj}} w_j .$$

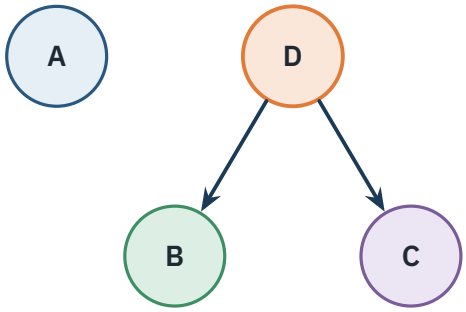
A **diszkordancia** azt méri, mekkora b legnagyobb előnye a-val szemben, a közös 0–1-es értékskálán:

$$D(a,b) = \max_j \big(\max(0,\, v_{bj} - v_{aj})\big).$$

Az a **túlszárnyalja** b-t ($a\, S\, b$), ha $c(a,b) \geq \hat{c}$ és $D(a,b) \leq \hat{d}$, ahol $\hat{c}$ a konkordancia-, $\hat{d}$ a diszkordanciaküszöb. A diszkordanciafeltétel a **vétó** gondolatát hordozza: ha b-nek egyetlen kritériumban is elég nagy az előnye, az megakadályozza a túlszárnyalást, akármilyen erős a konkordancia.

> **CASE02 – ELECTRE I-reláció**
>
> A 8. fejezet 0–100-as értékeit 100-zal osztva, a bázissúlyokkal és $\hat{c} = 0{,}65$, $\hat{d} = 0{,}40$ küszöbökkel a reláció két párt tartalmaz: **D S B** és **D S C** (11.3. ábra). D a hat kritériumból ötben legalább olyan jó, mint B (a súlyok 85%-a), és B egyetlen előnye, a hatótáv, a skála 25%-a. D és A között nincs reláció: D csak a súlyok 50%-ában jobb vagy egyenlő A-nál, A pedig D-nél szintén 50%-ban. A, B és C között sincs reláció, például A konkordanciája C-vel szemben 0,6, a küszöb alatt.

Az ELECTRE I eredménye tehát nem rangsor, hanem egy **részleges reláció**. Ebből a „magot” (*kernel*) szokás meghatározni: azokat a jelölteket, amelyeket



$a \to b$: a legalább olyan jó, mint b (konkordancia $\geq 0{,}65$ és diszkordancia $\leq 0{,}40$)

A, B és C között nincs reláció: összehasonlíthatatlanok

Például D $\to$ B: D a hat kritériumból ötben (súlyuk együtt 85%) legalább olyan jó, mint B, és B egyetlen előnye (hatótáv: 87,5 a 62,5 ponttal szemben) a skála 25%-a.

11.3. ábra. Az ELECTRE I-reláció gráfja a CASE02-re ($\hat{c} = 0{,}65$, $\hat{d} = 0{,}40$). D túlszárnyalja B-t és C-t; A, B és C között nincs reláció, ezért összehasonlíthatatlanok.

egyik sem szárnyal túl, és amelyek együtt minden más jelöltet túlszárnyalnak. Itt a mag {A, D}: D túlszárnyalja B-t és C-t, A-t pedig senki sem szárnyalja túl. Az ELECTRE I tehát azt mondja: a választás A és D között dől el, B és C kiesik. Ez a következtetés összhangban van a másik két módszerrel, de kevesebbet állít, és ezt őszintén teszi.

> **Próbáld ki: ELECTRE I-reláció**
>
> Változtasd a konkordancia- és a diszkordanciaküszöböt, és figyeld, hogyan bővül vagy szűkül a reláció. Keresd meg azt a küszöbpárt, amelynél D már A-t is túlszárnyalja, és nézd meg, mit kell ehhez elfogadnod a diszkordanciából.
> Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h11-outranking.html#K08

11.6. A különböző ELECTRE-változatok határai

Az ELECTRE-családnak több tagja van, és fontos, hogy ne keverjük őket. Az **ELECTRE I** a kiválasztási problémára (egy jelölt vagy egy szűk kör kiválasztására) való, éles küszöbökkel. Az **ELECTRE II** és **III** rangsorolásra szolgál. Az ELECTRE III kritériumonként közömbösségi, preferencia- és **vétóküszöböt** használ, és a túlszárnyalás erősségét fokozatos, 0 és 1 közötti hitelességi indexszel fejezi ki (Roy 1991; Greco és mtsai. 2016). Az **ELECTRE TRI** a jelölteket előre definiált kategóriákba sorolja.

Az ELECTRE III vétóküszöbe más konstrukció, mint az ELECTRE I diszkordanciaküszöbe: kritériumonként adott, a nyers mértékegységben, és fokozatosan gyengíti a túlszárnyalást. A könyv a PROMETHEE II-t használja fő számítási eszközként,

rögzített lineáris preferenciafüggvénnyel, az ELECTRE I-et pedig külön, kézzel követhető relációpéldaként. Az ELECTRE III részleteit nem keverjük az ELECTRE I képletébe; aki ezt a módszert alkalmazná, annak az eredeti forrásokhoz kell fordulnia.

Átviteli példa: egy súlyos környezeti hátrány (CASE06)

Egy közösen használt víztartály bővítésére három terv készül. Az egyik a legolcsóbb, és a legtöbb vizet tárolja, de szárazság idején a forrás kiapadását kockáztatja. Egy kompenzáló modellben a költség- és kapacitáselőny ezt a hátrányt ellensúlyozhatja. Az ELECTRE-szemlélet szerint viszont a kiapadás kockázata olyan erős ellenvetés, amely vétóként megakadályozza, hogy ez a terv túlszárnyalja a többit. A választott módszer itt nem technikai kérdés: azt fejezi ki, hogy a közösség hajlandó-e egy súlyos környezeti kockázatot pénzben kompenzálhatónak tekinteni.

Összefoglalás

- Az outranking-módszerek páronként hasonlítják össze a jelölteket, és megengedik az összehasonlíthatatlanságot.
- A PROMETHEE kritériumonként egy preferenciafüggvénnyel alakítja preferenciává a különbséget; a közömbösségi (q) és a preferenciaküszöb (p) a mérési pontosságból és a döntési jelentőségből ered.
- A páros preferenciaindexekből pozitív, negatív és nettó áram számolható; a nettó áramok összege nulla.
- A CASE02 PROMETHEE II-rangsora D > A > B > C; a PROMETHEE I szerint D és A összehasonlíthatatlan.
- Az ELECTRE I a konkordancia- és a diszkordanciafeltétellel részleges relációt ad; a CASE02-ben D túlszárnyalja B-t és C-t, a mag {A, D}.
- A PROMETHEE II nettó rangsora, az ELECTRE I részleges relációja és az ELECTRE III vétója különböző konstrukció; képleteiket nem szabad keverni.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség a közömbösség és az összehasonlíthatatlanság között?
2. Számold ki a lineáris preferenciafüggvény értékét a kiesésre ($q = 1$, $p = 4$ nap), ha a különbség 2,5 nap!
3. Miért ad a PROMETHEE I részleges rangsort, a PROMETHEE II pedig teljest?
4. Számold ki A és C ELECTRE I-konkordanciáját ($c(\mathrm{A}, \mathrm{C})$) a CASE02-ben!
5. Egy elemző az ELECTRE III vétóküszöbét az ELECTRE I diszkordanciaképletébe építi. Miért probléma ez?

Megoldás.

1. A közömbösség azt jelenti, hogy a két jelölt nagyjából egyformán jó; az összehasonlíthatatlanság azt, hogy a döntéshozó nem tudja megmondani, melyik a jobb, mert az egyik bizonyos szempontokban, a másik másokban jobb, és nincs elfogadott átváltás.
2. $(2{,}5 - 1)/(4 - 1) = 0{,}5$.

3. A PROMETHEE I a pozitív és a negatív áramot külön tartja meg, és csak akkor mondja az egyiket jobbnak, ha mindkét áram szerint az; ha az áramok ellentmondanak egymásnak, a pár összehasonlíthatatlan. A PROMETHEE II a kettő különbségét, a nettó áramot használja, amely mindig sorrendbe állítja a jelölteket.
4. A ott legalább olyan jó, mint C, ahol $v_{\mathrm{A}} \geq v_{\mathrm{C}}$: a költségben (80 ≥ 40, súly 0,35), a hatótávban (100 ≥ 50, 0,15) és a szervizpontokban (80 ≥ 70, 0,10). $c(\mathrm{A}, \mathrm{C}) = 0{,}35 + 0{,}15 + 0{,}10 = 0{,}60$.
5. Mert a két konstrukció eltér: az ELECTRE III vétója kritériumonkénti, a nyers mértékegységben adott, és fokozatosan gyengíti a hitelességi indexet; az ELECTRE I diszkordanciája egyetlen, a közös értékskálán vett maximum éles küszöbbel. A keverés olyan eljárást ad, amelynek egyik eredeti módszer tulajdonságai sem érvényesek rá.

Továbbolvasás

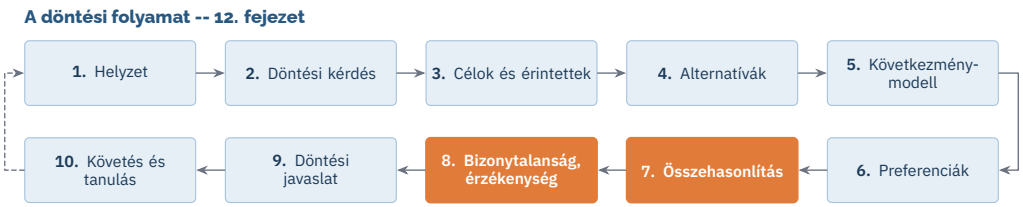
- Brans, J.-P., Vincke, P., Mareschal, B. (1986): How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method (Brans és mtsai. 1986).
- Roy, B. (1968, 1991) – az ELECTRE-módszer eredeti leírása és az outranking-megközelítés alapjai (Roy 1968, 1991).
- Greco, S., Ehrgott, M., Figueira, J. R. (szerk., 2016) – a PROMETHEE- és ELECTRE-családok részletes áttekintése (Greco és mtsai. 2016).
- Dodgson, J. S. és mtsai (2009): *Multi-Criteria Analysis: A Manual* – az outranking-módszerek helye a gyakorlatban (Dodgson és mtsai. 2009).

Gyakorlat

A Döntési műhely 11. műhelyében az outranking-alkalmazással (H11) a PROMETHEE II páros preferenciáit és áramait, valamint az ELECTRE I relációgráfját vizsgálhatod. Az E11 munkafüzet és az N11 notebook a CASE02 referenciaáramait állítja elő; a nettó áramok összege mindkettőben ellenőrzött, és a küszöbök indoklása külön munkalapra kerül.

12.

Csoportos döntés, érzékenység és robusztusság



Egy kis változás új győztest hoz?

Sára három osztályvezetővel ül le, és mindhárman más győztest neveznek meg. A vita közepén kiderül, hogy egy egészen kis súlyváltozás is elég ahhoz, hogy két jelölt helyet cseréljen. Egy pillanatra csend lesz: talán nincsenek is olyan messze egymástól, mint hitték.

A lényeg: Egy ajánlás stabilitását az mutatja meg, hogyan alakul az elfogadható feltevések és preferenciák egész tartományában.

Kérdés: Melyik súlyt változtatnád meg először, és mekkora eltérést tartanál reálisnak?

Szemléltető, kitalált helyzet · F12 · Próbáld ki: h12-stabilitas

Az eddigi fejezetekben egyetlen döntéshozó egyetlen súlyprofiljával számoltunk. A valóságban a döntéseket gyakran többen hozzák meg vagy befolyásolják, eltérő értékrenddel, és a súlyok még egyetlen ember esetében is bizonytalanok. Két kérdés merül fel. Hogyan lehet az eltérő preferenciákat egy közös döntésben figyelembe venni? És mennyire stabil a javaslat, ha a súlyok az elfogadható tartományon belül változnak? Ez a fejezet mindkettőre választ keres. A szavazási szabályok paradoxonjaitól a súlytartományokon át a mintavételes rangelfogadottságig jutunk el.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- egyéni preferenciaprofilokat felvenni és összevetni egy közös megbeszélés előkészítéseként;
- Borda-sorrendet számolni, felismerni egy Condorcet-ciklust, és megmagyarázni a szavazási szabályok korlátait;
- elkülöníteni az ítéletek és a prioritások összesítését;
- egyparaméteres és több súlyra kiterjedő érzékenységvizsgálattal megadni, hol marad stabil az ajánlás;
- mintavételes rangelfogadottságot számolni és helyesen értelmezni;
- a rangsoroló eljárásokat családjuk szerint áttekinteni, két rangsort rangkorrelációval és a rangsorkülönbségek összegével (SRD) összevetni, és az eltérést a véletlen rangsorokhoz viszonyítva értelmezni;
- dokumentálni a fennmaradó nézetkülönbségeket és a kisebbségi szempontokat.

A fejezet az egyéni profilokkal és a közös megbeszéléssel kezd. Ezután a szavazási szabályokat, a Borda-módszert és a Condorcet-paradoxont mutatja be. A harmadik szakasz az összesítés módjait foglalja össze. A negyedik és ötödik szakasz az érzékenységgel és a rangelfogadottsággal foglalkozik. A hatodik szakasz áttekinti a rangsoroló eljárások családjait, és bemutatja, hogyan mérhető két rangsor távolsága rangkorrelációval és a rangsorkülönbségek összegével (SRD). Az utolsó szakasz a megmaradó ellentétek dokumentálásával foglalkozik.

12.1. Egyéni preferenciaprofilok és közös megbeszélés

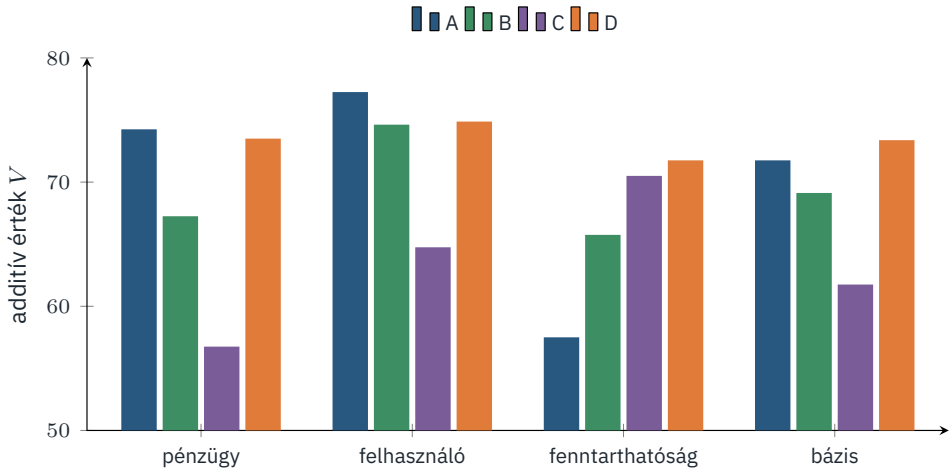
A CASE02-ben három érintett vesz részt a döntésben: a pénzügy, a szervizmunkatársakat képviselő felhasználói oldal és a fenntarthatósági felelős. Mindegyikük elvégzi a swing-eljárást (8.2. szakasz), és saját súlyprofilt ad.

CASE02 – Három érintetti súlyprofil

Kritérium	Pénzügy	Felhasználó	Fenntarthatóság	Bázis
C1 költség	0,50	0,20	0,20	0,35
C2 kibocsátás	0,10	0,05	0,40	0,15
C3 hatótáv	0,10	0,25	0,10	0,15
C4 kiesés	0,15	0,20	0,10	0,15
C5 szervizpont	0,10	0,10	0,10	0,10
C6 komfort	0,05	0,20	0,10	0,10
Rangsor	A > D > B > C	A > D > B > C	D > C > B > A	D > A > B > C

Első helyezett értéke	A 74,25	A 77,25	D 71,75	D 73,375

Az eredmény meglepő (12.1. ábra). A pénzügy és a felhasználói oldal egyaránt A-t választaná, a fenntarthatósági felelős D-t, a bázisprofil, amely a gazdasági igazgató és a szervizvezető közös ítélete volt, szintén D-t. A három érintett közül kettő tehát A-t preferálja. Ugyanakkor D mindhárom profilban az első kettő között van, és a legrosszabb értéke (71,75) is magasabb, mint A legrosszabb értéke (57,5 a fenntarthatósági profilban).



12.1. ábra. A CASE02 jelöltjeinek additív értéke a három érintetti profil és a bázisprofil szerint. Két profilban A, egyben D az első; D legrosszabb értéke magasabb, mint bármely más jelölt legrosszabb értéke.

Az egyéni profilok összevetése egy közös megbeszélés legjobb előkészítése. Ahelyett, hogy azonnal egyetlen közös súlyvektort keresnénk, először azt érdemes megérteni, *miben* térnek el a profilok, és ez milyen eltéréshez vezet a rangsorban. Itt a fő eltérés a kibocsátás súlyában van (0,05–0,40). Ha a megbeszélés tisztázza, hogy a szervezet fenntarthatósági vállalásai miatt a kibocsátás nem lehet elhanyagolható, a pénzügyi és a felhasználói profil is közelíthet.

12.2. Szavazás, Borda és a Condorcet-ciklus

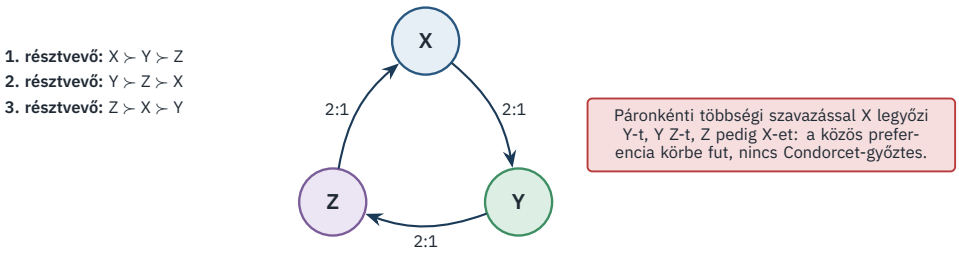
Miért fut körbe a többség akarata?

Három kolléga három tervről szavaz páronként. X legyőzi Y-t, Y legyőzi Z-t, és Z is legyőzi X-et. Mindhárom szavazás tisztességes volt, a csoportnak mégsincs következetes sorrendje.
A lényeg: A páronkénti többségi döntés akkor is körbe futhat, ha minden résztvevő preferenciája következetes.
Kérdés: Milyen szabályt javasolnál, hogy a csoport mégis döntésre jusson?
Szemléltető, kitalált helyzet · K09 · Próbáld ki: h12-stabilitas

Ha csak a rangsorokat ismerjük, szavazási szabállyal is összesíthetjük őket. A **Borda-módszer** minden résztvevő rangsorában pontot ad: n jelölt esetén az első $n-1$, a második $n-2$, az utolsó 0 pontot kap, a pontokat összeadjuk. A három érintetti rangsorból (A > D > B > C kétszer, D > C > B > A egyszer) a Borda-pontszámok: A $3+3+0=6$, B $1+1+1=3$, C $0+0+2=2$, D $2+2+3=7$. A Borda-győztes D.

A **Condorcet-módszer** páronként hasonlít: az a jelölt nyer, amely minden másikat legyőz páronkénti többségi szavazással. A CASE02-ben A két szavazattal egy ellenében legyőzi B-t, C-t és D-t is, tehát A a **Condorcet-győztes**. A két szabály így eltérő győztest ad: a Borda D-t, a Condorcet A-t. Ez nem számolási hiba: a Borda azt is figyelembe veszi, *mennyire* rossz helyre kerül egy jelölt egy rangsorban (A a fenntarthatósági profilban az utolsó), a Condorcet csak azt, hogy két jelölt közül melyiket részesíti előnyben a többség.

A Condorcet-módszernek egy híres korlátja is van. Ha három résztvevő preferenciája X > Y > Z, Y > Z > X és Z > X > Y, a páronkénti többség körbe fut (12.2. ábra): nincs Condorcet-győztes, a csoport preferenciája nem tranzitív, pedig mindenki egyénileg következetes. Ez a **Condorcet-paradoxon**.



12.2. ábra. A Condorcet-ciklus. Három következetes egyéni rangsor páronkénti többségi szavazással körbe futó csoportpreferenciát ad.

Kenneth Arrow lehetetlenségi tétele szerint nincs olyan szavazási szabály, amely három vagy több jelölt esetén minden lehetséges egyéni rangsorra

néhány ésszerű követelményt (többek között a Pareto-elvet, a független alternatívák függetlenségét és a diktátor hiányát) egyszerre teljesítene (Arrow 1951; Gaertner 2009). A tanulság a döntéstámogatás számára nem az, hogy a csoportos döntés reménytelen, hanem az, hogy a szabály megválasztása maga is értékválasztás, és a rangsorok helyett érdemes a mögöttük álló értékekről és átváltásokról beszélni.

> **Próbáld ki: szavazási szabályok**
>
> Előbb tippeld meg, ugyanazt a győztest adja-e a Borda és a Condorcet a CASE02 három profiljára. Ezután változtasd az egyéni rangsorokat, és keresd meg azt az elrendezést, amelynél a páronkénti többség körbe fut.
> Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h12-stabilitas.html#K09

12.3. Aggregált ítélet és aggregált prioritás

Ha a profilokat egyetlen közös súlyvektorrá akarjuk összevonni, három lehetőség van. A **súlyok átlagolása** a legegyszerűbb, de elrejti, hogy a résztvevők között nagy lehet az eltérés. Az AHP-nál láttuk, hogy az **ítéletek** és a **prioritások** összesítése is szóba jöhet, a geometriai átlaggal vagy a számtani átlaggal (9.7. szakasz). A harmadik, gyakran informatívabb lehetőség, hogy nem vonjuk össze a profilokat, hanem minden jelöltet minden profil szerint értékelünk, és a döntési szabályt az eredményekre alkalmazzuk, például azt választjuk, amelyiknek a legrosszabb profilbeli értéke a legnagyobb (*maximin*). A CASE02-ben ez D (legrosszabb értéke 71,75). Ez a szabály a 17. fejezet robusztus döntési szemléletét előlegezi meg.

12.4. Súlytartományok, rangsorváltás és forgatókönyvek

Mennyit kell változnia egy súlynak?

A bázissúlyokkal D nyer, de senki sem mondaná, hogy a költség súlya pontosan 0,35. Lehet 0,30, de akár 0,40 is.
A lényeg: Egy javaslat akkor stabil, ha a súlyok elfogadható tartományában sem változik a győztes.
Kérdés: Mekkora tartományban mozoghat szerinted a költség súlya ebben a döntésben?
Szemléltető, kitalált helyzet · K10 · Próbáld ki: h12-stabilitas

A 8.4. szakaszban egyenként változtattuk a súlyokat, a többit arányosan újranormálva. A CASE02-ben D első helye megmarad, ha a költségsúly 0,4409

alatt, a kibocsátás súlya 0,1145 fölött, a hatótáv súlya 0,1855 alatt és a kiesés súlya 0,047 fölött marad. Ezek a **rangsorváltási küszöbök** a stabilitás első, egyszerű mértékei. Ha a döntéshozó szerint a súlyok elfogadható tartománya mindegyik küszöbtől távol esik, a javaslat stabil; ha valamelyik küszöb a tartományon belül van, a javaslat attól az egy preferenciától függ, és azt tisztázni kell.

Az egyenkénti vizsgálat azonban nem mutatja meg, mi történik, ha *több* súly egyszerre változik. Két ilyen eszköz van. A **forgatókönyvek** néhány, értelmesen megfogalmazott súlyprofilt vizsgálnak (például a három érintetti profilt). A **mintavételes vizsgálat** a súlyok egész tartományából véletlenszerűen húz súlyvektorokat, és megnézi, milyen gyakran kerül egy jelölt egy adott helyre.

Rangelfogadottság

A **rangelfogadottsági index** b_i^r annak a gyakorisága, hogy az i jelölt az r-edik helyre kerül, ha a súlyokat egy előre megadott eloszlásból mintavételezzük. A módszer a sztochasztikus többkritériumos elfogadhatósági elemzés (SMAA) alapgondolata (Lahdelma és mtsai. 1998).

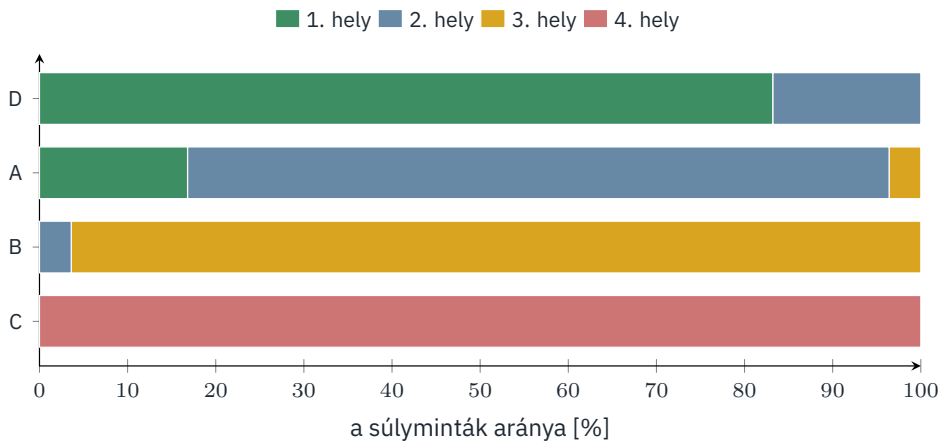
Próbáld ki: súlytartomány és rangelfogadottság

Állítsd be, mennyivel térhetnek el a súlyok a bázistól, és indítsd el a mintavételt. Az alkalmazás megmutatja, milyen gyakran kerül az egyes jelöltek az első, a második, a harmadik és a negyedik helyre, valamint az egyes érintetti profilok eredményét.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h12-stabilitas.html#K10

12.5. Mintavételes rangelfogadottság

A CASE02-ben két mintavételt végeztünk, egyenként 20 ezer súlyvektorral. Az elsőben minden súlyt a bázisérték ±30%-os tartományából, egyenletesen húztunk, majd újranormáltunk. Az eredmény (12.3. ábra): D az esetek 83%-ában első, 17%-ában második; A 17%-ban első, 80%-ban második; B 96%-ban harmadik; C mindig utolsó. A második mintavételben a súlyokat a lehetséges súlyvektorok teljes terén egyenletesen húztuk (ez azt modellezi, hogy semmit sem tudunk a preferenciákról). Ekkor D 57,5%, A 22,7%, C 12,7%, B 7,2% eséllyel első.

A két eredmény együtt azt mutatja, hogy a javaslat a bázis közelében meglehetősen stabil, de nem feltétlen: a súlyok tudatos módosítása, különösen a kibocsátás súlyának csökkentése és a hatótávé növelése, A-t hozhatja előre. A teljes súlytér egyenletes mintavétele pedig figyelmeztet, hogy ha a preferenciákról semmit sem tudnánk, akár C is nyerhetne. A preferenciák felvétele tehát nem formalitás: ez szűkíti le a lehetséges eredményeket.



12.3. ábra. Rangelfogadottság a CASE02-ben, a bázissúlyok ±30%-os egyenletes perturbációjával, 20 ezer mintával. D az esetek 83%-ában első; C mindig utolsó.

A rangelfogadottság nem a helyesség valószínűsége

A 83%-os első helyi rangelfogadottság nem azt jelenti, hogy D 83% eséllyel a „jó” választás. Azt jelenti, hogy a *választott* súlyeloszlás (a bázis ±30%-a, egyenletesen) mellett a súlyvektorok 83%-ában D kapja a legmagasabb értéket. Más eloszlás más számot adna. A súlyokra felvett eloszlás *modellezési döntés*, amelyet ugyanúgy dokumentálni és indokolni kell, mint a bázissúlyokat. Hasonlóképpen, a különböző módszerek egyetértése (az additív modell és a PROMETHEE II azonos rangsora) sem független bizonyíték: ugyanazokra az adatokra és súlyokra épülnek, így közös hibáik is lehetnek.

12.6. Rangsorok összevetése: rangkorreláció és a rangsorkülönbségek összege

Ki gondolkodik másképp a bizottságban?

Zsófi egy alapítvány titkáraként öt bíráló pontjait összesíti tíz pályázatra. Este, a táblázat fölött észreveszi, hogy az egyik bíráló sorrendje szinte tükörképe a többiekének, egy másiké pedig mintha kockadobással készült volna. Holnap reggel össze kell foglalnia a kuratóriumnak, mit lát.
A lényeg: Két rangsor eltérése egyetlen számmal mérhető. Hogy egy eltérés figyelmet érdemel-e, azt a véletlen rangsorok eloszlásához viszonyítva lehet eldönteni.
Kérdés: Mekkora eltérést tulajdonítanál még a véletlennek, és mikor kérdeznél rá a bírálónál a szempontjaira?
Szemléltető, kitalált helyzet · K25 · Próbáld ki: h12-stabilitas

A könyv eddig több rangsoroló eljárást mutatott be. Mielőtt két rangsort összevetnénk, érdemes áttekinteni, milyen elv szerint készülnek (12.1. táblázat). A családok nem egyformán érzékenyek a skálákra és a kompenzációra, ezért ugyanazon az adaton eltérő sorrendet adhatnak; ez nem hiba, hanem a modellválasztás következménye.

12.1. táblázat. A rangsoroló eljárások fő családjai

Család	Elv	Példák a könyvben	Mire érzékeny?
pontozó, kompenzáló	egy összesített értékszám	súlyozott összeg (8. fej.), AHP (9. fej.)	a súlyokra és az értékfüggvényekre
távolságalapú	távolság egy ideális ponttól	TOPSIS (10. fej.)	a normalizálásra és az alternatívakészletre
páros összevetésen alapuló	páronkénti fölény vagy többség	PROMETHEE, ELECTRE (11. fej.), Condorcet (12. fej.)	a küszöbökre; ciklus is kialakulhat
pozíciós	a helyezésekért járó pontok	Borda (12. fej.)	a többi jelölt jelenlétére
valószínűségi	helyezési gyakoriság egy súlyeloszlás mellett	rangelfogadottság (12. fej.)	a választott súlyeloszlásra

Ha több módszer vagy több bíráló más-más rangsort ad, két kérdés merül fel: mennyire hasonlít két rangsor egymáshoz, és melyik áll legközelebb egy

elfogadott **referenciához**. Az első kérdésre a klasszikus **rangkorrelációs együtthatók** felelnek. n elem esetén, ha d_i az i-edik elem két rangszámának különbsége, a Spearman-féle együttható $\rho = 1 - 6\sum d_i^2/(n(n^2-1))$ (Spearman 1904), a Kendall-féle τ pedig az egyező és az ellentétes sorrendű elempárok számának különbsége, osztva az összes pár számával (Kendall 1938). Mindkettő $+1$ azonos, -1 fordított sorrend esetén.

A második kérdésre Héberger Károly **rangsorkülönbség-összeg** (*sum of ranking differences*, SRD) módszere ad egyszerű és jól validálható választ (Héberger 2010). Az adatmátrix sorai az objektumok (pályázatok, jelöltek), oszlopai a megoldások (bírálók, módszerek, modellek). Kijelölünk egy referenciaoszlopot: ez lehet egy elfogadott mérce, vagy az adatokból képzett konszenzus, például a soronkénti átlag vagy medián.

Rangsorkülönbség-összeg (SRD)

Rangsoroljuk az objektumokat a j-edik megoldás és a referencia szerint is (holtverseny esetén az átlagos ranggal); legyen r_{ij} és r_i^{ref} az i-edik objektum két rangszáma. A j-edik megoldás távolsága a referenciától

$$\text{SRD}_j = \sum_{i=1}^{n} \left| r_{ij} - r_i^{\text{ref}} \right|.$$

Az összehasonlíthatóság kedvéért a lehetséges legnagyobb értékkel osztjuk: $\text{SRD}_{\max} = n^2/2$ páros, $(n^2-1)/2$ páratlan n esetén. A kisebb SRD a referenciához közelebb álló megoldást jelenti.

Egy SRD-érték önmagában még nem mond sokat: tíz objektumnál egy teljesen véletlen rangsor átlagosan is mintegy 33 rangpont távolságra van a referenciától. Ezért a módszer két validálási lépést ír elő (Héberger és Kollár-Hunek 2011; Kollár-Hunek és Héberger 2013). A **véletlen rangsorokkal való összevetés** (*comparison of ranks with random numbers*, CRRN) a referenciát sok véletlen permutációval hasonlítja össze, és megadja az SRD véletlen eloszlását. Ha egy megoldás SRD-je az eloszlás 5%-os kvantilise alatt van, a megoldás szignifikánsan közelebb áll a referenciához, mint egy véletlen rangsor; az 5% és 95% közötti érték a véletlentől nem megkülönböztethető, a 95% fölötti pedig szisztematikusan ellentétes sorrendre utal. A második lépés, a **keresztvalidálás**, azt vizsgálja, hogy két megoldás SRD-je között valódi-e a különbség (Sziklai és mtsai. 2021).

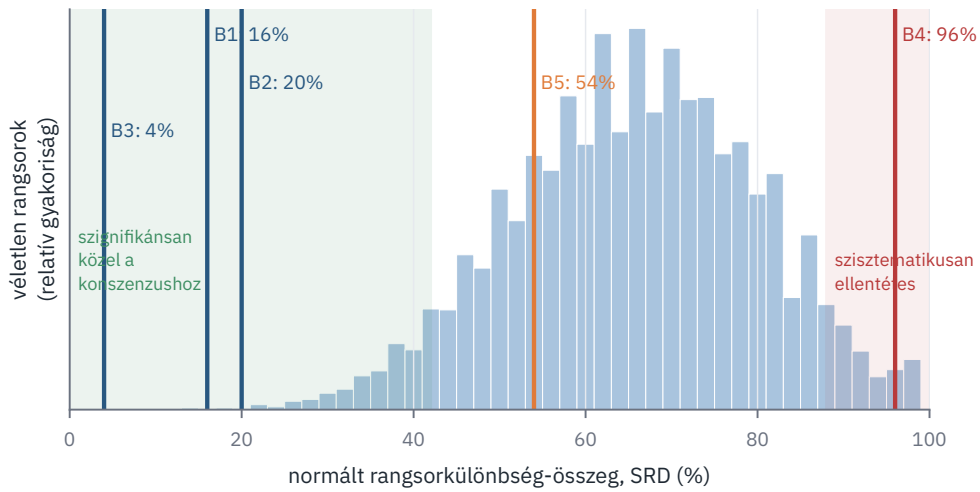
Öt bíráló, tíz pályázat

A kártya bizottságában a referencia a tíz pályázat átlagpontja. Tíz objektumnál a véletlen rangsorok SRD-jének 5%-os kvantilise 21, a 95%-os 44 rangpont ($\text{SRD}_{\max} = 50$). Az eredmény (12.4. ábra):

12.2. táblázat. A bírálók rangsorkülönbség-összege a konszenzustól (CRRN 20 ezer véletlen permutációval)

Bíráló	SRD	normált SRD	véletlen rangsor legalább ilyen közel	Spearman ρ
B3	2	4%	< 0,1%	+0,99
B1	8	16%	< 0,1%	+0,92
B2	10	20%	0,1%	+0,92
B5	27	54%	23%	+0,25
B4	48	96%	99%	−0,86

B1, B2 és B3 szignifikánsan közel áll a konszenzushoz. B5 sorrendje a véletlentől nem különböztethető meg: a találomra összeállított rangsorok 23%-a is legalább ilyen közel áll a konszenzushoz. B4 sorrendje szisztematikusan ellentétes. Ez nem bizonyítja, hogy B4 téved: lehet, hogy egy olyan szempontot értékelt (például a kockázatot), amelyet a többiek figyelmen kívül hagytak. Zsófi feljegyzésének ezért nem az a helyes következtetése, hogy B4 pontjait el kell hagyni, hanem az, hogy rá kell kérdezni a szempontjaira, és B5 pontozási útmutatóját is tisztázni kell.



12.4. ábra. A bírálók normált SRD-je a véletlen rangsorok eloszlásához viszonyítva. A zöld sáv az 5%-os kvantilis alatti, a piros a 95%-os fölötti tartomány. B1–B3 szignifikánsan közel áll a konszenzushoz, B5 a véletlentől nem különböztethető meg, B4 szisztematikusan ellentétes.

Az SRD-t ma a kemometriától a pályázatok és a sportversenyek értékeléséig sokféle területen használják (Sziklai és Héberger 2020). A Pannon Egyetem Komplex Rendszerek Monitorozása Kutatócsoportja a módszert a többkritériumos döntéstámogatás eszközeként fejlesztette tovább. Az SRD-n alapuló párhuzamos

koordináták a sokdimenziós adatok tengelyeit a referenciához való közelségük szerint rendezik, így a hasonlóan rangsoroló változók egymás mellé kerülnek; ezt üvegházhatású gázkibocsátási adatokon mutattuk be (Ipkovich és mtsai. 2021). Egy másik munkában az SRD a PROMETHEE–GAIA eljárást segíti sok, részben átfedő kritérium esetén: a redundáns kritériumok felismerésével a rangsor átláthatóbbá válik (Abonyi és mtsai. 2022). A hasznossági függvényeken alapuló általánosítás (uSRD) pedig az indikátorokat előbb hasznossági értékekké alakítja, és így tárja fel negyven kibocsátási és gazdasági indikátor rejtett kapcsolatait és az országok rangsorát (Ipkovich és mtsai. 2024).

A referencia megválasztása maga is modellezési döntés

Ha a referencia az összes megoldás átlaga, a szélsőséges megoldások is beleszólnak a konszenzusba: egy nagy, egymással egyetértő, de tévedő csoport elhúzhatja a referenciát. Ezért érdemes a referenciát indokolni és változtatni: medián, kihagyásos átlag (a vizsgált megoldás nélkül), vagy ha létezik, külső mérce. Ha a következtetés a referencia cseréjére megfordul, az eredmény nem robusztus. Kis objektumszámnál (néhány jelöltnél) a véletlen eloszlás durva, és a teszt kevéssé érzékeny; az SRD ezért sok objektum és sok megoldás összevetésére való.

Próbáld ki: bírálók és módszerek összevetése SRD-vel

Előbb tippeld meg, melyik bíráló áll a legtávolabb a konszenzustól. Ezután változtasd a referencia képzését (átlag, medián, kihagyásos átlag, maximum), írd át a pontokat, és figyeld, hogyan mozognak a bírálók a véletlen rangsorok eloszlásához képest.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h12-stabilitas.html#K25

Rangsorkülönbség-összeg és CRRN-validálás

A rangszámokat a `scipy.stats.rankdata` számolja (holtversenyben átlagos ranggal); a negatív előjel miatt a legnagyobb pontszám kapja az 1-es rangot. A validálás 20 ezer véletlen permutációval közelíti a véletlen rangsorok SRD-eloszlását.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import rankdata, spearmanr

# Öt bíráló (B1–B5) pontjai tíz pályázatra (P1–P10), 1–10-ig
pont = np.array([[9, 8, 9, 4, 6], [8, 9, 7, 5, 4], [8, 7, 8, 3, 7],
                 [7, 7, 6, 6, 5], [6, 7, 7, 5, 8], [6, 5, 6, 7, 7],
                 [5, 5, 4, 6, 6], [4, 5, 5, 8, 5], [4, 3, 3, 7, 7],
                 [2, 3, 2, 9, 4]], dtype=float)
n, m = pont.shape
ref = pont.mean(axis=1)          # referencia: a pontszámok átlaga

def rang(x):
    """A legnagyobb érték kapja az 1-es rangot;
    holtverseny esetén az érintettek az átlagos rangot."""
    return rankdata(-x)

def srd(oszlop, ref):
    return np.abs(rang(oszlop) - rang(ref)).sum()

srd_max = n * n // 2 if n % 2 == 0 else (n * n - 1) // 2

# Validálás: véletlen rangsorok SRD-eloszlása (CRRN)
rng = np.random.default_rng(2026)
r_ref = rang(ref)
veletlen = np.array([np.abs(rng.permutation(n) + 1 - r_ref).sum()
                     for _ in range(20000)])
q5, q95 = np.percentile(veletlen, [5, 95])
print(f"Véletlen rangsorok: 5%-os kvantilis {q5:.0f}, "
      f"95%-os {q95:.0f}, SRD_max = {srd_max}")

for j in range(m):
    d = srd(pont[:, j], ref)
    p = (veletlen <= d).mean()
    rho = spearmanr(pont[:, j], ref)[0]
    print(f"B{j+1}: SRD = {d:4.1f} ({100 * d / srd_max:3.0f}%), "
          f"p = {p:.3f}, Spearman-rho = {rho:+.2f}")

fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 3))
ax.hist(100 * veletlen / srd_max, bins=30, color="lightsteelblue")
for x in (q5, q95):
    ax.axvline(100 * x / srd_max, ls="--", color="gray")
for j in range(m):
    x = 100 * srd(pont[:, j], ref) / srd_max
    ax.axvline(x, color="C1" if x > 100 * q95 / srd_max else "C0")
    ax.text(x + 1, ax.get_ylim()[1] * 0.9, f"B{j + 1}")
ax.set_xlabel("SRD (%)"); ax.set_yticks([])
plt.show()
```

A futás eredménye: a véletlen rangsorok 5%-os és 95%-os kvantilise 21 és 44; B3 SRD-je 2 (4%), B1-é 8 (16%), B2-é 10 (20%), B5-é 27 (54%, $p \approx 0{,}23$), B4-é 48 (96%).

12.7. Ellentétek és kisebbségi szempontok dokumentálása

Egy csoportos döntés végén ritkán ért egyet mindenki. A jó döntési feljegyzés ezért nem csak a többségi javaslatot rögzíti, hanem a **megmaradó nézetkülönbségeket** is: ki, milyen szempont miatt és milyen feltevés mellett jutott más eredményre. A CASE02-ben például a feljegyzés így szólhat: „A pénzügy és a felhasználói oldal profilja A-t részesíti előnyben, főként a kisebb költség és a nagyobb hatótáv miatt. A javaslat (D) indoka a profilok közötti stabilitás: D mindhárom profilban az első kettő között van, legrosszabb értéke a legmagasabb. Ha a szervezet fenntarthatósági vállalásai megváltoznak, a döntést újra kell vizsgálni.”

A kisebbségi szempontok dokumentálásának három haszna van. Láthatóvá teszi, hogy a döntés nem egyhangú, ezért a megvalósításnál különös figyelmet kíván. Megőrzi azokat az érveket, amelyek a körülmények változásakor fontossá válhatnak. Végül tiszteletben tartja a résztvevőket, ami a későbbi együttműködés feltétele (26. fejezet).

Átviteli példa: sorrend és finanszírozható csomag (CASE03)

A CASE03 nyolc projektjét két érintett eltérő súlyokkal rangsorolja. A pénzügyi vezető rangsorának első négy projektje együtt 16 egységbe kerülne, a keret 12. Ha egyszerűen sorban finanszíroznánk a projekteket, a keret végén egy kevésbé értékes, de olcsó projekt kerülhetne be egy jobb, de drágább helyett. A projektek sorrendje és a ténylegesen finanszírozható csomag tehát eltérhet; a csomagok összevetése a 13. fejezet feladata.

Összefoglalás

- Az egyéni súlyprofilok összevetése megmutatja, miben és milyen következménnyel térnek el a résztvevők; ez a közös megbeszélés legjobb előkészítése.
- A Borda- és a Condorcet-módszer eltérő győztest adhat; a páronkénti többség körbe futhat (Condorcet-paradoxon), és Arrow tétele szerint nincs minden követelményt teljesítő szavazási szabály.
- A profilok összevonhatók a súlyok, az ítéletek vagy a prioritások átlagolásával, vagy profilonkénti értékelés után egy döntési szabállyal (például maximin).
- A rangsorváltási küszöbök az egyparaméteres stabilitás mértékei; a forgatókönyvek és a mintavétel a több súly egyidejű változását vizsgálja.
- A rangelfogadottság a választott súlyeloszlás mellett mutatja a helyezések gyakoriságát; nem a helyesség valószínűsége, és a súlyeloszlás modellezési döntés.
- A rangsoroló eljárások (pontozó, távolságalapú, páros összevetésen alapuló, pozíciós, valószínűségi) más-más feltevésre érzékenyek. Két rangsor hasonlósága rangkorrelációval, egy referenciától való távolsága

a rangsorkülönbségek összegével (SRD) mérhető; az SRD-t a véletlen rangsorok eloszlásához (CRRN) kell viszonyítani, és a referencia megválasztását indokolni kell.
- A megmaradó nézetkülönbségeket és kisebbségi szempontokat a döntési feljegyzésben dokumentálni kell.

Önellenőrzés

1. Számold ki a Borda-pontszámokat négy jelöltre, ha két résztvevő rangsora D > A > C > B, egyé pedig A > B > D > C!
2. Mi a Condorcet-paradoxon, és mit jelent a csoportos döntésre nézve?
3. Miért ad eltérő győztest a Borda- és a Condorcet-módszer a CASE02 három profiljára?
4. Egy elemző szerint D 83%-os első helyi rangelfogadottsága azt jelenti, hogy D 83% eséllyel a helyes döntés. Mit vetnél ellen?
5. Melyik jelöltet választaná a maximin szabály a három érintetti profil alapján, és miért?
6. Négy objektum rangja a referencia szerint 1, 2, 3, 4, egy megoldás szerint 2, 1, 4, 3. Mennyi az SRD és a normált SRD? Miért nem érdemes ennyi objektumnál szignifikanciát vizsgálni?

Megoldás.

1. Négy jelöltnél az első 3, a második 2, a harmadik 1, a negyedik 0 pontot kap. D: $3+3+1=7$; A: $2+2+3=7$; C: $1+1+0=2$; B: $0+0+2=2$. D és A holtversenyben áll.
2. Ha minden résztvevő egyénileg következetes rangsorral rendelkezik, a páronkénti többségi szavazás akkor is körbe futó, nem tranzitív csoportpreferenciát adhat. A csoportos döntéshez ezért nem elég a többségi elv, a szabály megválasztása maga is értékválasztás.
3. A Condorcet-módszer csak a páronkénti többséget nézi: A két profilban D előtt áll, ezért 2:1-re nyer. A Borda azt is figyelembe veszi, hogy A a fenntarthatósági profilban az utolsó, D viszont mindhárom profilban az első kettő között van, így D több pontot gyűjt.
4. A rangelfogadottság a választott súlyeloszlás melletti gyakoriság, nem a helyesség valószínűsége; más súlyeloszlás más számot adna. A súlyeloszlás modellezési döntés, amelyet indokolni kell.
5. D-t: a legrosszabb profilbeli értékek A 57,5, B 65,75, C 56,75, D 71,75, és ezek közül D-é a legnagyobb.
6. SRD $= 1+1+1+1 = 4$, $\mathrm{SRD}_{\max} = 4^2/2 = 8$, a normált érték 50%. Négy objektumnak csak 24 permutációja van, a véletlen eloszlás nagyon durva, így a teszt szinte semmit sem tud kimutatni; az SRD sok objektum összevetésére való.

Továbbolvasás

- Arrow, K. J. (1951): *Social Choice and Individual Values*; Gaertner, W. (2009): *A Primer in Social Choice Theory* – a szavazási szabályok és a lehetetlenségi tétel (Arrow 1951; Gaertner 2009).
- Lahdelma, R., Hokkanen, J., Salminen, P. (1998): SMAA – a mintavételes elfogadhatósági elemzés (Lahdelma és mtsai. 1998).

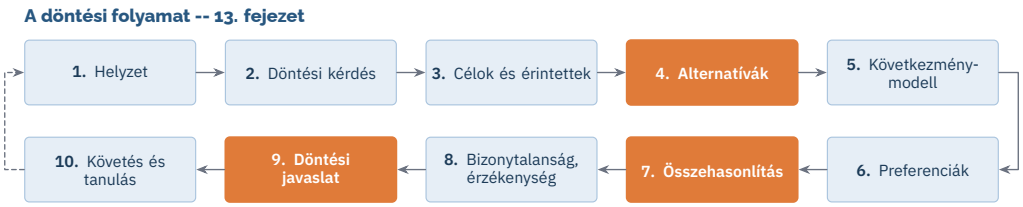
- Belton, V., Stewart, T. J. (2002), 6. és 8. fejezet – érzékenységvizsgálat és csoportos döntéstámogatás (Belton és Stewart 2002).
- Saltelli, A. és mtsai (2008): *Global Sensitivity Analysis: The Primer* (Saltelli és mtsai. 2008).
- Héberger, K. (2010): Sum of ranking differences compares methods or models fairly; Héberger, K., Kollár-Hunek, K. (2011) – az SRD és a CRRN-validálás (Héberger 2010; Héberger és Kollár-Hunek 2011).
- Ipkovich, Á., Héberger, K., Abonyi, J. (2021); Abonyi, J. és mtsai (2022); Ipkovich, Á. és mtsai (2024) – az SRD továbbfejlesztései a többkritériumos döntéstámogatásban (Ipkovich és mtsai. 2021, 2024; Abonyi és mtsai. 2022).

Gyakorlat

A Döntési műhely 12. műhelyében a stabilitási alkalmazással (H12) összevetheted a három érintetti profilt, kipróbálhatod a Borda- és a Condorcet-szabályt, és mintavételes rangelfogadottságot számolhatsz; a K25 nézetben bírálók vagy módszerek rangsorát vetheted össze SRD-vel. Az E12 munkafüzet a profilokat és a rangsorváltási küszöböket, az N12 notebook a mintavételes vizsgálatot rögzített véletlenmaggal végzi; a mintavételi és az újranormalizálási szabályokat mindkettő kiírja. A notebook a fejezet SRD-demóját is futtatja.

13.

Erőforrás-elosztás és többcélú optimalizálás



A legjobb projektből lesz a legjobb csomag?

Kristóf egy családsegítő alapítvány kuratóriumában ül. A legjobb pontszámú pályázat majdnem az egész éves keretet felemésztené, pedig három kisebb együtt több családnak segíthetne, igaz, más kockázattal. Kristóf azon gondolkodik, hogyan lehetne a két csomagot tisztességesen összehasonlítani.

A lényeg: A portfólió eredménye a projektek kombinációjától és a közös erőforráskorlátoktól is függ.

Kérdés: Milyen kisebb projektcsomagot állítanál a nagy beruházás mellé összehasonlításra?

Szemléltető, kitalált helyzet · F13 · Próbáld ki: h13-portfolio

Az eddigi fejezetekben egyetlen alternatívát választottunk ki több közül. Sok döntésben azonban nem egy, hanem *több* lehetőséget kell egyszerre kiválasztani: melyik projekteket finanszírozzuk, mely termékeket fejlesszük, mely képzéseket indítsuk el. A választást közös erőforrások korlátozzák, és a lehetőségek egymásra is hatnak: az egyik csak a másikkal együtt valósítható meg, kettő pedig kizárhatja egymást. Ez a **portfólióválasztás** problémája. A 6.2.2. szakaszban láttuk, hogy a portfólióábra nem mondja meg, melyik csomag fér bele a keretbe. Ez a fejezet ezt a kérdést optimalizálási feladatként

fogalmazza meg, és a CASE03 nyolc projektjére teljes felsorolással meg is oldja.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- megkülönböztetni egy alternatíva kiválasztását a portfólióválasztástól;
- felírni a döntési változókat, a célfüggvényt és a korlátokat (költségvetés, kapacitás, kölcsönös kizárás, függőség);
- felismerni a hátizsákfeladatot, és tudni, mikor oldható meg teljes felsorolással;
- megmutatni egy dominált csomagot, és összevetni két nem dominált csomagot;
- megkülönböztetni a Pareto-front támogatott és nem támogatott pontjait, és megmagyarázni a súlyozott összeg és az epszilon-korlát különbségét;
- felírni és grafikusan megoldani egy kétváltozós lineáris programozási feladatot, és értelmezni az árnyékárakat;
- felírni egy szállítási és egy hozzárendelési feladatot, és a magyar módszerrel megoldani egy kis hozzárendelési feladatot;
- kiválasztani egy végrehajtható csomagot, és megindokolni a kompromisszumot.

A fejezet a portfólióválasztás és az egyszeres kiválasztás különbségével kezd. Ezután a modell elemeit (döntési változók, célfüggvény, korlátok) írja fel, majd a hátizsákfeladatot és a teljes felsorolást mutatja be. A negyedik szakasz a két- és többcélú optimalizálást, a Pareto-frontot, a súlyozott összeget és az epszilon-korlátot tárgyalja. Az ötödik és a hatodik szakasz két elemi operációkutatási feladatcsaládot mutat be: a folytonos erőforrás-elosztást (lineáris programozás, szállítási feladat) és a hozzárendelést a magyar módszerrel. A fejezet a végrehajtható csomag kiválasztásával zárul.

13.1. Egy alternatíva kiválasztása és portfólióválasztás

Az egyszeres kiválasztásnál a jelöltek egymást kizárják: egy járművet veszünk, az egyik ajánlatot fogadjuk el. A portfólióválasztásnál a lehetőségek egymás mellett valósulhatnak meg, és a döntés tárgya a **csomag**. Nyolc projekt esetén $2^8 = 256$ lehetséges csomag van, beleértve az üres csomagot (semmit sem valósítunk meg) és a teljes csomagot (mindet megvalósítjuk).

A két feladat közötti legfontosabb különbség, hogy a csomag értéke nem mindig a projektek értékének összege, és a csomag megengedettsége a projektek *együttes* erőforrásigényétől függ. A legjobb egyedi projekt nem feltétlenül része a legjobb csomagnak: ha sok erőforrást köt le, kiszoríthat két-három kisebb, együtt értékesebb projektet. Ezért a projektek rangsora, akár egy

kifinomult többkritériumos módszerrel készült, nem helyettesíti a csomagok összevetését.

13.2. Döntési változók, célfüggvények és megengedettség

Melyik csomag fér bele, és mit ad?

Nyolc projekt, két keret: költség és munkaóra. Az egyik projekt csak egy másikkal együtt indulhat, kettő kizárja egymást. A falon lógó rangsor alapján senki sem tudja megmondani, melyik csomag a legjobb.
A lényeg: A portfólióválasztás korlátok melletti optimalizálás; a megengedett csomagokat és a köztük lévő kompromisszumokat kell megtalálni.
Kérdés: Mennyi eredményről mondanál le egy fenntarthatóbb csomagért?
Szemléltető, kitalált helyzet · K11 · Próbáld ki: h13-portfolio

A portfóliómodell három elemből áll (Kellerer és mtsai. 2004; Ehrgott 2005).

Döntési változók. Minden projekthez egy bináris változót rendelünk: $x_i = 1$, ha a P_i projektet megvalósítjuk, és $x_i = 0$, ha nem.

Célfüggvény. Azt fejezi ki, mit akarunk maximalizálni vagy minimalizálni. Egycélú esetben például az összes eredményértéket: max $\sum_i e_i\, x_i$. Többcélú esetben több célfüggvény van, például az eredményérték és a fenntarthatósági hozzájárulás.

Korlátok. Meghatározzák, mely csomagok **megengedettek**. A leggyakoribb korláttípusok:

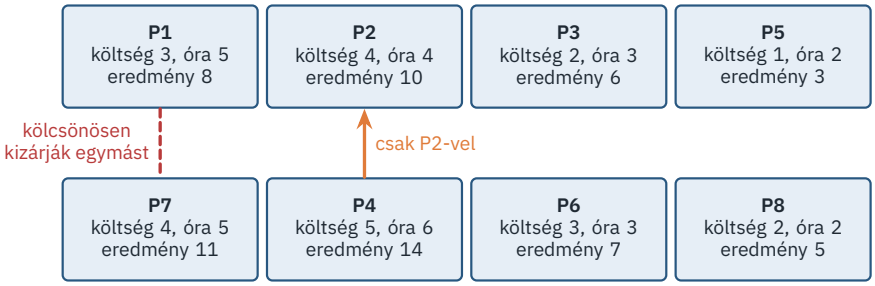
- **költségvetés:** $\sum_i k_i\, x_i \le K$;
- **kapacitás:** $\sum_i o_i\, x_i \le O$ (munkaóra, gépidő, szakember);
- **kölcsönös kizárás:** $x_1 + x_7 \le 1$ (P1 és P7 közül legfeljebb egy);
- **függőség:** $x_4 \le x_2$ (P4 csak P2-vel együtt).

CASE03 – A portfóliómodell

Projekt	Költség k_i	Munkaóra o_i	Eredményérték e_i	Fenntarthatósági hozzájárulás f_i
P1	3	5	8	4
P2	4	4	10	5
P3	2	3	6	2

P4	5	6	14	8
P5	1	2	3	1
P6	3	3	7	6
P7	4	5	11	7
P8	2	2	5	3

Korlátok: $\sum k_i x_i \le 12$, $\sum o_i x_i \le 15$, $x_4 \le x_2$, $x_1 + x_7 \le 1$, $x_i \in \{0,1\}$. Az adatok szintetikusak.



13.1. ábra. A CASE03 projektjei és a közöttük lévő kapcsolatok. A narancs nyíl a függőséget (P4 csak P2-vel), a szaggatott vonal a kölcsönös kizárást (P1 vagy P7) jelöli.

13.3. A hátizsákfeladat és a teljes felsorolás

Az egycélú, egyetlen költségkorlátos változat a klasszikus **hátizsákfeladat** (*knapsack problem*): melyik tárgyakat tegyük egy korlátozott teherbírású hátizsákba, hogy az értékük a lehető legnagyobb legyen (Kellerer és mtsai. 2004). A feladat a kombinatorikus optimalizálás egyik alapproblémája, általános esetben számításilag nehéz (NP-nehéz). A gyakorlatban azonban az egészértékű lineáris programozás megoldói (*solverek*) sok ezer változós feladatokat is gyorsan megoldanak.

Kis feladatnál a legbiztosabb eljárás a **teljes felsorolás**: minden lehetséges csomagot megvizsgálunk. A CASE03-ban 256 csomag van; ezek közül **92 megengedett** (a többi túllépi valamelyik keretet, vagy sérti a függőséget, illetve a kölcsönös kizárást). A teljes felsorolás két okból fontos a könyvben. Egyrészt garantáltan megtalálja az optimumot. Másrészt ellenőrzési út: egy optimalizáló eredményét a kis eseten mindig össze kell vetni vele.

A csak az eredményértéket maximalizáló optimum a **P2 + P3 + P4 + P5** csomag: költsége 12, munkaórája 15, eredményértéke 33, fenntarthatósági hozzájárulása 16. A csomag mindkét keretet pontosan kimeríti, és tartalmazza a P4-et, amely miatt a P2-t is választani kell. Érdemes összevetni két egyszerű,

mohó szabállyal. Ha a projekteket az eredményértékük szerint csökkenő sorrendben vesszük fel, amíg beférnek, a P2 + P5 + P6 + P7 csomagot kapjuk 31-es eredménnyel. Ha az eredmény és a költség aránya szerint haladunk, a P2 + P3 + P5 + P7 csomagot kapjuk 30-as eredménnyel. Mindkét mohó szabály rosszabb az optimumnál, mert nem veszi figyelembe a függőséget és a kombinációkat.

A rangsor sorban finanszírozása nem optimális

A legmagasabb egyéni pontszámú projektek sorban történő finanszírozása nem garantál jó portfóliót. A CASE03-ban a legnagyobb eredményű P4 csak P2-vel együtt valósítható meg, és a mohó sorrend P7-et választja, amely kizárja P1-et. Az optimum a P5-öt is tartalmazza, a legkisebb eredményű projektet, mert az éppen kitölti a keret maradékát. A csomagokat kell összevetni, nem a projekteket.

13.4. Pareto-front, súlyozott cél és epszilon-korlát

A legtöbb portfóliódöntésben több cél van. A CASE03-ban az eredményérték mellett a fenntarthatósági hozzájárulás is számít, és a költséget is érdemes célként kezelni: nem biztos, hogy ki kell meríteni a keretet, ha egy olcsóbb csomag majdnem ugyanannyit ér.

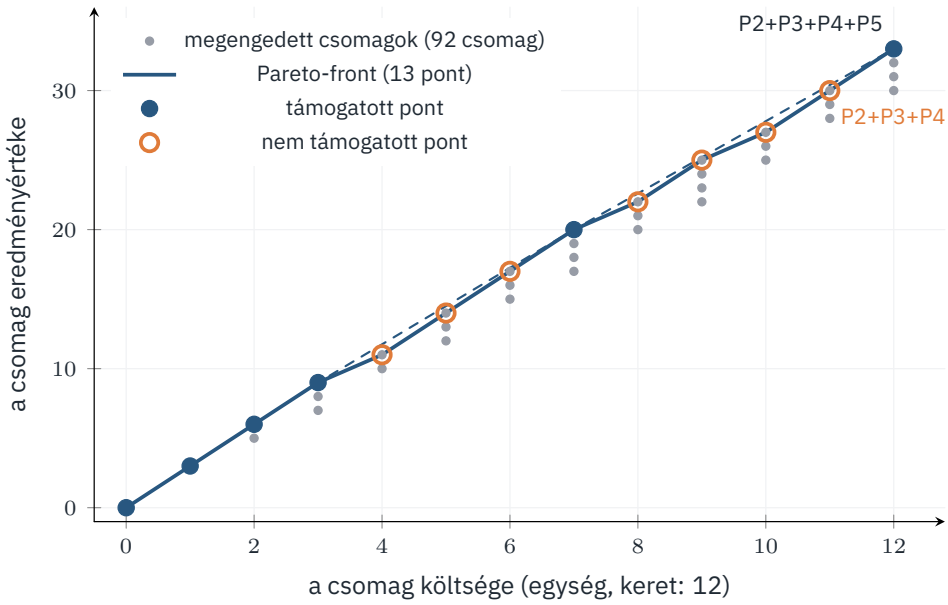
Pareto-optimális csomag

Egy megengedett csomag **Pareto-optimális** (nem dominált), ha nincs olyan másik megengedett csomag, amely minden célban legalább olyan jó, és legalább egyben szigorúan jobb. A Pareto-optimális csomagok célértékeinek halmaza a **Pareto-front**.

A 13.2. ábra a 92 megengedett csomagot a költség és az eredményérték terében mutatja. A Pareto-front 13 pontból áll: minden költségszinthez azt a csomagot, amely annál olcsóbban nem ad nagyobb eredményt. Egy **dominált csomag** például a P5 + P6 + P7 + P8 (költség 10, eredmény 26): a P1 + P2 + P3 + P5 csomag ugyanannyiba kerül, és 27-et ad, a P3 + P5 + P7 + P8 pedig 9 egységből 25-öt. Két nem dominált csomag összevetése a valódi kompromisszumot mutatja: a P2 + P3 + P4 + P5 (12 egység, 33) és a P3 + P5 + P7 (7 egység, 20) között 5 egység költség 13 egység eredményt hoz.

A többcélú feladatok megoldására két klasszikus eljárás van.

Súlyozott összeg. A célokat egyetlen célfüggvénnyé vonjuk össze: max $\alpha \cdot$ eredmény $- (1 - \alpha) \cdot$ költség. Különböző α értékekkel különböző Pareto-pontokat kapunk. A súlyozott összeg azonban csak a front **támogatott pontjait** találja meg: azokat, amelyek a front konvex burkán fekszenek. A CASE03-ban a 13 frontpontból csak hat támogatott (0, 1, 2, 3, 7 és 12 egység költségnél). A többi hét, például a P1 + P3 (5 egység, 14) vagy a P2 + P3 + P4 (11 egység, 30),



13.2. ábra. A CASE03 92 megengedett csomagja a költség és az eredményérték terében, a 13 pontos Pareto-fronttal. A szaggatott vonal a támogatott pontok konvex burka; a narancs körök a nem támogatott pontok, amelyek egy súlyozott összeggel nem találhatók meg.

nem támogatott: semmilyen súlyozással nem lesz optimális, mert a konvex burok alatt fekszik. Diszkrét feladatokban ez gyakori (Ehrgott 2005).

Epszilon-korlát. Az egyik célt optimalizáljuk, a többit korlátként kezeljük: max eredmény, feltéve, hogy a költség $\leq \varepsilon$ (Haimes és mtsai. 1971). Ha ε-t 0-tól 12-ig változtatjuk, a front minden pontját megkapjuk, a nem támogatottakat is. Az epszilon-korlát a döntéshozónak is természetesebb: „mennyi a legtöbb eredmény, amit 9 egységből elérhetünk?” könnyebben megválaszolható, mint „mennyit ér egy egység költség eredményben?”.

Az eredmény és a fenntarthatóság kompromisszuma

Ha a költséget nem célként, hanem korlátként kezeljük (legfeljebb 12), és két célt nézünk, az eredményértéket és a fenntarthatósági hozzájárulást, a Pareto-front mindössze két pontból áll. A P2 + P3 + P4 + P5 csomag 33-as eredményt és 16-os fenntarthatósági hozzájárulást ad, a P3 + P5 + P6 + P7 + P8 csomag 32-t és 19-et. Egy egység eredményről lemondva három egység fenntarthatósági hozzájárulás nyerhető. Ez a döntés már nem optimalizálási, hanem értékválasztási kérdés: a döntéshozónak kell eldöntenie, megéri-e.

Próbáld ki: portfólióválasztó

Előbb tippeld meg, hány csomag megengedett a 256-ból. Ezután jelöld ki a projekteket, változtasd a kereteket, és kapcsold ki-be a függőségi és a kizárási szabályt. Az alkalmazás felsorolja a megengedett csomagokat, megrajzolja a Pareto-frontot, és megmutatja, mit talál meg a súlyozott összeg és mit az epszilon-korlát.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h13-portfolio.html#K11

13.5. Folytonos erőforrás-elosztás: lineáris programozás

Hány kenyér és hány csiga?

Nóra pékségében hajnalban két termék készül: kovászos kenyér és fahéjas csiga. A kenyér többet hoz, de kétszer annyi helyet foglal a sütőben, a két pék munkaideje véges, és kovászból is csak negyven kenyérre való jut. Nóra eddig érzésre döntött; most egy ceruzával és egy kockás füzettel ül le a pult mögé.

A lényeg: Ha a cél és a korlátok lineárisak, a megengedett programok halmaza egy sokszög, és a legjobb program mindig egy csúcsán van. Az árnyékár megmutatja, mennyit érne egy szűk erőforrás egy további egysége.

Kérdés: Melyik erőforrás egy további egységéért fizetnél, és melyikért nem érdemes semmit?

Szemléltető, kitalált helyzet · K27 · Próbáld ki: h13-portfolio

A hátizsákfeladatban a projektek oszthatatlanok: egy projektet vagy megvalósítunk, vagy nem. Sok erőforrás-elosztási kérdésben azonban a mennyiség folytonosan változhat: hány tételt gyártsunk, hány órát osszunk egy feladatra, mennyit szállítsunk egy útvonalon. Ha a célfüggvény és a korlátok is a döntési változók lineáris függvényei, **lineáris programozási** (LP) feladatról beszélünk:

$$\max_{x} \; c^{\top} x \quad \text{feltéve, hogy} \quad Ax \le b,\; x \ge 0. \tag{13.1}$$

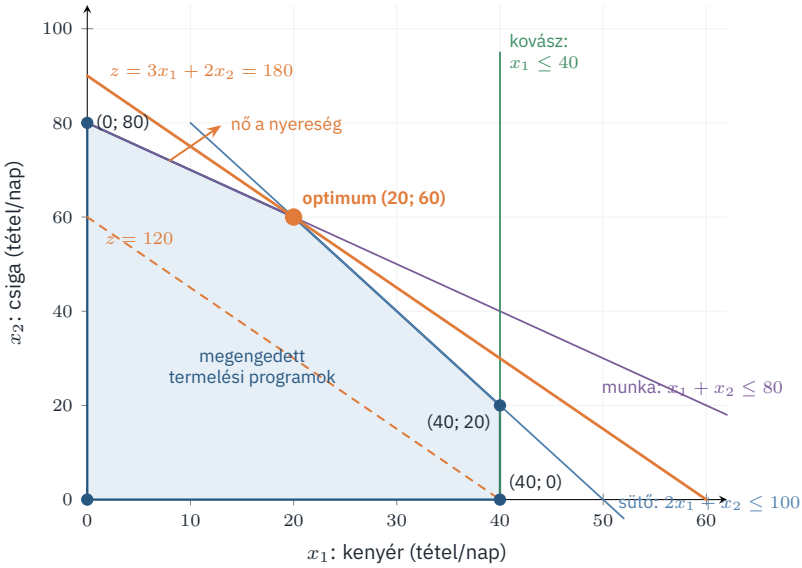
A módszer a második világháború körüli tervezési problémákból nőtt ki. Leonyid Kantorovics már 1939-ben megfogalmazta a termelés tervezésének lineáris modelljeit (Kantorovich 1960), George Dantzig pedig 1947-ben kidolgozta a megoldásukra máig használt szimplex módszert (Dantzig 1963). Kantorovics és Tjalling Koopmans 1975-ben az erőforrások optimális elosztásának elméletéért közgazdasági Nobel-emlékdíjat kapott.

Nóra termelési programja

Legyen x_1 a kenyér-, x_2 a csigatételek napi száma. Egy kenyértétel 3, egy csigatétel 2 ezer forint fedezetet hoz. A sütő naponta 100 sütési egységet bír (a kenyér 2, a csiga 1 egységet foglal), a két pék 80 munkaórát dolgozik (tételenként egy óra), kovász pedig legfeljebb 40 kenyértételre jut:

$$\max \; z = 3x_1 + 2x_2, \qquad 2x_1 + x_2 \le 100, \quad x_1 + x_2 \le 80, \quad x_1 \le 40, \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

A megengedett tartomány ötszög (13.3. ábra), csúcsai és a hozzájuk tartozó fedezet: (0; 0) → 0, (40; 0) → 120, (40; 20) → 160, (20; 60) → 180, (0; 80) → 160 ezer forint. Az optimum a (20; 60) csúcs: húsz kenyér- és hatvan csigatétel, napi 180 ezer forint fedezettel.



13.3. ábra. Nóra termelési programja grafikusan. A megengedett programok ötszöget alkotnak; az azonos fedezetű pontok egyenesei (narancs) párhuzamosak, és a legnagyobb még megengedett fedezet a (20; 60) csúcsban érhető el. A kovászkorlát itt nem szűk: az optimumban 20 tételnyi tartalék marad.

A grafikus megoldás a lineáris programozás **alaptételét** szemlélteti: ha a feladatnak van véges optimuma, akkor van optimális csúcspont is. A szimplex módszer ezért csúcsról csúcsra halad, mindig egy jobb szomszédos csúcsra lépve, és sok ezer változós feladatot is gyorsan megold (Hillier és Lieberman 2021).

Döntési szempontból a legértékesebb melléktermék az **árnyékár** (duális változó). Az árnyékár azt mutatja meg, mennyivel nőne az optimális célérték, ha egy korlát jobb oldala egy egységgel bővülne. Nóra esetében a sütő és a munkaidő árnyékára egyaránt 1 ezer forint, a kovászé 0: egy további munkaóra legfeljebb ezer forintot ér, és felesleges több kovászt vásárolni, amíg az optimumban amúgy is 20 tételnyi tartalék marad. Az árnyékár csak egy *érzékenységi tartományon* belül érvényes; ha a bővítés átrendezi, mely korlátok szűkek, újra kell számolni.

Egészértékű feladat folytonos megoldása

Ha a döntési változók csak egész értékűek lehetnek (projekt, jármű, munkatárs), a folytonos LP-megoldás kerekítése sérthet korlátot, vagy messze lehet az egészértékű optimumtól. A folytonos megoldás ilyenkor csak *korlátot* ad a célértékre; a valódi megoldáshoz egészértékű programozás vagy, kis feladatnál, teljes felsorolás kell (13.3. szakasz). Kivétel a szállítási és a hozzárendelési

feladat, amelyeknél – a korlátok különleges szerkezete miatt – az LP-megoldás magától egész értékű.

13.5.1. A szállítási feladat

A lineáris programozás egyik első alkalmazása a **szállítási feladat** volt: több telephely kínálatát kell több felhasználási pont igényéhez rendelni a legkisebb szállítási költséggel (Hitchcock 1941). Nóra két pékségéből (P1: napi 50, P2: 70 rekesz) három kávézót lát el (K1: 30, K2: 40, K3: 50 rekesz). A szállítási költség rekeszenként, száz forintban:

13.1. táblázat. A szállítási feladat költségei (száz Ft/rekesz)

	K1	K2	K3	kínálat
P1	4	6	9	50
P2	5	3	7	70
kereslet	30	40	50	120

A döntési változó x_{ij}, a Pi pékségből a Kj kávézóba vitt rekeszek száma; a korlátok szerint minden pékség a teljes kínálatát elküldi, és minden kávézó igénye teljesül. Az optimális terv: P1 30 rekeszt visz K1-be és 20-at K3-ba, P2 40-et K2-be és 30-at K3-ba; a napi költség 630 (száz forint), azaz 63 ezer forint. A terv nem a legolcsóbb útvonalak mohó kiosztása: K3-nak mindkét pékségből jut, mert P1 kapacitásának maradékát máshol drágábban lehetne csak elhelyezni.

Lineáris programozás és szállítási feladat

A `scipy.optimize.linprog` minimalizál, ezért a fedezetet negatív előjellel adjuk meg. A HiGHS-megoldó a duális változókat (árnyékárakat) is visszaadja.

```python
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog

# Termelési program: x1 kenyér, x2 csiga (tétel/nap)
c = [-3, -2]               # nyereség ezer Ft/tétel (linprog minimalizál)
A = [[2, 1],               # sütő: 2 és 1 sütési egység, legfeljebb 100
     [1, 1],               # munka: 1-1 munkaóra, legfeljebb 80
     [1, 0]]               # kovász: legfeljebb 40 tétel kenyér
b = [100, 80, 40]
res = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, method="highs")
x1, x2 = res.x
print(f"optimum: x1 = {x1:.0f}, x2 = {x2:.0f}, "
      f"nyereség = {-res.fun:.0f} ezer Ft/nap")
arnyek = -res.ineqlin.marginals    # árnyékárak (duális változók)
for nev, y in zip(["sütő", "munka", "kovász"], arnyek):
    print(f"  árnyékár – {nev}: {y:.2f} ezer Ft / egység")

# Szállítási feladat: 2 pékségből 3 kávézóba (rekesz/nap)
kinal = [50, 70]
kereslet = [30, 40, 50]
kolts = np.array([[4, 6, 9],       # Ft-ban, rekeszenként
                  [5, 3, 7]])
m, n = kolts.shape
A_eq, b_eq = [], []
for i in range(m):                 # minden pékség mindent elküld
    sor = np.zeros(m * n); sor[i * n:(i + 1) * n] = 1
    A_eq.append(sor); b_eq.append(kinal[i])
for j in range(n):                 # minden kávézó igénye teljesül
    sor = np.zeros(m * n); sor[j::n] = 1
    A_eq.append(sor); b_eq.append(kereslet[j])
res = linprog(kolts.ravel(), A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, method="highs")
print("szállítási terv (rekesz):")
print(res.x.reshape(m, n).round().astype(int))
print(f"összköltség: {res.fun:.0f} Ft")
```

A futás eredménye: az optimum $x_1 = 20$, $x_2 = 60$, 180 ezer forint; a sütő és a munka árnyékára 1, a kovászé 0; a szállítási terv költsége 630 (száz forint).

13.6. Hozzárendelés és a magyar módszer

Ki melyik feladatot vigye?

Hétfő reggel Gergő, a kis csapat vezetője négy feladatot oszt ki négy kollégának: a honlap frissítését, a hírlevelet, egy adatelemzést és egy sor ügyfélhívást. Mindenki máshoz ért jobban. Gergő először úgy osztja ki, hogy sorban mindenki a neki legrövidebb, még szabad feladatot kapja – aztán elgondolkodik, nem lehetne-e jobban.

A lényeg: A hozzárendelési feladatnál a sorra hozott, külön-külön jó döntések rossz egészet adhatnak. A magyar módszer garantáltan megtalálja a legkisebb összköltségű párosítást, és nem kell hozzá minden lehetőséget végignézni.

Kérdés: Mennyivel lehet jobb egy átgondolt kiosztás a „mindenki a neki legjobbat” szabálynál?

Szemléltető, kitalált helyzet · K26 · Próbáld ki: h13-portfolio

A **hozzárendelési feladatban** n személyhez n feladatot kell rendelni úgy, hogy mindenki pontosan egy feladatot kapjon, és az összköltség (idő, pénz) a lehető legkisebb legyen. Bináris változókkal ($x_{ij} = 1$, ha az i-edik személy a j-edik feladatot kapja):

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_{ij}, \qquad \sum_{j} x_{ij} = 1 \;\; \forall i, \qquad \sum_{i} x_{ij} = 1 \;\; \forall j, \qquad x_{ij} \in \{0,1\}.$$

A lehetséges kiosztások száma $n!$: négy személynél 24, tíznél már 3,6 millió, húsznál több mint $2 \cdot 10^{18}$. A teljes felsorolás tehát hamar reménytelen, és a „mindenki a neki legjobbat” mohó szabály sem megbízható.

Négy kolléga, négy feladat

A becsült munkaidők órában:

13.2. táblázat. A hozzárendelési feladat munkaidő-mátrixa (óra)

	honlap	hírlevél	adatok	hívások
Anna	3	8	7	4
Bence	5	7	5	3
Csilla	2	6	6	8
Dani	3	2	7	7

> A mohó szabály szerint Anna a honlapot kapja (3 óra), Bence az ügyfélhívásokat (3), Csilla a maradékból a hírlevelet (6), Dani az adatelemzést (7): összesen 19 óra. Az optimális kiosztás: Anna – hívások (4), Bence – adatok (5), Csilla – honlap (2), Dani – hírlevél (2), összesen 13 óra. Hat órát takarítunk meg úgy, hogy egyetlen kolléga sem kapja a számára legrövidebb feladatot, kivéve Csillát és Danit.

A **magyar módszert** Harold Kuhn közölte 1955-ben, és két magyar matematikus, Kőnig Dénes és Egerváry Jenő 1931-es eredményei előtt tisztelegve nevezte el így (Kuhn 1955; Kőnig 1931; Egerváry 1931). Két egyszerű megfigyelésen alapul. Az első: ha a mátrix egy sorának vagy oszlopának minden eleméből ugyanazt a számot vonjuk le, minden lehetséges kiosztás költsége ugyanannyival változik, ezért az optimális kiosztás nem változik. A második Kőnig tétele: egy mátrix nulláit lefedő vonalak (sorok és oszlopok) legkisebb száma egyenlő a független (különböző sorban és oszlopban álló) nullák legnagyobb számával. Az eljárás (13.4. ábra):

1. **Sorredukció:** minden sorból kivonjuk a sor legkisebb elemét; **oszlopredukció:** minden oszlopból az oszlop legkisebb elemét.
2. **Lefedés:** a nullákat a lehető legkevesebb vonallal lefedjük. Ha a vonalak száma n, van n független nulla, és ezek adják az optimális kiosztást.
3. **Kiigazítás:** ha kevesebb vonal elég, a fedetlen elemek legkisebbikét kivonjuk a fedetlen elemekből, és hozzáadjuk a kétszer fedett elemekhez; majd visszatérünk a 2. lépéshez.

A példában a redukció után három vonal (Bence és Dani sora, a honlap oszlopa) lefedi a nullákat, ezért egy kiigazítás kell; a fedetlen minimum 1. Ezután négy független nulla van, ezek a 13 órás kiosztást adják. Az eljárás polinomiális, n^3-nal arányos idejű (Munkres 1957), így több száz szereplős feladatokra is használható.



13.4. ábra. A magyar módszer lépései a négy kolléga példáján. A sor- és oszlopredukció után három vonal fedi le a nullákat (balra), a kiigazítás után négy független nulla adja az optimális, 13 órás kiosztást (jobbra).

A hozzárendelési modell rugalmasan bővíthető. Ha maximalizálni akarunk (például a kollégák elégedettségét), minden elemet kivonunk a mátrix legnagyobb eleméből. Ha több a feladat, mint a személy, fiktív személyeket

veszünk fel nulla költséggel; egy tiltott párosításhoz nagyon nagy költséget írunk. A modell a műszakbeosztástól a járművek és fuvarok párosításán át a vizsgabizottságok összeállításáig sok helyen visszaköszön.

Párosítás preferenciákkal: a stabil párosítás

A hozzárendelési feladat egyetlen összköltséget minimalizál. Más helyzetekben mindkét oldalnak saját preferenciái vannak: hallgatók és témavezetők, rezidensek és kórházak, iskolák és jelentkezők. Itt a **stabil párosítás** a cél: ne legyen olyan pár, amely mindkét tagja inkább egymással lenne, mint a kiosztott párjával. David Gale és Lloyd Shapley 1962-es algoritmusa ilyen párosítást mindig talál (Gale és Shapley 1962); Shapley és Alvin Roth 2012-ben közgazdasági Nobel-emlékdíjat kapott a stabil párosítások elméletéért és gyakorlati alkalmazásáért.

Próbáld ki: a magyar módszer lépésről lépésre

Előbb tippeld meg, mennyi a legkisebb összes munkaidő. Ezután lépésenként kövesd a sor- és oszlopredukciót, a lefedést és a kiigazítást. Írd át a mátrixot, és hasonlítsd össze az optimumot a mohó kiosztással és a teljes felsorolással.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h13-portfolio.html#K26

Hozzárendelés: magyar módszer, mohó szabály és teljes felsorolás

A `scipy.optimize.linear_sum_assignment` a magyar módszer egy hatékony változatát valósítja meg. Kis feladatnál a teljes felsorolás ellenőrzésként is szolgál.

```python
import itertools
import numpy as np
from scipy.optimize import linear_sum_assignment

kollegak = ["Anna", "Bence", "Csilla", "Dani"]
feladatok = ["honlap", "hírlevél", "adatok", "hívások"]
C = np.array([[3, 8, 7, 4],          # becsült munkaidő (óra)
              [5, 7, 5, 3],
              [2, 6, 6, 8],
              [3, 2, 7, 7]])

sor, osz = linear_sum_assignment(C)  # a magyar módszer egy változata
for i, j in zip(sor, osz):
    print(f"{kollegak[i]:7s} -> {feladatok[j]:9s} {C[i, j]} óra")
print("optimum:", C[sor, osz].sum(), "óra")

# Ellenőrzés teljes felsorolással (4! = 24 lehetőség)
perm = min(itertools.permutations(range(4)),
           key=lambda p: sum(C[i, p[i]] for i in range(4)))
print("teljes felsorolás:", sum(C[i, perm[i]] for i in range(4)))

# Mohó szabály: sorban mindenki a legrövidebb szabad feladatot
szabad, moho = set(range(4)), 0
for i in range(4):
    j = min(szabad, key=lambda j: C[i, j])
    szabad.remove(j)
    moho += C[i, j]
print("mohó szabály:", moho, "óra")

# A magyar módszer első lépése: sor-, majd oszlopredukció
R = C - C.min(axis=1, keepdims=True)
R = R - R.min(axis=0, keepdims=True)
print("redukált mátrix:")
print(R)
```

A futás eredménye: Anna – hívások, Bence – adatok, Csilla – honlap, Dani – hírlevél, összesen 13 óra (a teljes felsorolás is 13); a mohó szabály 19 órát ad. A redukált mátrix megegyezik a 13.4. ábra középső mátrixával.

13.7. A végrehajtható projektcsomag kiválasztása

Az optimalizálás eredménye nem egy döntés, hanem egy *szűkített választék*: a Pareto-front csomagjai, amelyek közül a döntéshozó választ. A választás négy szempontot mérlegel.

1. **A célok közötti átváltás.** Mennyit ér egy egység fenntarthatósági hozzájárulás az eredményhez képest? Ezt a 8. fejezet eszközeivel lehet rögzíteni.
2. **A tartalék.** A kereteket teljesen kimerítő csomag nem hagy tartalékot a költségtúllépésre. A P2 + P3 + P4 (11 egység, 30) egy egység tartalékot hagy, három egység eredmény árán.

3. **A kockázat.** A nagy projektek (P4) bukása a portfólió nagy részét érinti; több kisebb projekt kiegyensúlyozottabb kockázatot jelenthet. Ezt a 16. fejezet szimulációja számszerűsítheti.
4. **A megvalósíthatóság.** A modellben nem szereplő szempontok, például a projektvezetők rendelkezésre állása vagy a projektek időbeli ütemezése.

A javaslat ezért egy kis számú, a fronton fekvő csomag összevetése, a szempontok kifejezett mérlegelésével. A CASE03-ban egy ésszerű javaslat a P2 + P3 + P4 + P5 csomag, azzal a kiegészítéssel, hogy ha a fenntarthatósági vállalások erősödnek, a P3 + P5 + P6 + P7 + P8 csomag egy egység eredményért három egység fenntarthatósági hozzájárulást ad.

Átviteli példa: szolgáltatási kapacitás elosztása (CASE04)

Egy ügyfélszolgálat négy csatorna (telefon, chat, e-mail, személyes) között osztja el a munkatársait. A célok: a költség és a várakozási idő. A várakozási idő a kihasználtsággal nem lineárisan, hanem egyre meredekebben nő (19. fejezet), ezért a Pareto-front erősen görbült: kevés többletkapacitás egy túlterhelt csatornán sokat javít, egy alulterheltnél alig. A súlyozott összeg itt is támogatott pontokra vezet, az epszilon-korlát pedig természetes kérdést tesz fel: mekkora a legkisebb költség, ha az átlagos várakozás nem haladhatja meg a három percet?

Összefoglalás

- A portfólióválasztás egyszerre több lehetőséget választ ki közös erőforrás-korlátok mellett; a projektek rangsora nem helyettesíti a csomagok összevetését.
- A modell elemei a bináris döntési változók, a célfüggvény és a korlátok (költségvetés, kapacitás, kölcsönös kizárás, függőség).
- A hátizsákfeladat általános esetben nehéz, de kis feladatnál a teljes felsorolás garantáltan megoldja, és ellenőrzési út; a CASE03 256 csomagjából 92 megengedett, az eredményoptimum P2 + P3 + P4 + P5 (33).
- A mohó szabályok nem veszik figyelembe a függőségeket és a kombinációkat, ezért rosszabb csomagot adhatnak.
- A Pareto-front a nem dominált csomagok halmaza; a súlyozott összeg csak a támogatott pontokat találja meg, az epszilon-korlát a nem támogatottakat is.
- A lineáris programozás folytonos változókkal, lineáris céllal és korlátokkal dolgozik; az optimum a megengedett tartomány egy csúcsában van, az árnyékár egy szűk erőforrás további egységének értékét mutatja.
- A szállítási és a hozzárendelési feladat LP-megoldása egész értékű; a hozzárendelést a magyar módszer (sor- és oszlopredukció, lefedés, kiigazítás) polinomiális időben oldja meg, és a mohó kiosztásnál lényegesen jobb lehet.
- Az optimalizálás szűkített választékot ad; a végső csomag kiválasztása a célok közötti átváltás, a tartalék, a kockázat és a megvalósíthatóság mérlegelése.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség egy alternatíva kiválasztása és a portfólióválasztás között?
2. Írd fel a „P3 és P8 közül legalább egyet meg kell valósítani” és a „P6 csak akkor, ha P3 is” korlátot!
3. Megengedett-e a P1 + P2 + P4 csomag? Ha igen, mennyi az eredményértéke?
4. Miért nem találja meg a súlyozott összeg a P1 + P3 csomagot, bár az a Pareto-fronton van?
5. Egy vezető a rangsor első négy projektjét akarja finanszírozni (P4, P7, P2, P1). Milyen problémába ütközik?
6. Nóra pékségében a munkaidő 80-ról 81 órára nő. Mennyivel változik a napi fedezet, és miért nem változna, ha a kovászkeret nőne 40-ről 41 tételre?
7. A hozzárendelési példában Dani megbetegszik, és helyette Erika jön, akinek munkaideje mind a négy feladatra 4 óra. Változik-e Anna, Bence és Csilla feladata?

Megoldás.

1. Az egyszeres kiválasztásnál a jelöltek kizárják egymást, egyet választunk; a portfólióválasztásnál több lehetőség valósulhat meg egyszerre, és a döntés tárgya a csomag, amelynek megengedettsége a projektek együttes erőforrásigényétől és kapcsolataitól függ.
2. $x_3 + x_8 \geq 1$, illetve $x_6 \leq x_3$.
3. Költség $3+4+5 = 12$, munkaóra $5+4+6 = 15$; a függőség teljesül (P2 benne van), P7 nincs benne. Megengedett, eredményértéke $8 + 10 + 14 = 32$.
4. Mert a P1 + P3 pont (5 egység, 14) a támogatott pontok konvex burka alatt fekszik: a 3 és a 7 egységes támogatott pontot összekötő szakaszon 5 egységnél $9 + (20 - 9) \cdot 2/4 = 14{,}5$ lenne az érték, a 14 ennél kisebb. Így semmilyen súlyozás mellett nem lesz ez a csomag a legjobb, bár nem dominált.
5. A négy projekt költsége $5 + 4 + 4 + 3 = 16$, a keret 12; ráadásul P1 és P7 kizárja egymást. A csomag kétszeresen sem megengedett.
6. A munkaidő árnyékára 1 ezer forint, így a fedezet kb. 1 ezer forinttal nő (az új optimum $x_1 = 19$, $x_2 = 62$, $z = 181$). A kovászkorlát nem szűk (az optimumban 20 tételnyi tartalék van), árnyékára 0, bővítése nem változtat.
7. Nem változik. Erika bármelyik feladatot 4 óra alatt végzi, és a teljes felsorolás szerint az egyetlen optimum: Anna – hívások (4), Bence – adatok (5), Csilla – honlap (2), Erika – hírlevél (4), összesen 15 óra. Erika tehát Dani helyét veszi át; a többiek kiosztása azért marad, mert az ő munkaidejük nem változott, és a hírlevél Erikának sem drágább, mint bármelyik más feladat.

Továbbolvasás

- Kellerer, H., Pferschy, U., Pisinger, D. (2004): *Knapsack Problems.* Springer – a hátizsákfeladat és változatai (Kellerer és mtsai. 2004).
- Ehrgott, M. (2005): *Multicriteria Optimization* – a Pareto-optimalitás, a támogatott és nem támogatott pontok (Ehrgott 2005).
- Haimes, Y. Y., Lasdon, L. S., Wismer, D. A. (1971) – az epszilon-korlát módszer (Haimes és mtsai. 1971).
- Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (2021): *Introduction to Operations Research* – lineáris programozás, szállítási és hozzárendelési feladat (Hillier és Lieberman 2021).

- Kuhn, H. W. (1955): The Hungarian method for the assignment problem – a magyar módszer (Kuhn 1955).

Gyakorlat

A Döntési műhely 13. műhelyében a portfólióválasztóval (H13) mind a 256 csomagot megvizsgálhatod, és összevetheted a súlyozott összeg és az epszilon-korlát eredményét. A K27 nézetben a termelési program lineáris programozási feladatát grafikusan, a K26 nézetben a magyar módszert lépésenként követheted. Az E13 munkafüzet a teljes felsorolást képletekkel, Solver nélkül végzi; az N13 notebook ugyanezt Pythonban számolja, és ellenőrzi a dominanciavizsgálatot a célirányok figyelembevételével; a fejezet LP- és hozzárendelési demóit is futtatja.

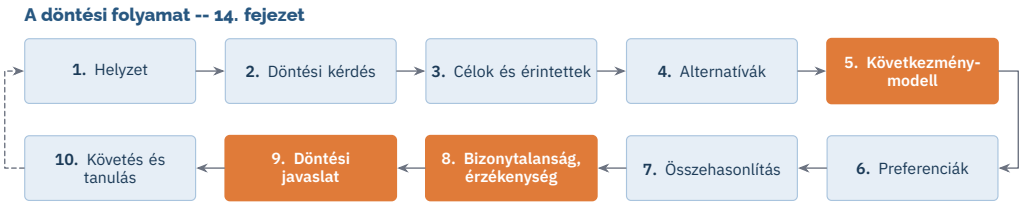
IV. rész – Bizonytalanság és információ



Pannon Egyetem
University of Pannonia

14.

Döntési fák, valószínűség és hasznosság



Mennyit ér neked a biztosabb indulás?

Bori a két kisgyerekével Budapesten tölt egy szombatot. A múzeumi program után olcsóbb, korai vonatjegyet is vehetne, de ha a búcsúzkodás elhúzódik, könnyen lekésik a vonatot. A drágább, későbbi jegy más kockázattal jár: nyugodtabb délutánt, de fáradtabb gyerekeket ígér.
A lényeg: Bizonytalan helyzetben a kimenetelek esélye és a kedvezőtlen kimenetel következménye együtt alakítja a választást.
Kérdés: Mekkora lekésési esélynél választanád inkább a későbbi vonatot?
Szemléltető, kitalált helyzet · F14 · Próbáld ki: h14-dontesi-fa

Az eddigi fejezetekben a jelöltek következményeit ismertnek tekintettük: tudtuk, mennyibe kerül egy jármű és mekkora a hatótávja. A valóságban a következmények gyakran bizonytalanok, és azon múlnak, mi történik a döntés után: eléri-e a vonatot a társaság, sikeres lesz-e a pilot, emelkedik-e az energiaár. A könyv negyedik része a bizonytalanság kezelésével foglalkozik. Ez a fejezet az alapeszközt, a **döntési fát** mutatja be, a valószínűséggel, a várható értékkel és a kockázati attitűdöt kifejező hasznossággal együtt.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- megkülönböztetni az állapotot, az eseményt, a döntési és a véletlen csomópontot;
- feltételes valószínűségekkel és várható értékkel számolni;
- helyesen kezelni a költségeket és az előjeleket a döntési fa útjain;
- egy fát visszafelé kiértékelni, és feltételes döntési szabályt megfogalmazni;
- megmagyarázni a kockázati attitűdöt, és várható hasznossággal számolni;
- elkülöníteni a döntés minőségét a kimeneteltől egy bizonytalan helyzetben.

A fejezet a döntési fa elemeivel kezd. Ezután a valószínűség, a feltételes valószínűség és a várható érték alapjait foglalja össze, majd a költségek és az előjelek helyes kezelését. A negyedik szakasz a visszagöngyölítést és a feltételes döntési szabályt, az ötödik a kockázati attitűdöt és a várható hasznosságot tárgyalja. A fejezet a kimenetel és a döntésminőség újraértékelésével zárul.

14.1. Állapot, esemény, döntési és véletlen csomópont

A döntési fa a döntés és a bizonytalanság időbeli sorrendjét ábrázolja balról jobbra haladva (Raiffa 1968; Clemen és Reilly 2014). Három csomóponttípusa van (14.1. ábra).

- **Döntési csomópont** (négyzet): itt a döntéshozó választ; az ágak a lehetséges alternatívák.
- **Véletlen csomópont** (kör): itt a környezet „választ”; az ágak a lehetséges **események** vagy **állapotok**, valószínűségükkel. Egy véletlen csomópont ágainak valószínűsége együtt 1.
- **Végpont** (háromszög): itt a teljes út következménye áll, például a nettó költség vagy a nettó haszon.

A fa sorrendje lényeges: ami egy döntési csomóponttól balra van, azt a döntéshozó a döntés pillanatában már tudja; ami jobbra, azt még nem. Ha egy információ a döntés előtt érkezik, a véletlen csomópont a döntési csomópont elé kerül, és ez megváltoztatja a fa szerkezetét és az értékét. Ezt a 15. fejezetben részletesen kihasználjuk.

14.2. Valószínűség, feltételes valószínűség és várható érték

A döntési fában a valószínűségek lehetnek gyakoriságon alapulók (a vonat az esetek 40%-ában indul el pontosan akkor, amikor a program véget ér)

vagy szubjektívek (a szakértő 60%-ra becsli egy pilot sikerét). A **szubjektív valószínűség** a döntéselméletben teljes jogú fogalom, ha következetes, és ha kifejezetten rögzítjük, kinek a becslése, és min alapul (Raiffa 1968). A valószínűségek az A. függelékben összefoglalt szabályoknak engedelmeskednek.

A **feltételes valószínűség** $P(B \mid A)$ annak esélye, hogy B bekövetkezik, ha tudjuk, hogy A bekövetkezett. A döntési fa egy véletlen csomópontjának valószínűségei mindig feltételesek az odáig vezető út eseményeire: egy második véletlen csomópont esélyei a fa korábbi eseményeitől függhetnek.

> **Várható érték**
>
> Egy véletlen csomópont **várható értéke** a kimenetelek valószínűségekkel súlyozott átlaga: $E[X] = \sum_k p_k \, x_k$. A várható érték egy hosszú távú átlag: ha ugyanezt a döntést sokszor, egymástól függetlenül meghoznánk, a kimenetelek átlaga ehhez tartana.

14.3. Költségek és előjelek a döntési fa útjain

A legtöbb hiba a döntési fákban nem a valószínűségekben, hanem a következmények könyvelésében történik. Két szabály segít.

Egységes előjel és cél. Döntsük el, hogy költséget minimalizálunk vagy hasznot maximalizálunk, és tartsuk magunkat ehhez. Ha a végpontokon nettó költség áll, a döntési csomópontban a minimumot választjuk; ha nettó haszon, a maximumot.

A teljes út nettó következménye a végponton. A végpontra az egész út összes költségét és hasznát írjuk, egyszer. A vonatjegy példájában a korai jegy 200 ezer forintba kerül; ha a társaság lekési a vonatot, új jegyet kell vennie 400 ezer forintért. A lekésés végpontján tehát a nettó költség $200 + 400 = 600$, nem 400 és nem 200. Ha a 200-at az ágon is levonnánk, és a végponton is szerepeltetnénk, kétszer számolnánk el.

> **Vonatjegy-dilemma**
>
> Egy kiscsoport múzeumi program után utazik haza. A korai vonatra szóló jegy 200 ezer forintba kerül a csoportnak, de a program vége és a vonat indulása között szűk az idő; tapasztalat szerint 0,4 a lekésés esélye, ekkor a következő vonatra új, 400 ezer forintos jegyet kell venni. A későbbi vonatra szóló jegy biztosan elérhető, ára 400 ezer forint. A számértékek szemléltetők.

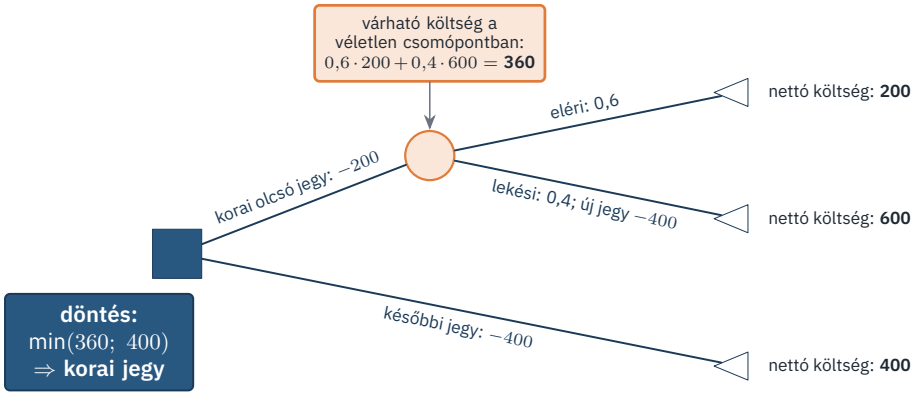
14.4. Visszagöngyölítés és feltételes döntési szabály

Visszafelé kell gondolkodni?

A döntési fa balról jobbra mutatja az eseményeket: előbb a jegyvásárlás, aztán a vonat. A kiértékelés mégis jobbról balra halad, a végpontoktól a döntésig.
A lényeg: Egy döntés értékét a későbbi események és döntések várható következményei adják; ezért a fát a végpontoktól visszafelé kell kiértékelni.
Kérdés: Mekkora a korai jegy várható költsége, ha a lekésés esélye 0,4?
Szemléltető, kitalált helyzet · K12 · Próbáld ki: h14-dontesi-fa

A döntési fát a **visszagöngyölítés** (*rollback*) eljárásával értékeljük ki: a végpontoktól haladunk visszafelé. Egy véletlen csomópontban a várható értéket számoljuk, egy döntési csomópontban a cél szerint a legjobb ágat választjuk, a többit levágjuk (Raiffa 1968).

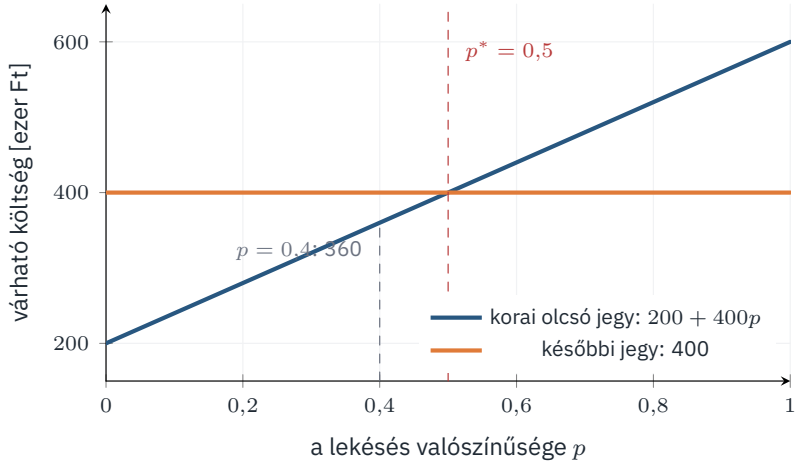
A vonatjegy példájában (14.1. ábra) a véletlen csomópont várható költsége $0{,}6 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 600 = 360$ ezer forint. A döntési csomópontban a korai jegy (360) és a későbbi jegy (400) közül a kisebb várható költségű a korai jegy. Kockázatsemleges döntéshozónak tehát a korai jegyet érdemes venni.



14.1. ábra. A vonatjegy-dilemma döntési fája. A végpontokon a teljes út nettó költsége áll; a véletlen csomópont várható költsége 360, a döntési csomópontban a kisebb várható költségű ág nyer.

A döntési fa eredménye nem egyetlen szám, hanem egy **feltételes döntési szabály**. A korai jegy várható költsége $200 + 400p$, ahol p a lekésés esélye; ez akkor kisebb 400-nál, ha $p < 0{,}5$ (14.2. ábra). A szabály tehát: *ha a lekésés esélye 0,5 alatt van, vegyük a korai jegyet, különben a későbbit*. Ez a nyitókártya

kérdésére adott válasz egy kockázatsemleges döntéshozó számára. A szabály azt is megmutatja, mit érdemes pontosan megbecsülni: nem kell tudni, hogy a lekésés esélye pontosan 0,4 vagy 0,42, csak azt, hogy 0,5 alatt van-e.



14.2. ábra. A korai jegy várható költsége a lekésés valószínűségének függvényében. A döntési küszöb $p^* = 0{,}5$; ez alatt a korai jegy a kedvezőbb.

Próbáld ki: döntési fa visszagöngyölítése

Előbb tippeld meg, melyik jegyet választanád 0,4-es lekésési esély mellett. Ezután változtasd a valószínűséget, a jegyárakat és a kockázati attitűdöt. Az alkalmazás visszagöngyöli a fát, kiírja a várható költséget, a biztos egyenértéket és a döntési küszöböt, és jelzi, ha egy véletlen csomópont valószínűségeinek összege nem 1. Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h14-dontesi-fa.html#K12

14.5. Kockázati attitűd és várható hasznosság

A várható érték szerinti döntés akkor indokolt, ha a döntéshozó **kockázatsemleges**: egy bizonytalan kimenetel ugyanannyit ér neki, mint a várható értéke. Sokan azonban nem ilyenek. Egy 360 ezer forint várható költségű, de 40% eséllyel 600 ezer forintba kerülő lehetőség helyett szívesebben fizetnek biztosan 400-at, mert a 600 ezer forint egy szűkös keretet szétfeszítene. Ők **kockázatkerülők**.

A kockázati attitűdöt a **hasznosságfüggvény** fejezi ki, amelyet Neumann János és Oskar Morgenstern axiomatikusan megalapozott (Neumann és Morgenstern 1944). A **várható hasznosság** elve szerint a döntéshozó azt az alternatívát választja, amelynek a kimenetelei hasznosságának várható értéke a legnagyobb. Kockázatkerülő döntéshozónál a költségek „kára” gyorsabban nő, mint a költség (14.3. ábra). Egy gyakran használt alak az exponenciális

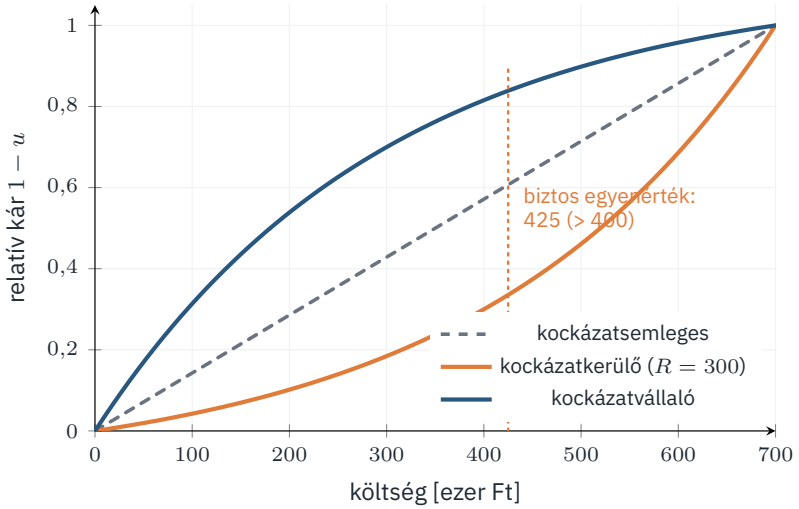
hasznosságfüggvény, amelynek egyetlen paramétere, az R **kockázattűrés**, kifejezi, mennyire kerüli a döntéshozó a kockázatot: minél kisebb R, annál kockázatkerülőbb (Clemen és Reilly 2014).

> **Biztos egyenérték**
>
> Egy bizonytalan lehetőség **biztos egyenértéke** az a biztos összeg, amelyet a döntéshozó egyformán értékel a bizonytalan lehetőséggel. Kockázatkerülő döntéshozónál költségek esetén a biztos egyenérték nagyobb a várható költségnél; a különbség a **kockázati prémium**.

A vonatjegy példájában, költségekre felírt exponenciális hasznossággal és $R = 300$ ezer forintos kockázattűréssel, a korai jegy biztos egyenértéke

$$\mathrm{CE} = R\,\ln\!\left(0{,}6\,e^{200/R} + 0{,}4\,e^{600/R}\right) = 300 \cdot \ln(4{,}124) \approx 425$$

ezer forint. Ez több, mint a későbbi jegy biztos 400 ezer forintja, így ez a döntéshozó a **későbbi jegyet** választja. A kockázati prémium $425 - 360 = 65$ ezer forint: ennyit hajlandó fizetni azért, hogy a bizonytalanságot elkerülje. A kockázattűrés küszöbértéke, amelynél a két lehetőség egyenértékű, $R^{*} \approx 493$ ezer forint. $R = 300$ mellett a döntési küszöb is eltolódik: a korai jegy csak akkor kedvezőbb, ha a lekésés esélye 0,34 alatt van, nem 0,5 alatt.



14.3. ábra. Kockázatsemleges, kockázatkerülő és kockázatvállaló attitűd költségekre. A kockázatkerülő döntéshozó számára a nagy költség aránytalanul nagy kárt jelent; a korai jegy biztos egyenértéke 425 ezer forint, több a későbbi jegy 400 ezer forintjánál.

A hasznosságfüggvény felvétele gyakorlati kérdés: a döntéshozónak egyszerű sorsolásokat mutatunk („inkább fizetne biztosan X-et, vagy 50–50% eséllyel

200-at vagy 600-at?”), és a válaszokból becsüljük R-et. Kahneman és Tversky kilátáselmélete (3.2. szakasz) arra figyelmeztet, hogy a valóságos döntések eltérhetnek a várható hasznosság elvétől, például a veszteségtartományban gyakran kockázatvállalók vagyunk (Kahneman és Tversky 1979). A döntéstámogatásban a várható hasznosság *normatív* modell: azt írja le, hogyan érdemes következetesen dönteni, ha elfogadjuk az axiómáit.

> **A várható költség nem egy tényleges számla**
>
> A 360 ezer forintos várható költséget soha senki nem fizeti ki: a társaság vagy 200-at, vagy 600-at fizet. A várható érték egy hosszú távú átlag, amely ismételt döntéseknél értelmes. Egyszeri, nagy tétű döntésnél a kimenetelek eloszlása, különösen a legrosszabb eset, külön figyelmet érdemel. Ezért kell a döntési fa mellé a kockázati attitűdöt vagy a kimenetelek eloszlását is megvizsgálni (16. fejezet).

14.6. Kimenetel és döntésminőség újraértékelése

Tegyük fel, hogy a társaság a korai jegyet választja, és lekési a vonatot. Rossz döntés volt? Nem feltétlenül. Ha a lekésés esélye valóban 0,4 volt, a döntés a kockázatsemleges döntéshozó számára jó volt, a kimenetel pedig balszerencsés. Az 1.5. szakaszban bevezetett különbségtétel itt kap pontos tartalmat: a döntés minőségét az határozza meg, hogy a döntés pillanatában ismert valószínűségekkel, következményekkel és preferenciákkal a legjobb alternatívát választottuk-e (Howard 1988).

A döntési fa és a döntési napló együtt teszi lehetővé a **tanulást**. Ha a lekésés gyakrabban fordul elő, mint 0,4-es eséllyel, a valószínűségi becslés volt rossz, és azt kell javítani. Ha a valószínűség helyes volt, de a 600 ezer forintos kimenetel elfogadhatatlannak bizonyult, a kockázati attitűdöt kell újragondolni. Egyetlen kimenetelből azonban egyik következtetést sem lehet levonni; ehhez több hasonló döntés tapasztalata kell.

> **Átviteli példa: pilot utáni bevezetés (CASE07)**
>
> Az egyetem az új vállalati képzésről két lépésben dönt: először egy kis pilotot indíthat, utána a pilot eredményének ismeretében dönt a teljes bevezetésről. A döntési fa két döntési és két véletlen csomópontot tartalmaz: pilot vagy azonnali bevezetés; a pilot sikere; teljes bevezetés vagy elállás; a piac kedvező vagy kedvezőtlen alakulása. A visszagöngyölítés feltételes stratégiát ad: „indítsunk pilotot, és ha sikeres, vezessük be teljesen, ha nem, álljunk el”. A pilot értékét a 15. fejezetben számszerűen is meghatározzuk.

Összefoglalás

- A döntési fa a döntések és a bizonytalan események időbeli sorrendjét ábrázolja; a döntési csomópontban választunk, a véletlen csomópontban valószínűségek szerint ágazik el a fa.
- Egy véletlen csomópont ágainak valószínűsége együtt 1; az ágak valószínűsége feltételes az odáig vezető útra.
- A végpontokon a teljes út nettó következménye áll; a költségeket egyszer, egységes előjellel kell könyvelni.
- A visszagöngyölítés a végpontoktól visszafelé halad: véletlen csomópontban várható érték, döntési csomópontban a legjobb ág.
- Az eredmény feltételes döntési szabály: a vonatjegy példájában kockázatsemleges döntéshozónak a korai jegy akkor jobb, ha a lekésés esélye 0,5 alatt van.
- A kockázati attitűdöt a hasznosságfüggvény fejezi ki; kockázatkerülő döntéshozónál a biztos egyenérték nagyobb a várható költségnél, és a döntés megfordulhat.
- A várható érték hosszú távú átlag, nem tényleges számla; a döntés minőségét el kell választani a kimeneteltől.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség a döntési és a véletlen csomópont között, és miért számít a csomópontok sorrendje?
2. Egy véletlen csomópontnak három ága van, 0,5, 0,3 és 0,25 valószínűséggel. Mi a probléma?
3. A vonatjegy példájában a lekésés esélye 0,3, az új jegy ára 500 ezer forint. Melyik jegyet választja egy kockázatsemleges döntéshozó?
4. Mi a kockázati prémium, és mekkora a vonatjegy példájában $R = 300$ mellett?
5. A társaság a korai jegyet választotta, és lekéste a vonatot. Egy kolléga szerint ez bizonyítja, hogy rossz volt a döntés. Mit válaszolnál?

Megoldás.

1. A döntési csomópontban a döntéshozó választ, a véletlen csomópontban a környezet, valószínűségek szerint. A sorrend azt fejezi ki, mit tud a döntéshozó a döntés pillanatában: ami a döntési csomóponttól balra van, azt már tudja.
2. A valószínűségek összege $1{,}05 \neq 1$; a csomópont hibás, a valószínűségeket javítani kell.
3. A korai jegy várható költsége $0{,}7 \cdot 200 + 0{,}3 \cdot (200 + 500) = 140 + 210 = 350$, kevesebb 400-nál, tehát a korai jegyet.
4. A kockázati prémium a biztos egyenérték és a várható érték különbsége; itt $425 - 360 = 65$ ezer forint, ennyit hajlandó fizetni a döntéshozó a bizonytalanság elkerüléséért.
5. Egyetlen kedvezőtlen kimenetel nem bizonyítja a döntés rossz voltát. Ha a 0,4-es lekésési esély és a következmények helyesek voltak, a kockázatsemleges döntéshozónak a korai jegy volt a jobb döntés, a kimenetel balszerencsés. Azt kell megvizsgálni, helyes volt-e a valószínűségi becslés és a kockázati attitűd.

Továbbolvasás

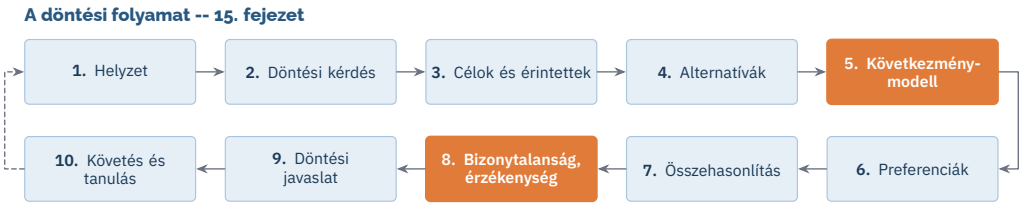
- Raiffa, H. (1968): *Decision Analysis.* Addison-Wesley – a döntési fák és a visszagöngyölítés klasszikus bemutatása (Raiffa 1968).
- Clemen, R. T., Reilly, T. (2014): *Making Hard Decisions with DecisionTools*, 3–4. és 13–14. fejezet – döntési fák és hasznosság (Clemen és Reilly 2014).
- von Neumann, J., Morgenstern, O. (1944) – a várható hasznosság axiomatikus megalapozása (Neumann és Morgenstern 1944).
- Howard, R. A. (1988) – a döntésminőség és a kimenetel különbsége (Howard 1988).

Gyakorlat

A Döntési műhely 14. műhelyében a döntési fa alkalmazással (H14) a vonatjegy-dilemmát és egy saját döntési fát értékelhetsz ki, kockázatsemleges és kockázatkerülő attitűddel. Az E14 munkafüzet és az N14 notebook ugyanezt a fát számolja; mindkettő ellenőrzi, hogy a véletlen csomópontok valószínűségeinek összege 1, és hogy a költségek előjele következetes.

15.

Bayes-frissítés és az információ értéke



Mennyit fizetnél azért, hogy előre tudd?

Márta, egy felnőttképzési központ vezetője, új esti képzést indítana. Egy kolléga felmérést ajánl előtte. Márta először azt kérdezi, mennyire pontos a felmérés; később azt is, változtatna-e bármit az eredménye azon, amit tenni fog.

A lényeg: Az információ értéke abból ered, hogy a birtokában jobban választhatunk.

Kérdés: Milyen felmérési eredménynél változtatnál a tervezett bevezetésen, és mennyit érne ezt megtudni?

Szemléltető, kitalált helyzet · F15 · Próbáld ki: h15-informacio

A bizonytalanság egy részét információval csökkenteni lehet: piackutatással, pilottal, szakértői véleménnyel, egy próbával. Az információ azonban pénzbe és időbe kerül, és nem mindig éri meg. Mikor érdemes további adatot gyűjteni, és mennyit érdemes érte fizetni? Ez a fejezet két eszközt mutat be. A **Bayes-tétel** megmondja, hogyan módosítsuk a valószínűségi becsléseinket egy új jelzés hatására. Az **információ értékének** elmélete azt méri, mennyivel jobb döntést hozhatunk az információ birtokában, és ebből felső határt ad arra, mennyit érdemes fizetni érte (Howard 1966; Raiffa 1968).

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- megkülönböztetni az előzetes (prior) és az utólagos (poszterior) valószínűséget;
- megmagyarázni az alapráta és a jelzés megbízhatóságának szerepét;
- természetes gyakoriságokkal és Bayes-táblával frissíteni egy valószínűséget;
- újraoptimalizálni egy döntést az információ után;
- kiszámítani a tökéletes (EVPI) és a részleges (EVSI) információ várható értékét, és az információ legnagyobb indokolható árát;
- megindokolni, mikor érdemes további adatot gyűjteni.

A fejezet a prior és a poszterior valószínűséggel, majd a jelzés és az alapráta viszonyával kezd. A harmadik szakasz a Bayes-frissítést természetes gyakoriságokkal és táblázattal mutatja be. Ezután a tökéletes és a részleges információ értékét számoljuk ki a CASE07-ben, végül megvizsgáljuk, mikor érdemes további adatot gyűjteni.

15.1. Előzetes és utólagos valószínűség

Az **előzetes valószínűség** (*prior*) az, amit egy eseményről a jelzés előtt gondolunk; az **utólagos valószínűség** (*poszterior*) az, amit a jelzés ismeretében gondolunk. A Bayes-tétel összekapcsolja a kettőt:

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H)\,P(H)}{P(E)}, \qquad P(E) = P(E \mid H)\,P(H) + P(E \mid \neg H)\,P(\neg H), \tag{15.1}$$

ahol H a hipotézis (például „a piac sikeres”), E a jelzés (például „a felmérés pozitív”). A $P(E \mid H)$ a jelzés **találati valószínűsége** (a jelzés megbízhatósága, ha a hipotézis igaz), a $P(E \mid \neg H)$ a **téves riasztás** valószínűsége.

CASE07 – Felmérés egy új szolgáltatás előtt

Az egyetem a vállalati képzés bevezetését mérlegeli. A szakértők szerint 40% az esélye, hogy a piac sikeres lesz. Sikeres piac esetén a bevezetés öt év alatt 60 millió forint nettó hasznot hoz, sikertelen esetén 30 millió forint veszteséget; elállás esetén a nettó eredmény 0. Egy piackutató cég 2 millió forintért felmérést ajánl. A korábbi tapasztalatok szerint sikeres piac esetén a felmérés 80% eséllyel ad pozitív eredményt, sikertelen piac esetén 20% eséllyel. A számértékek szemléltetők.

15.2. Jelzés, alapráta és találati valószínűség

A felmérés „80%-os megbízhatósága” sokakat arra csábít, hogy egy pozitív eredmény után 80%-os sikerre számítsanak. Ez az **alapráta elhanyagolása** (*base rate neglect*), a valószínűségi ítéletek egyik legismertebb hibája (Tversky és Kahneman 1974). A pozitív eredmény utáni sikervalószínűség a találati valószínűségtől *és* az alaprátától (a priortól) is függ. Ha a sikeres piac előzetesen ritka, sok pozitív jelzés téves riasztás lesz.

> **A megbízhatóság nem a pozitív jelzés utáni siker valószínűsége**
>
> A $P(\text{pozitív} \mid \text{siker}) = 0{,}8$ és a $P(\text{siker} \mid \text{pozitív})$ két különböző mennyiség. Az első a felmérés tulajdonsága, a második a döntéshez szükséges valószínűség, és az alaprátától is függ. A CASE07-ben a második 0,727, nem 0,8; ha a prior 10% lenne, csak 0,31.

15.3. Természetes gyakoriságok és Bayes-tábla

Mit jelent egy pozitív felmérés?

A felmérés 80% eséllyel jelez pozitívat, ha a piac jó, és 20% eséllyel, ha rossz. A piac 40% eséllyel jó. A felmérés pozitív lett. Mekkora most a siker esélye?
A lényeg: Az új jelzés alapján a korábbi becslést kell frissíteni, és ehhez a jelzés megbízhatósága mellett az előzetes esély is kell.
Kérdés: Tippeld meg előre: 80%, 73% vagy 50% a siker esélye a pozitív felmérés után?
Szemléltető, kitalált helyzet · K13 · Próbáld ki: h15-informacio

Gerd Gigerenzer és Ulrich Hoffrage kísérletei szerint a Bayes-feladatokat sokkal többen oldják meg helyesen, ha a valószínűségeket **természetes gyakoriságokként** fogalmazzuk meg (Gigerenzer és Hoffrage 1995). Képzeljünk el 1000 hasonló helyzetet (15.1. ábra). Ebből 400-ban sikeres a piac, és a felmérés közülük 320-ban pozitív; 600-ban sikertelen, és a felmérés közülük 120-ban pozitív. Pozitív felmérés összesen 440 esetben van, ebből 320 sikeres. A pozitív felmérés utáni sikervalószínűség tehát $320/440 = 0{,}727$.

Ugyanez a számítás **Bayes-táblában**:

15.1. táblázat. Bayes-tábla a pozitív felmérésre

Állapot	Prior	$P(\text{pozitív} \mid \cdot)$	Együttes: prior × találat	Poszterior
sikeres piac	0,40	0,80	0,32	$0{,}32/0{,}44 = 0{,}727$

Állapot	Prior	$P(\text{pozitív} \mid \cdot)$	Együttes: prior × találat	Poszterior
sikertelen	0,60	0,20	0,12	$0{,}12/0{,}44 = 0{,}273$
piac összesen	1,00		$P(\text{pozitív}) = 0{,}44$	1,00

Negatív felmérés után ugyanígy: $P(\text{siker} \mid \text{negatív}) = 0{,}4 \cdot 0{,}2/0{,}56 = 0{,}08/0{,}56 = 0{,}143$.

Próbáld ki: információérték

Előbb tippelj a pozitív felmérés utáni sikervalószínűségre. Ezután változtasd a priort, a találati és a téves riasztási valószínűséget és a felmérés díját. Az alkalmazás kiszámítja a poszteriort, az információ nélküli és az információval hozott döntést, az EVPI-t, az EVSI-t és a nettó értéket, és a tökéletes jelzés nézetben megmutatja, hogy ekkor EVSI = EVPI.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h15-informacio.html#K13

15.4. Tökéletes és részleges információ

Az információ értékét a döntési fával számoljuk ki (15.2. ábra). Az alapötlet: összevetjük a döntés várható értékét információ nélkül és információval.

Információ nélkül. A bevezetés várható értéke $0{,}4 \cdot 60 + 0{,}6 \cdot (-30) = 6$ millió forint, az elállásé 0. A kockázatsemleges döntés: bevezetés, várható értéke **6**.

Tökéletes információval. Ha egy „jós” előre megmondaná, sikeres lesz-e a piac, sikeres piac esetén bevezetnénk (+60), sikertelen esetén elállnánk (0). Mivel a jós válaszát még nem ismerjük, a várható érték $0{,}4 \cdot 60 + 0{,}6 \cdot 0 = 24$.

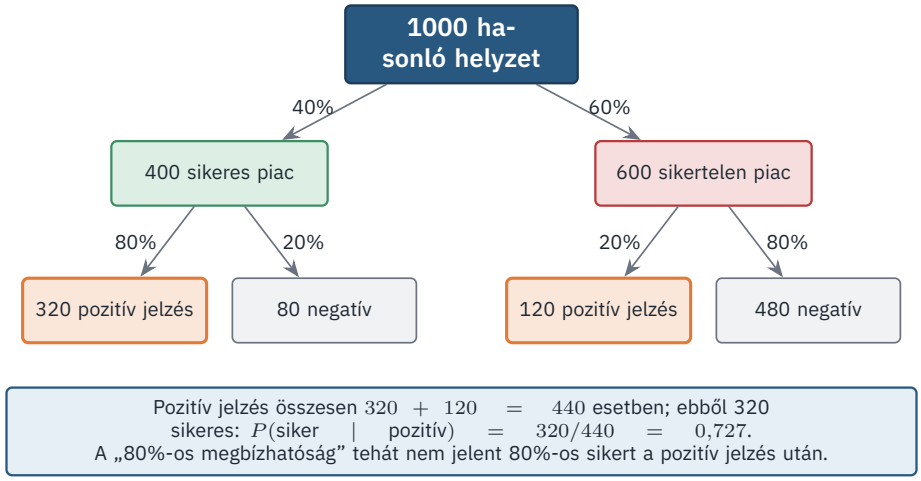
A tökéletes információ várható értéke (EVPI)

$$\text{EVPI} = E[\text{érték tökéletes információval}] - E[\text{érték információ nélkül}].$$

Az EVPI felső határ: semmilyen információért nem érdemes többet fizetni, mert egyetlen információ sem lehet jobb a tökéletesnél.

A CASE07-ben EVPI $= 24 - 6 = 18$ millió forint. Az információ abból nyeri az értékét, hogy a sikertelen piac 60%-os esetében elkerülhetjük a 30 millió forintos veszteséget: $0{,}6 \cdot 30 = 18$.

Részleges információval (felméréssel). A felmérés nem tökéletes, ezért a döntést a jelzés után újra kell optimalizálni. Pozitív jelzés után a bevezetés



15.1. ábra. Természetes gyakoriságok a CASE07 felmérésére. Ezer hasonló helyzetből 440-ben pozitív a jelzés, és ebből 320-ban sikeres a piac.

várható értéke $0{,}727 \cdot 60 + 0{,}273 \cdot (-30) = 35{,}5$ millió forint, tehát bevezetünk. Negatív jelzés után $0{,}143 \cdot 60 + 0{,}857 \cdot (-30) = -17{,}1$, tehát elállunk (0). A felméréssel a várható érték $0{,}44 \cdot 35{,}5 + 0{,}56 \cdot 0 = 15{,}6$.

A részleges információ várható értéke (EVSI)

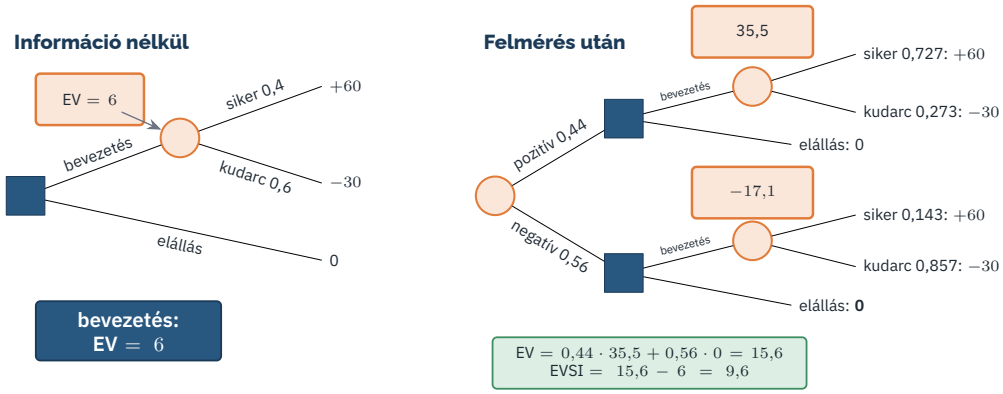
$$\text{EVSI} = E[\text{érték a jelzés után újraoptimalizált döntéssel}] - E[\text{érték információ nélkül}].$$

Kockázatsemleges, pénzben értékelő modellben $0 \le \text{EVSI} \le \text{EVPI}$. A jelzés díját külön vonjuk le: a **nettó információérték** EVSI mínusz a díj.

A CASE07-ben $\text{EVSI} = 15{,}6 - 6 = 9{,}6$ millió forint, a felmérés díja 2 millió, a nettó információérték **7,6 millió forint**. A felmérést érdemes megrendelni. A döntési stratégia: *rendeljük meg a felmérést; ha pozitív, vezessük be a képzést, ha negatív, álljunk el.*

Az EVPI-hez nem használható változatlan alapdöntés

A leggyakoribb számítási hiba, hogy az információ után is ugyanazt a döntést tételezzük fel, mint előtte (mindig bevezetünk), és csak a valószínűségeket módosítjuk. Ilyenkor az információ értéke nulla jönne ki, mert a várható érték nem változik. Az információ azért ér valamit, mert *megváltoztatja a döntést* bizonyos jelzések esetén. Ezért a jelzés után minden ágon újra kell optimalizálni.



15.2. ábra. A CASE07 döntési fája információ nélkül és a felmérés után. A felmérés után a döntés a jelzéstől függ: pozitív jelzésnél bevezetés, negatívnál elállás.

15.5. Mikor érdemes további adatot gyűjteni?

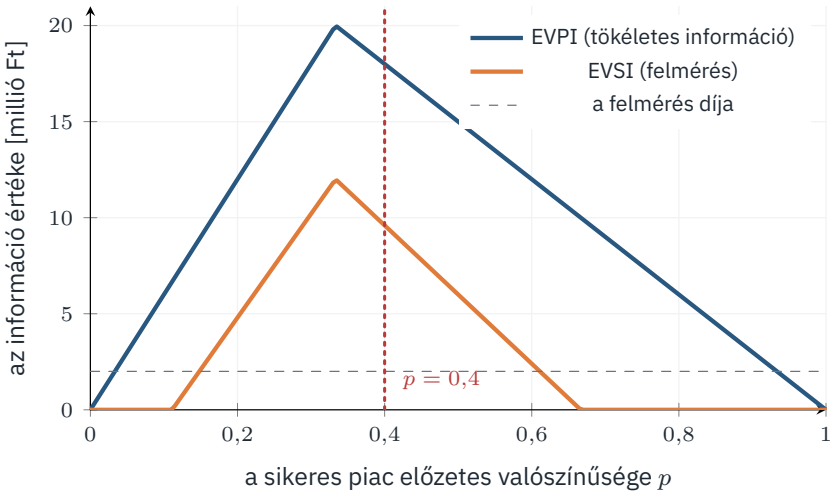
Az információ értéke nem állandó; a priortól, a következményektől és a jelzés minőségétől függ (15.3. ábra). Három általános tanulság adódik.

Az információ akkor ér a legtöbbet, ha a döntés a legbizonytalanabb. A CASE07-ben az EVPI a $p = 1/3$ priornál a legnagyobb (20 millió forint): ott egyezik meg a bevezetés és az elállás várható értéke. Ha a siker szinte biztos vagy szinte kizárt, az információ alig változtatna a döntésen, ezért alig ér valamit.

Ha az információ nem változtatna a döntésen, nem ér semmit. A felmérés EVSI-je $p < 0{,}11$ és $p > 0{,}67$ esetén nulla: ilyen priornál a felmérés eredményétől függetlenül ugyanaz lenne a döntés. Ez a nyitókártya második kérdésére adott válasz: a vezetőnek nem azt kell először megkérdeznie, mennyire pontos a felmérés, hanem azt, változtatna-e az eredménye a döntésen.

A gyenge jelzés kevesebbet ér. Ha a felmérés találati valószínűsége csökken, az EVSI csökken, és egy ponton a díj alá esik. A tökéletes jelzésnél (100% találat, 0% téves riasztás) az EVSI egyenlő az EVPI-vel.

> **Átviteli példa: egy akciós ajánlat és a változó prior**
>
> Egy beszerző egy autóflotta-ajánlatról dönt, amelynek kedvező ára csak egy hétig él. Egy szakértő két nap alatt fel tudná mérni a márka szervizhálózatának megbízhatóságát. A döntési fát érdemes minden lehetséges priorra újraszámolni, mert a beszerző maga sem biztos a saját előzetes becslésében. Ha az információ értéke a szóba jöhető priorok egész tartományában meghaladja a szakértő díját és a két nap késedelem várható költségét, a vizsgálatot érdemes elvégezni; ha



15.3. ábra. A tökéletes és a részleges információ értéke a sikeres piac előzetes valószínűségének függvényében. Az információ a döntés legbizonytalanabb pontján ér a legtöbbet; a szaggatott vonal a felmérés díja.

csak egy szűk tartományban, akkor a döntés valószínűleg az információ nélkül is helyes.

Összefoglalás

- A Bayes-tétel a priort a jelzés találati és téves riasztási valószínűségével poszteriorrá frissíti; a poszterior a priortól (alaprátától) is függ.
- A jelzés megbízhatósága nem azonos a pozitív jelzés utáni siker valószínűségével; a CASE07-ben ez 0,727, nem 0,8.
- A természetes gyakoriságok és a Bayes-tábla átlátható, ellenőrizhető frissítést tesz lehetővé.
- Az EVPI a tökéletes információ értéke, minden információ árának felső határa; a CASE07-ben 18 millió forint.
- Az EVSI a jelzés utáni újraoptimalizálással számolt érték; $0 \le \text{EVSI} \le \text{EVPI}$, a CASE07-ben 9,6 millió, a díj után nettó 7,6 millió forint.
- Az információ a döntés legbizonytalanabb pontján ér a legtöbbet, és nem ér semmit, ha nem változtatna a döntésen.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség $P(\text{pozitív} \mid \text{siker})$ és $P(\text{siker} \mid \text{pozitív})$ között?
2. Számold ki a pozitív felmérés utáni sikervalószínűséget, ha a prior 0,2, a találati valószínűség 0,8, a téves riasztásé 0,2!
3. Mekkora az EVPI a CASE07-ben, ha a sikeres piac priorja 0,5?
4. Miért nem lehet az EVSI nagyobb az EVPI-nél?

5. Egy kolléga az információ értékét úgy számolja, hogy a jelzés után is mindig bevezetést feltételez. Milyen eredményt kap, és miért hibás?

Megoldás.

1. Az első a jelzés találati valószínűsége, a felmérés tulajdonsága; a második a döntéshez szükséges poszterior, amely a priortól is függ.
2. $P(\text{pozitív}) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}32$; $P(\text{siker} \mid \text{pozitív}) = 0{,}16 / 0{,}32 = 0{,}5$.
3. Információ nélkül a bevezetés várható értéke $0{,}5 \cdot 60 - 0{,}5 \cdot 30 = 15$; tökéletes információval $0{,}5 \cdot 60 = 30$; EVPI $= 15$ millió forint.
4. Mert a tökéletes információval minden állapotban a legjobb döntést hozhatjuk; egy részleges jelzés után hozott döntés állapotonként legfeljebb ilyen jó lehet, ezért a várható értéke sem lehet nagyobb.
5. Nulla információértéket kap, mert a várható érték nem változik, ha a döntés sem változik. A hiba az, hogy az információ értéke éppen abból ered, hogy bizonyos jelzések esetén megváltoztatjuk a döntést; ezért a jelzés után újra kell optimalizálni.

Továbbolvasás

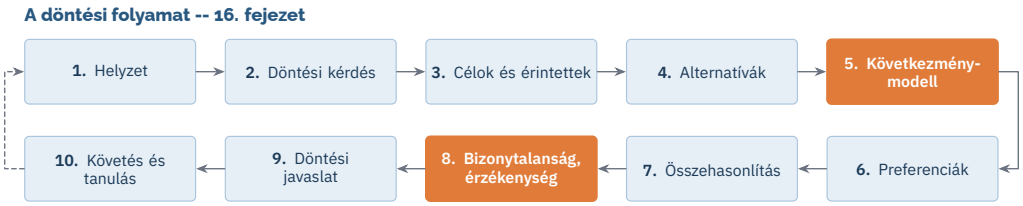
- Howard, R. A. (1966): Information value theory – az információ értékének alapcikke (Howard 1966).
- Raiffa, H. (1968): *Decision Analysis*, 3. fejezet (Raiffa 1968).
- Gigerenzer, G., Hoffrage, U. (1995) – a Bayes-feladatok természetes gyakoriságokkal (Gigerenzer és Hoffrage 1995).
- Clemen, R. T., Reilly, T. (2014), 12. fejezet – az információ értéke (Clemen és Reilly 2014).

Gyakorlat

A Döntési műhely 15. műhelyében az információérték-alkalmazással (H15) a CASE07 felmérésének és a tökéletes információnak az értékét vizsgálhatod különböző priorok mellett. Az E15 munkafüzet és az N15 notebook ugyanazt a döntési táblát számolja; mindkettő ellenőrzi, hogy $0 \le \text{EVSI} \le \text{EVPI}$, és a tájékoztatás díját külön tételként kezeli.

16.

Monte Carlo-szimuláció és bizonytalan következmények



Elég összehasonlítani a két átlagot?

Imre két ajánlat közül választ a kis cég járműveinek fenntartására. Az átlagos éves költség szinte azonos, de az egyiknél ritkán előfordulhat egy nagy javítási tétel, a másiknál egyenletesebb a kiadás. Imre tudja, hogy egyetlen rossz év a cég teljes tartalékát elvinné.
A lényeg: Az átlag mellett az eredmények eloszlása és a nagy veszteségek lehetősége is számít.
Kérdés: Melyik költségpályát választanád, ha egy nagy javítás meghiúsítaná az éves tervedet?
Szemléltető, kitalált helyzet · F16 · Próbáld ki: h16-szimulacio

A döntési fa néhány diszkrét eseménnyel írja le a bizonytalanságot. Sok döntésben azonban a bizonytalan mennyiségek folytonosak (energiaár, futásteljesítmény, kereslet), és sok van belőlük egyszerre. Az ilyen helyzetekben a következmények eloszlását **Monte Carlo-szimulációval** becsüljük: a bizonytalan bemenetekből sokszor, véletlenszerűen mintát veszünk, mindegyik mintára kiszámítjuk a következményt, és a kapott értékek eloszlását elemezzük. A módszert Nicholas Metropolis és Stanisław Ulam írta le először 1949-ben (Metropolis és Ulam 1949); ma a kockázatelemzés egyik alapeszköze (Vose 2008). Ez a fejezet a CASE02 ötéves költségét szimulálja, és összekapcsolja az eredményt a többkritériumos értékeléssel.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- egy döntési probléma bizonytalan bemeneteihez indokolt eloszlást választani;
- kezelni a bemenetek közötti függőséget és a közös kockázati tényezőket;
- felírni és futtatni egy egyszerű szimulációs modellt, rögzített véletlenmaggal;
- összegezni az eredményeloszlást (átlag, szórás, kvantilisek, túllépési valószínűség);
- megkülönböztetni a bemeneti bizonytalanságot a Monte Carlo-becslés saját hibájától;
- megmagyarázni a centrális határeloszlás-tételt és alkalmazási feltételeit;
- folyamatképességi mutatókat (C_p, C_{pk}) és selejtarányt számolni, és értelmezni a hat szigma célértékét és feltevéseit;
- felismerni a véletlen bolyongás jellegzetességeit, és a sikersorozatokat a próbálkozók számához viszonyítani;
- a szimuláció eredményét egy többkritériumos értékeléshez kapcsolni.

A fejezet a bizonytalan bemenetekkel és az eloszlások választásával kezd. Ezután a függőségek és a közös kockázati tényezők szerepét tárgyalja, majd a mintavételt, az ismételhetőséget és a szimulációs hibát. A negyedik szakasz a centrális határeloszlás-tételt mutatja be: miért közel normális sok kis hatás összege, és mikor nem. Ezt az eredmények összegzése, majd a folyamatképesség és a hat szigma követi, amely a normális eloszlás farkait a minőségügy nyelvére fordítja. A fejezet az érzékenységgel, a véletlen bolyongással (szerencse és képesség) és végül a szimuláció és az értékelés kapcsolatával zárul.

16.1. Bizonytalan bemenetek és eloszlások

Mi jön ki, ha ezerszer lejátszod?

A költségtáblázatban egyetlen szám áll az energiaárra, a futásra és a javításra. Mindhárom bizonytalan. Ha ezerszer lejátszhatnád az öt évet, a teljes költség minden alkalommal más lenne.
A lényeg: A szimuláció a bizonytalan bemenetekből a következmények teljes eloszlását állítja elő.
Kérdés: Mekkora költségre készülnél fel, ha húszból egyszer sem akarnál a keret fölé kerülni?
Szemléltető, kitalált helyzet · D38 · Próbáld ki: h16-szimulacio

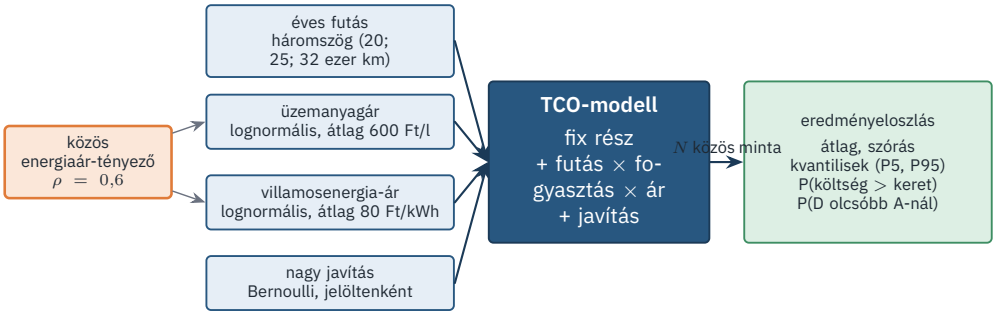
A szimuláció első lépése a bizonytalan bemenetek azonosítása és mindegyikhez egy **valószínűségeloszlás** megadása. Az eloszlást az adatokból, a mechanizmus

ismeretéből vagy szakértői becslésből választjuk (Vose 2008). A leggyakoribb választások:

- **háromszög-eloszlás:** ha csak a legkisebb, a legvalószínűbb és a legnagyobb értéket ismerjük (szakértői becslésnél gyakori);
- **lognormális eloszlás:** pozitív, jobbra ferde mennyiségekre, például árakra, ahol a relatív változások számítanak;
- **Bernoulli-eloszlás:** ritka, igen–nem eseményekre, például egy nagy javításra;
- **normális eloszlás:** sok kis, független hatás összegére, ha a negatív értékek nem okoznak problémát.

CASE02 – A teljes birtoklási költség szimulációs modellje

Az ötéves költség négy részből áll: egy fix részből (beszerzés, karbantartás, biztosítás, mínusz a maradványérték), az energiaköltségből, és egy ritka, nagy javítási tételből. A bizonytalan bemenetek: az éves futás háromszög-eloszlású (20, 25 és 32 ezer km); az üzemanyagár lognormális, 600 Ft/l átlaggal és 15%-os relatív szórással; a villamosenergia-ár lognormális, 80 Ft/kWh átlaggal és 25%-os relatív szórással. A nagy javítás esélye öt év alatt A-nál 15% (1,5 millió Ft), B-nél 10% (1,2 millió), C-nél 5% (0,5 millió, a bérlet nagyrészt fedezi), D-nél 8% (3,0 millió, akkumulátorcsere). A fix részt úgy választottuk meg, hogy a várható költség megegyezzen a determinisztikus C1 értékkel (10, 12, 14, 11 millió Ft); ez a modell kiinduló feltevése, nem utólagos igazítás. A számértékek szemléltetők.



Minden mintában ugyanazok a bemenetek érvényesek minden jelöltre (közös minták), így a jelöltek összevetése a közös kockázatot is tükrözi.

16.1. ábra. A CASE02 költségszimulációjának szerkezete. A bizonytalan bemenetekből közös mintákon keresztül számoljuk a jelöltek költségét; az üzemanyag- és a villamosenergia-árat egy közös tényező köti össze.

16.2. Függőség és közös kockázati tényezők

A bemenetek ritkán függetlenek egymástól. Az üzemanyag- és a villamosenergia-ár egy energiapiaci sokk idején együtt mozdul el; a futásteljesítmény és a

karbantartási költség együtt nő. Ha a függőséget figyelmen kívül hagyjuk, a szimuláció rosszul becsüli a kockázatot: túl szűknek vagy túl szélesnek mutatja az eredményeloszlást, és rosszul becsüli a jelöltek összevetését.

A CASE02-ben a két energiaárat egy **közös energiaár-tényező** köti össze: mindkét ár logaritmusa egy közös és egy egyéni véletlen komponensből áll, $\rho = 0{,}6$ közös súllyal. A másik fontos elv a **közös minták** (*common random numbers*) használata: egy adott mintában ugyanaz a futás és ugyanaz az energiapiaci helyzet érvényes minden jelöltre. A szimuláció így azt méri, hogyan viselkednek a jelöltek *ugyanabban a jövőben*, és nem keveri össze a jelöltek közötti különbséget a minták közötti véletlen eltéréssel.

A függőség hatása itt mérsékelt, de jól látható. Korrelált árakkal annak esélye, hogy D öt év alatt olcsóbb legyen A-nál, 16,4%; független árakkal 18,6%. A korreláció miatt a két jelölt energiaköltsége együtt mozog, így a különbségük kevésbé szóródik, és D ritkábban kerül A elé.

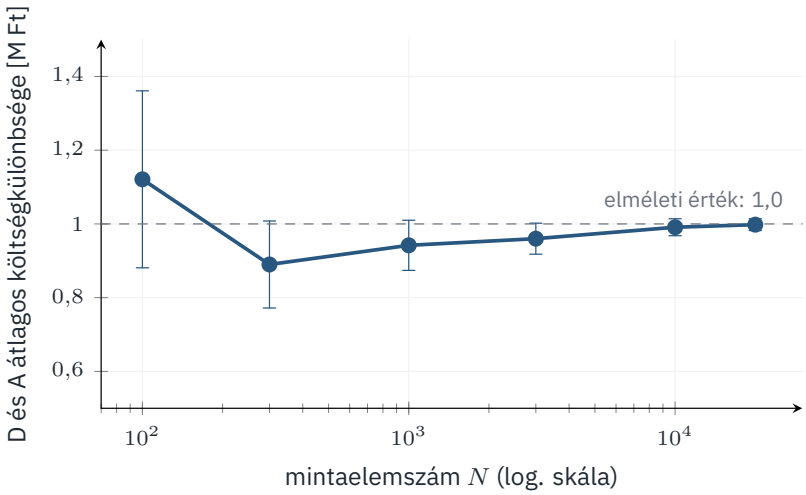
> **A független mintavétel nem helyettesíti a közös kockázatot**
>
> Ha minden jelöltet külön, egymástól független mintákkal szimulálunk, vagy a bemeneteket függetlennek tekintjük, pedig közös okuk van, a szimuláció hamis képet ad. Egy energiapiaci sokk minden jelöltet egyszerre érint; ezt a modellben is így kell leírni. A túl szűk bemeneti eloszlás ugyanígy pontosnak látszó, de félrevezető eredményt ad: a szimuláció nem lehet bizonyosabb a bemeneteinél.

16.3. Mintavétel, ismételhetőség és szimulációs hiba

A szimuláció N mintát vesz. Az eredményként kapott átlag maga is véletlen: egy másik N elemű mintából kissé más jönne ki. Ez a **Monte Carlo-hiba**, amelyet a **standard hiba** mér: $\mathrm{SE} = s/\sqrt{N}$, ahol s a mintabeli szórás. A standard hiba a mintaelemszám négyzetgyökével csökken: négyszer annyi minta a hibát felére csökkenti (16.2. ábra).

Fontos különbséget tenni a kétféle bizonytalanság között. A **bemeneti bizonytalanság** a világ tulajdonsága (nem tudjuk, mennyi lesz az energiaár); ezt a szimuláció *leírja*, és több mintával nem csökken. A **Monte Carlo-hiba** a számítás tulajdonsága; több mintával tetszőlegesen kicsivé tehető. A CASE02-ben 20 ezer mintával a költségek átlagának standard hibája 0,004–0,007 millió forint, a szórása viszont 0,5–1,0 millió forint: a számítás pontos, a világ bizonytalan.

Az **ismételhetőséghez** rögzített véletlenmag (*seed*) kell: ugyanazzal a maggal ugyanaz az eredmény jön ki. A véletlenszám-mag azonban nem garantál azonos mintákat különböző programok és platformok között (az Excel, a Python és a böngésző más véletlenszám-generátort használ). Ezért a könyv a formátumok közötti ellenőrzéshez egy **rögzített mintatáblát** használ: 1000 előre legenerált mintát, amelyet a H16 alkalmazás, az E16 munkafüzet és az



16.2. ábra. A D és az A közötti átlagos költségkülönbség becslése a mintaelemszám függvényében, a standard hiba kétszeresével. A becslés az elméleti 1,0 millió forinthoz tart, a hiba $1/\sqrt{N}$ ütemben csökken.

N16 notebook egyaránt beolvas, és amelyen pontosan ugyanazt az eredményt kell adniuk. A „natív” futtatás, saját véletlenszámokkal, külön mód, amelynek eredményét statisztikai tűréshatárral vizsgáljuk.

16.4. Sok kis hatás összege: a centrális határeloszlás-tétel

Miért harang alakú a sok kis hatás összege?

Vasárnap délután társasjáték. Bálint három kockával dob, és a nagymamája, aki ötven éve játszik, megjegyzi: „tíz vagy tizenegy, az jön a legtöbbször; tizennyolcat még sosem láttam.” Bálint először cinkes kockára gyanakszik, aztán papírt vesz elő, és elkezdi összeszámolni a lehetőségeket.

A lényeg: Sok független, kis hatás összege közel normális (harang alakú) eloszlású, akármilyen is az egyes hatások eloszlása; az összeg szórása csak a tagok számának négyzetgyökével nő.

Kérdés: Milyen alakú lesz harminc kocka összegének eloszlása, és milyen egy húszezer mintás szimuláció átlagáé?

Szemléltető, kitalált helyzet · K28 · Próbáld ki: h16-szimulacio

Az előző szakasz standard hibája, $s/\sqrt{N}$, egy mélyebb törvényszerűség következménye. Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású, μ várható

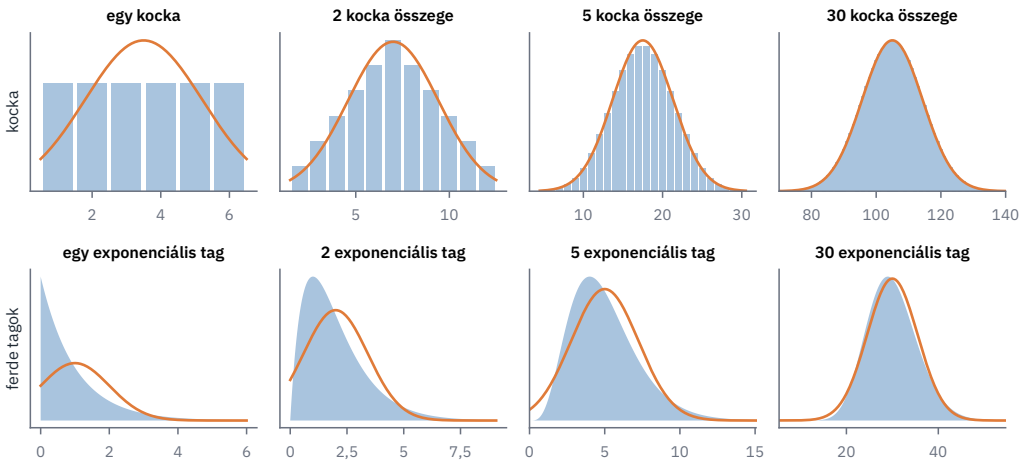
értékű és véges σ^2 szórásnégyzetű valószínűségi változók, akkor összegük várható értéke $n\mu$, szórása $\sigma\sqrt{n}$, és a **centrális határeloszlás-tétel** szerint a standardizált összeg eloszlása n növekedtével a standard normális eloszláshoz tart:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{N}(0,1). \tag{16.1}$$

A tétel azonos eloszlás nélkül is érvényes, ha a tagok függetlenek, és egyik sem uralja az összeget (Feller 1968). Ezért normális közelítéssel írható le sok mérési hiba, egy termék tömegének ingadozása vagy egy portfólió sok kis tételből álló költsége: mindegyik sok apró, egymástól független hatás összege (Page 2018).

Bálint kockái

Egy kocka várható értéke 3,5, szórásnégyzete $35/12 \approx 2{,}92$. Három kocka összegének 216 kimenetele közül 27–27 adja a tízet és a tizenegyet, így ezek együttes esélye 25%; a három és a tizennyolc együttes esélye csak 0,9%. Nagymamának tehát igaza volt, és a kockák rendben vannak. Harminc kocka összegének várható értéke 105, szórása $\sqrt{30 \cdot 35/12} \approx 9{,}35$. Annak esélye, hogy az összeg legfeljebb 87, a pontos számítás szerint 3,05%, a normális közelítés szerint 3,07% – a különbség elhanyagolható (16.3. ábra).



16.3. ábra. A centrális határeloszlás-tétel működés közben. Felső sor: egy, kettő, öt és harminc kocka összegének pontos eloszlása (oszlopok) és a normális közelítés (narancs görbe). Alsó sor: ugyanez erősen ferde, exponenciális eloszlású tagokra; a ferdeség az összegzéssel fokozatosan eltűnik.

A tétel döntéshozatali tanulsága kettős. Egyrészt megmagyarázza, miért elég sokszor az átlag és a szórás: sok kis, független hatás összegét ez a két szám jól leírja. Másrészt megmutatja, mikor *nem* elég. Ha egy-egy tag uralja az összeget (mint a CASE02 ritka, de nagy akkumulátorcseréje), ha a tagok egy közös tényezőn keresztül együtt mozognak (16.2. szakasz), vagy ha az egyes tagok eloszlása nehézfarkú, végtelen szórású, a normális közelítés alábecsüli a

szélsőséges kimenetelek esélyét. Ilyenkor a szimulált eloszlás kvantiliseire kell támaszkodni, ahogy a következő szakasz teszi.

Kockák összege: pontos eloszlás, normális közelítés és szimuláció

A pontos eloszlást ismételt konvolúció adja: két független változó összegének eloszlása az eloszlásaik konvolúciója. A normális közelítésnél a folytonossági korrekció ($87{,}5$) a diszkrét és a folytonos eloszlás különbségét veszi figyelembe.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

kocka = np.ones(6) / 6                  # egy kocka: 1..6 egyenletesen
mu, var = 3.5, 35 / 12                  # várható érték és szórásnégyzet

def osszeg_eloszlas(n):
    """n kocka összegének pontos eloszlása konvolúcióval."""
    p = np.array([1.0])
    for _ in range(n):
        p = np.convolve(p, kocka)
    return np.arange(n, 6 * n + 1), p    # értékek és valószínűségek

ert, p = osszeg_eloszlas(3)
p10_11 = p[ert == 10][0] + p[ert == 11][0]
p3_18 = p[ert == 3][0] + p[ert == 18][0]
print(f"3 kocka: P(10 vagy 11) = {p10_11:.3f}, "
      f"P(3 vagy 18) = {p3_18:.4f}")

n = 30
ert, p = osszeg_eloszlas(n)
m, s = n * mu, np.sqrt(n * var)
pontos = p[ert <= 87].sum()
kozelito = norm.cdf((87.5 - m) / s)      # folytonossági korrekcióval
print(f"30 kocka: átlag {m:.0f}, szórás {s:.2f}; P(összeg <= 87): "
      f"pontos {pontos:.4f}, normális közelítés {kozelito:.4f}")

# Ugyanez szimulációval: 20 ezer dobássorozat
rng = np.random.default_rng(7)
minta = rng.integers(1, 7, size=(20000, n)).sum(axis=1)
print(f"szimuláció: átlag {minta.mean():.2f}, szórás {minta.std():.2f}")

fig, axs = plt.subplots(1, 4, figsize=(9, 2.4))
for ax, k in zip(axs, [1, 2, 5, 30]):
    e, q = osszeg_eloszlas(k)
    ax.bar(e, q, color="lightsteelblue")
    x = np.linspace(e[0], e[-1], 200)
    ax.plot(x, norm.pdf(x, k * mu, np.sqrt(k * var)), color="C1")
    ax.set_title(f"{k} kocka összege"); ax.set_yticks([])
plt.tight_layout(); plt.show()
```

A futás eredménye: három kockánál $P(10 \text{ vagy } 11) = 0{,}250$, $P(3 \text{ vagy } 18) = 0{,}0093$; harminc kockánál a pontos valószínűség 0,0305, a normális közelítés 0,0307, a szimuláció átlaga 105,08, szórása 9,37.

16.5. Kvantilis, veszteségküszöb és túllépési esély

A szimuláció eredménye egy eloszlás, amelyet néhány mutatóval összegzünk:

- **átlag és szórás:** a várható érték és a szóródás;
- **kvantilisek:** a P5 és a P95 az az érték, amely alatt a minták 5, illetve 95%-a van; a P95 a „húszból egyszer előforduló rossz eset”;
- **túllépési valószínűség:** annak esélye, hogy a költség egy küszöböt (keretet) meghalad.

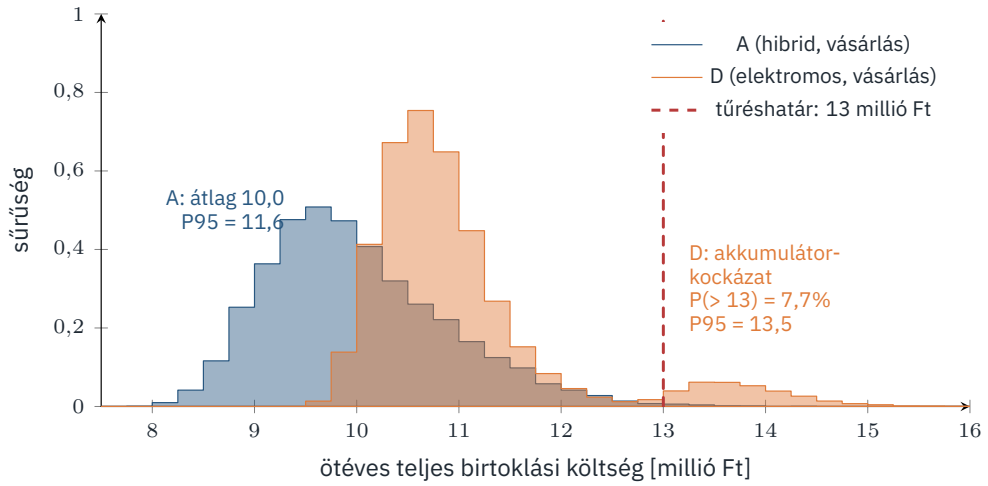
16.1. táblázat. A CASE02 ötéves költségének szimulált eloszlása (millió Ft, 20 ezer minta, korrelált energiaárak)

Jelölt	Átlag	Szórás	P5	P50	P95	P(költség > 13 M Ft)
A	10,00	0,88	8,79	9,87	11,64	0,3%
B	12,00	0,63	11,14	11,91	13,19	7,6%
C	14,00	0,51	13,29	13,94	14,93	99,7%
D	11,00	0,97	10,04	10,75	13,53	7,7%

A táblázat a nyitókártya kérdésére felel (16.4. ábra). D átlaga mindössze egymillió forinttal nagyobb A-énál, de a P95-értéke közel kétmillióval: a 8%-os esélyű akkumulátorcsere egy hosszú jobb oldali farkat ad az eloszlásnak. Ha a szervezet 13 millió forintos keretet nem léphet túl, D 7,7%, A 0,3% eséllyel lépi túl. Egy kockázatkerülő döntéshozó számára ez a különbség fontosabb lehet, mint az átlagok különbsége. A medián (P50) D-nél kisebb az átlagnál: a legtöbb esetben D költsége 10,8 millió körül van, de a ritka nagy javítás felhúzza az átlagot.

Próbáld ki: szimulációs eloszlás

Előbb tippeld meg, melyik jelöltnél nagyobb az esélye a 13 millió forintos keret túllépésének. Ezután változtasd a mintaelemszámot, a bemeneti eloszlások szélességét, a korrelációt és a javítási kockázatot. Az alkalmazás kirajzolja az eloszlásokat, kiszámítja a kvantiliseket és a túllépési esélyt, és a rögzített mintatábla módban a könyv referenciaértékeit adja.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h16-szimulacio.html#D38



16.4. ábra. Az A és a D jelölt ötéves költségének szimulált eloszlása. D eloszlásának jobb oldali farka a ritka akkumulátorcsere következménye; a szaggatott vonal a 13 millió forintos tűréshatár.

16.6. Folyamatképesség és hat szigma

Hány selejt jut egymillió szeletre?

Évi egy kis veszprémi édességüzem minőségügyi munkatársa. A nagy áruházlánc 48 és 52 gramm közötti csokoládészeletet kér, a csomagológép átlagosan 50,3 grammot ad, 0,6 gramm szórással. A beszerző szerint „hat szigmát várnak el”; Évi azon gondolkodik, mit jelent ez a gépükre lefordítva, és mi a jobb első lépés: a gép középre állítása vagy a szórás csökkentése.

A lényeg: A folyamatképesség azt méri, hányszor fér el a folyamat természetes szórása a vevő által megadott tűrésben. A hat szigma ennek egy szigorú célértéke: a tűréshatár hat szórásnyira legyen az átlagtól.

Kérdés: Melyik lépés csökkenti jobban a selejtet: ha a gépet középre állítjuk, vagy ha a szórását csökkentjük?

Szemléltető, kitalált helyzet · K29 · Próbáld ki: h16-szimulacio

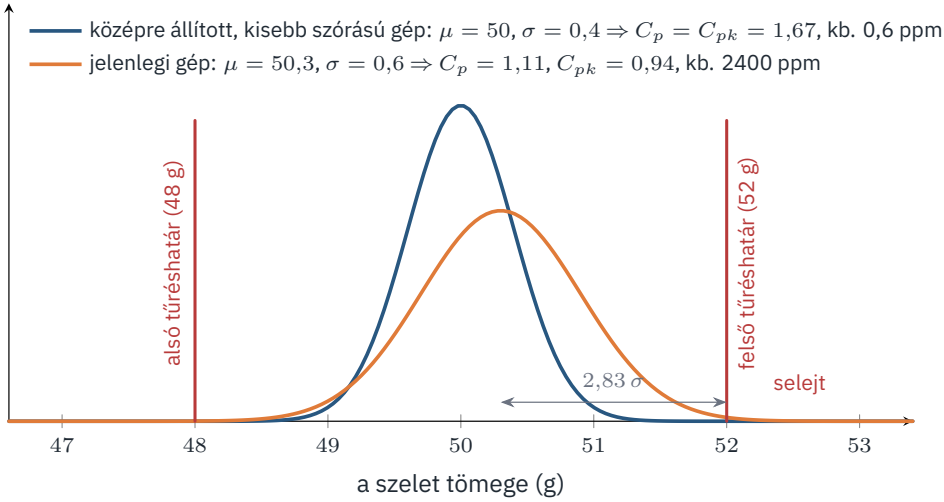
A minőségügyben a vevő a termék egy jellemzőjére **tűréshatárokat** ad meg: alsó (LSL) és felső (USL) határt. A folyamatnak saját, természetes szórása van, amelyet sok kis, független hatás alakít; a centrális határeloszlás-tétel miatt ezt gyakran normális eloszlással írjuk le. A két leggyakoribb **folyamatképességi mutató** (Kane 1986; Montgomery 2020):

$$C_p = \frac{\mathrm{USL} - \mathrm{LSL}}{6\sigma}, \qquad C_{pk} = \frac{\min(\mathrm{USL} - \mu,\ \mu - \mathrm{LSL})}{3\sigma}. \tag{16.2}$$

A C_p azt mutatja, elférne-e a folyamat $\pm 3\sigma$-s sávja a tűrésben, ha középen lenne; a C_{pk} az átlag tényleges helyét is figyelembe veszi. $C_{pk} \geq 1{,}33$ a szokásos ipari elvárás, $C_{pk} = 2$ felel meg a hat szigmának.

Évi csomagológépe

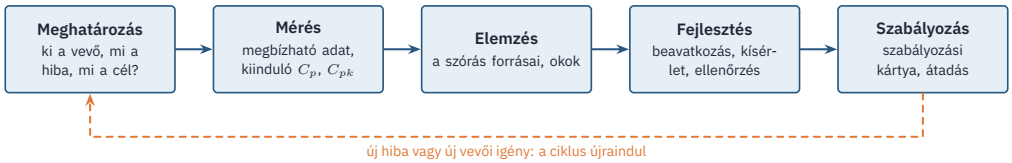
A jelenlegi gépnél $C_p = 4/(6 \cdot 0{,}6) = 1{,}11$, de mivel az átlag a felső határhoz közelebb van, $C_{pk} = \min(1{,}7;\ 2{,}3)/(3 \cdot 0{,}6) = 0{,}94$. A normális eloszlás szerint egymillió szeletből kb. 2370 esik a tűrésen kívül, szinte mind a felső határ fölé. Ha a gépet középre állítják ($\mu = 50$), $C_p = C_{pk} = 1{,}11$, és a selejt kb. 860 ppm-re csökken. Ha a szórást is 0,4 grammra csökkentik, $C_p = C_{pk} = 1{,}67$, és a selejt kb. 0,6 ppm (16.5. ábra). A középre állítás olcsó és gyors, de a nagy javulást a szórás csökkentése hozza.



16.5. ábra. Folyamatképesség a csomagológép példáján. A jelenlegi gép átlaga a felső tűréshatár felé tolódott, és a szórása nagy: a piros farok a selejt. A középre állított, kisebb szórású gép eloszlása kényelmesen elfér a tűrésben.

A **hat szigma** (*Six Sigma*) a Motorolánál az 1980-as években kialakult minőségfejlesztési program, amelyet később a General Electric tett világszerte ismertté (Harry és Schroeder 2000). A név a célt fejezi ki: a tűréshatár hat szórásnyira legyen a folyamat átlagától. Középre állított folyamatnál ez egymilliárd darabonként mindössze két selejtet jelentene. A program azonban azzal számol, hogy hosszú távon a folyamat átlaga másfél szórásnyit elvándorolhat; ezzel a feltevéssel adódik az ismert **3,4 hiba egymillió lehetőségenként** (DPMO) célérték. A másfél szórásnyi eltolás tapasztalati konvenció, nem természeti állandó, és a szakirodalomban vitatott (Montgomery 2020); döntéshozóként elég tudni, hogy a „hat szigma” mögötti 3,4 ppm egy feltevésen nyugszik.

A program módszertani magja egy ötlépéses fejlesztési ciklus, a **DMAIC** (16.6. ábra): a probléma és a vevői elvárás meghatározása, a jelenlegi teljesítmény megbízható mérése, a szórás forrásainak elemzése, a fejlesztés és végül a javult állapot szabályozása. Az utolsó lépés eszköze a Walter Shewhart által bevezetett **szabályozási kártya**, amely a folyamat mért értékeit $\pm 3\sigma$-s beavatkozási határokkal ábrázolja (Shewhart 1931). A kártya a *közönséges* (sok kis okból eredő, a rendszerhez tartozó) és a *különleges* (azonosítható, egyedi) okból eredő ingadozást választja szét: az elsőn csak a rendszer megváltoztatása segít, a második okát meg kell keresni. A modellek monitorozásánál (18.6. szakasz) ugyanez a gondolat tér vissza.



16.6. ábra. A DMAIC-ciklus, a hat szigma fejlesztési folyamata. Minden lépésnek mérhető kimenete van; a szabályozási szakasz után új hiba vagy új vevői igény esetén a ciklus újraindul.

A folyamatképesség csak stabil folyamatra értelmezhető

A C_p és a C_{pk} azt feltételezi, hogy a folyamat statisztikailag stabil (a szabályozási kártyán nincs különleges ok), és hogy a jellemző eloszlása jól közelíthető normálissal. Egy elvándorló vagy két műszak között ingadozó folyamat mutatója félrevezető: egy szép szám a múlt egy szakaszát írja le, nem a jövőt. Változó környezetben a szórás csökkentése önmagában nem is mindig cél: a 25. fejezet szerint a tanuló rendszereknek a változatosság a nyersanyaga.

Próbáld ki: folyamatképesség és hat szigma

Előbb tippeld meg, hány selejt jut egymillió szeletre a jelenlegi gépnél. Ezután mozgasd az átlagot és a szórást, kapcsold be a hosszú távú, másfél szórásnyi eltolást, és figyeld, hogyan változik a C_p, a C_{pk} és a selejtarány.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h16-szimulacio.html#K29

Folyamatképességi mutatók és selejtarány

A selejtarány a normális eloszlás két farka: `norm.cdf` az alsó, `norm.sf` (1 − eloszlásfüggvény) a felső határon túli valószínűséget adja.

```python
import numpy as np
from scipy.stats import norm

def kepesseg(also, felso, atlag, szoras):
    """Folyamatképességi mutatók és a selejt ppm-ben."""
    cp = (felso - also) / (6 * szoras)
    cpk = min(felso - atlag, atlag - also) / (3 * szoras)
    selejt = norm.cdf(also, atlag, szoras) + norm.sf(felso, atlag, szoras)
    return cp, cpk, 1e6 * selejt

# Csokoládészelet: a vevő 48–52 g-ot kér
also, felso = 48.0, 52.0
for nev, atlag, szoras in [("jelenlegi gép", 50.3, 0.6),
                           ("középre állítva", 50.0, 0.6),
                           ("kisebb szórás", 50.0, 0.4)]:
    cp, cpk, ppm = kepesseg(also, felso, atlag, szoras)
    print(f"{nev:16s} Cp = {cp:.2f}  Cpk = {cpk:.2f}  "
          f"selejt = {ppm:7.1f} ppm")

# Hat szigma: a tűréshatár hat szórásnyira van az átlagtól
print(f"±6σ, középen:       {2e6 * norm.sf(6):.4f} ppm")
print(f"±6σ, 1,5σ eltolás:  {1e6 * (norm.sf(4.5) + norm.cdf(-7.5)):.2f} ppm")
```

A futás eredménye: a jelenlegi gépnél $C_p = 1{,}11$, $C_{pk} = 0{,}94$, a selejt 2366,5 ppm; középre állítva 858,1 ppm; kisebb szórással 0,6 ppm. Hat szigmánál középre állított folyamattal 0,002 ppm, másfél szórásnyi eltolással 3,4 ppm.

16.7. Bemeneti és szerkezeti érzékenység

A szimuláció után érdemes megnézni, *melyik* bemenet bizonytalansága adja az eredmény bizonytalanságának nagyobb részét. A legegyszerűbb eljárás, hogy a bemeneteket egyenként rögzítjük a várható értékükön, és megnézzük, mennyivel csökken az eredmény szórása. A CASE02-ben D-nél a szórás legnagyobb része a ritka akkumulátorcseréből ered; ha ezt rögzítenénk, a szórás nagyjából a felére csökkenne. Ez azt jelzi, hogy D kockázatát leginkább egy garanciális vagy biztosítási megállapodás csökkentené. Az ilyen vizsgálatok formális kiterjesztései a globális érzékenységvizsgálat módszerei, amelyek a teljes bemeneti térben bontják fel a szórást (Saltelli és mtsai. 2008).

A **szerkezeti érzékenység** a modell felépítésére vonatkozik: mi történik, ha más eloszlást választunk, vagy egy mechanizmust másként írunk le? Ha például az akkumulátorcsere esélye nem 8, hanem 15%, vagy a villamosenergia-ár nem lognormális, hanem egy sokkal szélesebb eloszlást követ, a következtetés változhat. A szerkezeti bizonytalanságot nem lehet több mintával csökkenteni; forgatókönyvekkel és a modell feltevéseinek vitájával kell kezelni (17. fejezet).

16.8. Véletlen bolyongás: szerencse, árfolyam és verseny

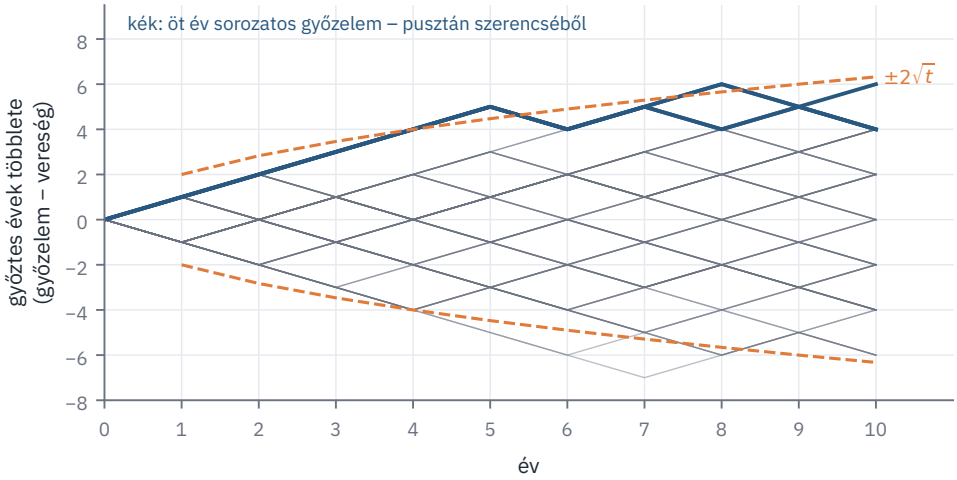
Ügyes vagy szerencsés?

Karácsonykor Dávid nagybátyja büszkén meséli, hogy a befektetési alapja öt éve egymás után veri a piacot, és ez a kezelő zsenialitását bizonyítja. Dávid, aki most tanul statisztikát, csendben fejben számol: ezer alapkezelő közül hánynak sikerülne ugyanez puszta szerencséből?
A lényeg: Ha sokan próbálkoznak, a véletlen is produkál hosszú sikersztériákat. A múltbeli eredmény önmagában gyenge bizonyíték a képességre, különösen ha a győztest utólag választjuk ki.
Kérdés: Ezer, semmilyen különleges képességgel nem rendelkező alapkezelő közül hány verné a piacot öt évig egymás után?
Szemléltető, kitalált helyzet · K30 · Próbáld ki: h16-szimulacio

A **véletlen bolyongás** a legegyszerűbb dinamikus valószínűségi modell: egy mennyiség minden lépésben egy független véletlen lökéssel változik, $S_t = S_{t-1} + \varepsilon_t$. Ha a lökések várható értéke nulla és szórása σ, akkor t lépés után a várható érték is nulla, a szórás viszont $\sigma\sqrt{t}$: a bolyongás nem tér vissza egy „normális” szinthez, hanem egyre szélesebb sávban kalandozik (Feller 1968). A meglepő tulajdonságok közé tartozik, hogy a bolyongás hosszú időszakokat tölthet a nulla egyik oldalán, és ezeket a szakaszokat könnyű egy rejtett ok, egy „trend” jeleként értelmezni.

A pénzügyekben a **hatékony piacok hipotézise** szerint az árak minden elérhető információt tükröznek, ezért a jövőbeli árváltozás az új, előre nem látható információn múlik, és jó közelítéssel véletlen bolyongást követ (Fama 1970; Malkiel 2019). Ebből következik a kártya tanulsága: ha ezer alapkezelő mindegyike évente 50% eséllyel veri a piacot, öt egymást követő győztes évre átlagosan $1000/2^5 \approx 31$ kezelő számíthat. Egy ezer kezelős, tízéves szimulációban 28 kezelő nyerte meg az első öt évet, és 106-nak volt valahol legalább ötéves győzelmi sorozata (16.7. ábra) – mind pusztán szerencséből.

Michael Mauboussin a teljesítményt a képesség és a szerencse keverékeként írja le, és egy kevéssé intuitív következményre figyelmeztet: minél egyformábban képzettek a versenyzők, annál nagyobb a szerencse szerepe a különbségekben (*a képesség paradoxona*) (Mauboussin 2012). A döntéshozó számára ez három gyakorlati szabályt jelent. A sikert a próbálkozók számához kell viszonyítani: a „legjobb tíz” listája egy nagy mezőnyből szerencsés véletlenekkel is megtelik. A képesség jele a tartósság sok, független próbán, nem egy látványos sorozat. Végül a szélsőséges eredmények után **regresszió az átlaghoz** várható: egy kiugróan jó év után a következő gyakran gyengébb, ha a kiugrás részben szerencse volt. A 3.5. szakasz ugyanezt a jelenséget a személyes döntések felől mutatta be.



16.7. ábra. Ezer, képesség nélküli alapkezelő győzelmi többlete tíz év alatt (60 véletlenszerűen kiválasztott pálya). A kék pályák öt év sorozatos győzelmet mutatnak; a narancs szaggatott vonal a véletlen bolyongás $\pm 2\sqrt{t}$-s sávja.

Próbáld ki: szerencse és képesség a versenyben

Előbb tippeld meg, ezer alapkezelőből hánynak lesz öt egymást követő győztes éve pusztán szerencséből. Ezután add hozzá a képességet egy kis csoportnak, és figyeld, mennyi idő kell ahhoz, hogy a képességesek valóban elváljanak a szerencsésektől.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h16-szimulacio.html#K30

Sikersorozatok és véletlen bolyongás

A kód ezer kezelő tíz évét szimulálja; minden évben pénzfeldobás dönti el, ki veri a piacot. A halmozott győzelmi többlet ($+1$ győzelem, -1 vereség) véletlen bolyongás.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

rng = np.random.default_rng(2026)
alapok, evek = 1000, 10
# Minden alapkezelő minden évben 50% eséllyel veri a piacot,
# vagyis senkinek sincs különleges képessége
gyoz = rng.random((alapok, evek)) < 0.5

def leghosszabb_sorozat(sor):
    hossz = best = 0
    for g in sor:
        hossz = hossz + 1 if g else 0
        best = max(best, hossz)
    return best

sorozat = np.array([leghosszabb_sorozat(s) for s in gyoz])
print("legalább 5 egymást követő győztes év:",
      (sorozat >= 5).sum(), "alapkezelő a", alapok, "közül")
print("az első öt év mindegyikében győztes:",
      gyoz[:, :5].all(axis=1).sum(), "(várható: 1000/32 = 31,25)")

# Véletlen bolyongás: halmozott többlethozam (+1 / -1 évente)
utak = np.cumsum(np.where(gyoz, 1, -1), axis=1)
print("a 10. év után a többlet szórása:", utak[:, -1].std().round(2),
      "(elméleti: gyök(10) = 3,16)")
plt.plot(range(1, evek + 1), utak[:40].T, color="gray", lw=0.7)
t = np.arange(1, evek + 1)
plt.plot(t, 2 * np.sqrt(t), "C1--", t, -2 * np.sqrt(t), "C1--")
plt.xlabel("év"); plt.ylabel("halmozott győzelmi többlet")
plt.show()
```

A futás eredménye: 106 kezelőnek volt legalább ötéves győzelmi sorozata, 28 nyerte meg az első öt évet (várható érték 31,25), a tizedik év utáni többlet szórása 3,23 (elméleti érték $\sqrt{10} \approx 3{,}16$).

16.9. A szimuláció összekapcsolása az értékeléssel

A szimuláció eredménye közvetlenül beépíthető a többkritériumos értékelésbe. A 8.4. szakasz szerint az additív modellben D akkor előzi meg A-t, ha a két jelölt ötéves költségének különbsége 1,464 millió forintnál kisebb ($V_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{A}} = 3{,}5\,(c_{\mathrm{A}} - c_{\mathrm{D}}) + 5{,}125$, ami $c_{\mathrm{D}} - c_{\mathrm{A}} < 1{,}464$ esetén pozitív). A szimulált költségekből ennek esélye **74,8%**. A bázissúlyokkal tehát D a költségbizonytalanság mellett az esetek mintegy háromnegyedében marad az első, egynegyedében A kerül elé.

Ez az eredmény a 12.5. szakasz rangelfogadottságához hasonló, de más forrásból ered: ott a súlyok, itt a következmények bizonytalansága okozza a rangsor változékonyságát. A két vizsgálat együtt adja a javaslat stabilitásának teljesebb képét. A CASE02 döntési feljegyzésébe így kerülhet: „D a bázissúlyokkal

és a várható költségekkel az első; a költségbizonytalanság mellett 75%, a súlyok ±30%-os bizonytalansága mellett 83% eséllyel marad az első. D fő kockázata az akkumulátorcsere; ennek garanciális kezelése a javaslat feltétele.”

Átviteli példa: kapacitástartalék bizonytalan kereslet mellett (CASE04)

Egy ügyfélszolgálat napi kereslete bizonytalan: átlagosan 400 megkeresés, de egyes napokon 550 is előfordul. A vezető azt mérlegeli, mekkora kapacitást tartson. Egy szimuláció a napi keresletet egy illesztett eloszlásból mintavételezi, és minden kapacitásszintre kiszámítja a kiszolgálatlan megkeresések arányát és a várakozási időt. Az eredmény nem egyetlen optimális kapacitás, hanem egy görbe: mennyi többletköltség mekkora szolgáltatási szintet biztosít. A döntéshozónak ezen a görbén kell kiválasztania az elfogadható kompromisszumot, ahogy a 13.4. szakaszban a Pareto-fronton.

Összefoglalás

- A Monte Carlo-szimuláció a bizonytalan bemenetek mintavételezésével a következmények teljes eloszlását állítja elő.
- Az eloszlást az adatokból, a mechanizmusból vagy szakértői becslésből választjuk; a túl szűk eloszlás félrevezetően pontos eredményt ad.
- A függő bemeneteket közös tényezővel, a jelöltek összevetését közös mintákkal kell modellezni.
- A Monte Carlo-hiba $s/\sqrt{N}$ ütemben csökken; a bemeneti bizonytalanság nem csökken több mintával. A formátumok közötti ellenőrzéshez rögzített mintatábla kell.
- Az eredményt átlaggal, szórással, kvantilisekkel és túllépési valószínűséggel összegezzük; a CASE02-ben D átlaga alig nagyobb A-énál, de a P95-értéke és a keret túllépésének esélye lényegesen nagyobb.
- Sok független, kis hatás összege a centrális határeloszlás-tétel szerint közel normális eloszlású; a közelítés domináns tag, közös tényező vagy nehézfarkú tagok esetén alábecsüli a szélsőségeket.
- A C_p a tűrés és a természetes szórás viszonyát, a C_{pk} az átlag helyét is méri; a hat szigma 3,4 ppm-es célértéke egy másfél szórásnyi hosszú távú eltolás feltevésén nyugszik. A DMAIC-ciklus és a szabályozási kártya a fejlesztés és a stabil állapot eszköze.
- A véletlen bolyongás szórása a lépések számának gyökével nő; sok próbálkozó között a szerencse is produkál hosszú sikersorozatot, ezért a teljesítményt a mezőny méretéhez és sok független próbához kell viszonyítani.
- A szimuláció az értékelésbe is beépíthető: a költségbizonytalanság mellett D 74,8% eséllyel marad az első az additív modellben.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség a bemeneti bizonytalanság és a Monte Carlo-hiba között? Melyik csökken több mintával?

2. Egy szimulációban 2500 minta mellett az átlag standard hibája 0,04. Hány minta kell a 0,01-es standard hibához?
3. Miért fontos, hogy minden jelöltet ugyanazokkal a mintákkal szimuláljunk?
4. Miért nagyobb D P95-értéke A-énál, ha az átlaguk alig különbözik?
5. Egy elemző az energiaárakat függetlennek tekinti, mert „így egyszerűbb”. Milyen irányban torzíthatja ez a jelöltek összevetését?
6. Egy folyamat tűrése 10 ± 0,3 mm, átlaga 10,1 mm, szórása 0,05 mm. Mennyi a C_p és a C_{pk}, és melyik határnál várható a selejt?
7. Egy hírlevél „a tíz legjobb befektetési alapot” mutatja be, amelyek három éve folyamatosan verik a piacot, ötszáz alap közül. Mit kérdeznél, mielőtt pénzt tennél bármelyikbe?

Megoldás.

1. A bemeneti bizonytalanság a világ tulajdonsága, a szimuláció leírja, de nem csökkenti; a Monte Carlo-hiba a becslés pontatlansága, amely több mintával csökken.
2. A standard hiba $1/\sqrt{N}$ ütemben csökken; negyedére csökkentéséhez 16-szor annyi minta, 40 000 kell.
3. Mert így a jelöltek ugyanabban a jövőben (ugyanazzal a futással és energiapiaci helyzettel) kerülnek összevetésre, és a különbségük nem keveredik a minták közötti véletlen eltéréssel.
4. Mert D-nél a ritka, de nagy akkumulátorcsere (8%, 3 millió Ft) hosszú jobb oldali farkat ad az eloszlásnak, amely az átlagot keveset, a felső kvantilist sokat növeli.
5. A független árak mellett a jelöltek energiaköltsége kevésbé mozog együtt, így a különbségük jobban szóródik; az elemző túlbecsüli annak esélyét, hogy a drágább jelölt olcsóbb lesz (a CASE02-ben 16,4% helyett 18,6%).
6. $C_p = 0{,}6/(6 \cdot 0{,}05) = 2{,}0$; $C_{pk} = \min(10{,}3 - 10{,}1;\ 10{,}1 - 9{,}7)/(3 \cdot 0{,}05) = 0{,}2/0{,}15 = 1{,}33$. A felső határ van közelebb (négy szórás), ott várható a selejt; középre állítással a C_{pk} is 2 lenne.
7. Ötszáz alapból három év sorozatos győzelem 50%-os éves eséllyel átlagosan $500/8 \approx 62$ alapnak sikerülne puszta szerencséből is, tehát tíz ilyen alap léte semmit sem bizonyít. Azt kérdezném, hosszabb távon és független időszakokban is jobbak-e, mekkora a költségük, és hogy a lista nem utólag kiválasztott győztesekből áll-e.

Továbbolvasás

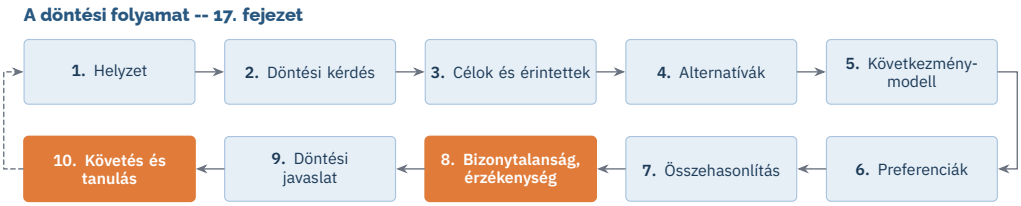
- Metropolis, N., Ulam, S. (1949): The Monte Carlo method (Metropolis és Ulam 1949).
- Vose, D. (2008): *Risk Analysis: A Quantitative Guide* – eloszlások választása, függőségek, eredmények összegzése (Vose 2008).
- Saltelli, A. és mtsai (2008): *Global Sensitivity Analysis: The Primer* – a bemeneti bizonytalanság felbontása (Saltelli és mtsai. 2008).
- Feller, W. (1968): *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* – a centrális határeloszlás-tétel és a véletlen bolyongás (Feller 1968).
- Montgomery, D. C. (2020): *Introduction to Statistical Quality Control* – folyamatképesség, szabályozási kártyák, hat szigma (Montgomery 2020).
- Mauboussin, M. J. (2012): *The Success Equation* – képesség és szerencse (Mauboussin 2012).

Gyakorlat

A Döntési műhely 16. műhelyében a szimulációs alkalmazással (H16) a CASE02 költségeloszlását vizsgálhatod különböző bemeneti feltevések mellett; a K28 nézet animációval mutatja a centrális határeloszlás-tételt, a K29 a folyamatképességet és a hat szigmát, a K30 a szerencse és a képesség viszonyát. Az E16 munkafüzetben „rögzített példa” és „új kísérlet” mód van; az N16 notebook a rögzített mintatáblán ellenőrzi a három eszköz egyezését, és konvergenciavizsgálatot is végez; a fejezet Python-demóit is futtatja.

17.

Mély bizonytalanság, ritka esemény és robusztus döntés



Mi történik, ha a jövő másképp alakul?

Teréz büszke volt a gondosan pontozott költségtervre. Aztán egy viharos héten napokig nem volt áram a telephelyen, és kiderült, hogy a legjobbnak pontozott megoldás ilyenkor szinte használhatatlan. Erre a forgatókönyvre korábban senki sem gondolt.
A lényeg: Egy újabb, hihető forgatókönyv feltárhatja a korábbi ajánlás sérülékenységét és egy tartalékmegoldás értékét.
Kérdés: Melyik kimaradt eseménnyel terhelnéd meg először a saját tervedet?
Szemléltető, kitalált helyzet · F17 · Próbáld ki: h17-stresszteszt

A döntési fa és a Monte Carlo-szimuláció egyaránt feltételezi, hogy a bizonytalanságot valószínűségekkel le tudjuk írni. Sok fontos döntésnél ez nem teljesül. Nem tudjuk, mekkora eséllyel duplázódik meg az energiaár, milyen szabályozás jön öt év múlva, vagy bekövetkezik-e egy tartós regionális infrastruktúra-kiesés. A szakértők sem értenek egyet abban, milyen jövőképek hihetők, és mekkora az esélyük. Az ilyen helyzetet **mély bizonytalanságnak** (*deep uncertainty*) nevezzük (Lempert és mtsai. 2003; Marchau és mtsai. 2019). Ez a fejezet olyan eszközöket mutat be, amelyekkel valószínűségek nélkül is megalapozott, robusztus és felülvizsgálható döntés hozható.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- megkülönböztetni az ismert kockázatot a vitatott jövőképek mély bizonytalanságától;
- forgatókönyveket és stressztesztet alkalmazni egy döntési javaslatra;
- valószínűségek nélkül értékelni az alternatívákat a maximin és a minimax megbánás szabályával;
- értelmezni a fekete hattyú gondolatát és az előrejelezhetőség határait;
- felismerni a védelmi rétegek közös hibaforrásait;
- adaptív döntési tervet fogalmazni jelzőszámokkal és felülvizsgálati küszöbökkel.

A fejezet az ismert kockázat és a mély bizonytalanság különbségével kezd. Ezután a forgatókönyveket és a stressztesztet, majd a valószínűség nélküli döntési szabályokat tárgyalja a CASE02-n. A negyedik szakasz a fekete hattyúkkal és az előrejelezhetőség határaival, az ötödik a védelmi rétegekkel foglalkozik. A fejezet az adaptív tervvel zárul.

17.1. Ismert kockázat és vitatott jövőkép

A közgazdaságtan régóta megkülönbözteti a **kockázatot**, amelynél a lehetséges kimenetelek és a valószínűségeik ismertek, és a **bizonytalanságot**, amelynél nem. A döntéstámogatásban ez a különbség fokozatos. Egy vonat lekésési esélye a tapasztalatokból jól becsülhető: ez kockázat. Az energiaár öt év múlva bizonytalan, de a lehetséges értékek tartományáról van elképzelésünk: ez egy szimulációval kezelhető bizonytalanság. Egy új szabályozás tartalma, egy technológiai áttörés vagy egy tartós infrastruktúra-kiesés viszont olyan, amelynél a szakértők sem értenek egyet abban, mi hihető, és egy valószínűség megadása önkényes lenne. Ez a **mély bizonytalanság**.

Mély bizonytalanságnál a döntéstámogatás célja megváltozik. Nem a várható értéket maximalizáljuk egy bizonytalan valószínűség-eloszlás alapján, hanem olyan döntést keresünk, amely sok hihető jövőben elfogadhatóan teljesít (**robusztus**), és amely módosítható, ha a jövő a vártnál másként alakul (**adaptív**) (Lempert és mtsai. 2003; Haasnoot és mtsai. 2013).

17.2. Forgatókönyv, stressztesztek és modellhibák

A legjobb egy jövőben, vagy elég jó sokban?

A bázisszámítás szerint D a legjobb. Négy stresszforgatókönyvben újraszámolva kétszer A kerül az élre, és a legrosszabb esetben D sokkal rosszabbul teljesít, mint A.
A lényeg: Ha a jövőképek valószínűsége vitatott, olyan megoldás is választható, amely egyik jövőben sem a legjobb, de egyikben sem okoz nagy megbánást.
Kérdés: Inkább a bázisban legjobb megoldást választanád, vagy azt, amelyik a legrosszabb esetben is elfogadható?
Szemléltető, kitalált helyzet · K14 · Próbáld ki: h17-stressztesztek

A **forgatókönyv** egy hihető, belsőleg következetes jövőkép, amely nem előrejelzés, hanem egy „mi lenne, ha” kérdés kidolgozása. A **stressztesztek** egy döntési javaslatot kedvezőtlen, de hihető forgatókönyvekkel terhel meg, és azt vizsgálja, hol válik sérülékennyé. A forgatókönyvek kiválasztásánál nem az a cél, hogy a legvalószínűbbeket fedjük le, hanem az, hogy a döntés szempontjából *különböző* jövőket vizsgáljunk.

CASE02 – Négy stresszforgatókönyv

A bázis mellett négy forgatókönyvet vizsgálunk, mindegyiket a nyers adatok módosításával, a bázissúlyokkal és a rögzített horgonyokkal értékelve.

- **Energiaár-ugrás:** az üzemanyag 30%-kal, a villamos energia 150%-kal drágul; ez az ötéves költséget A-nál 1,2, B-nél 2,0, C-nél 2,8, D-nél 2,9 millió forinttal növeli.
- **Infrastruktúra-kiesés:** a régióban tartósan romlik a töltési lehetőség; az elektromos jelöltek (C, D) tényleges hatótávja 30%-kal csökken, kiesésük évi 4 nappal nő, a konnektoros hibridé (B) 1 nappal.
- **Finanszírozási szigor:** a hitelkamatok emelkedése miatt a vásárlásos jelöltek (A, D) 1,5, a bérletesek (B, C) 0,5 millió forinttal drágulnak.
- **Nagy futás:** az éves futás 40%-kal nő, az energiaköltség ennek megfelelően, a kiesés minden jelöltnél évi 1 nappal.

A forgatókönyvekhez nem rendelünk valószínűséget. A számértékek szemléltetők.

Az eredményt a 17.1. ábra mutatja. D a bázisban, a finanszírozási szigor és a nagy futás forgatókönyvében az első, A az energiaár-ugrás és az infrastruktúra-kiesés forgatókönyvében. C egyik forgatókönyvben sem versenyképes.

A stresszteszt a modellhibák feltárásának is eszköze. Ha egy forgatókönyv a modell olyan feltevését teszi próbára, amelyet eddig senki sem vitatott (például hogy a hatótáv nem függ a töltőhálózattól), az eredmény nem csak a

	additív érték V				megbánás			
	A	B	C	D	A	B	C	D
bázis	71,8	69,1	61,8	**73,4**	1,6	4,2	11,6	0,0
energiaár-ugrás	**67,7**	62,3	52,0	63,1	0,0	5,5	15,7	4,6
infrastruktúra-kiesés	**71,8**	68,4	54,2	65,3	0,0	3,4	17,5	6,4
finanszírozási szigor	66,5	67,4	60,0	**68,1**	1,6	0,8	8,1	0,0
nagy futás	65,6	64,4	58,4	**69,9**	4,3	5,5	11,5	0,0
legrosszabb érték / legnagyobb megbánás	**65,6**	62,3	52,0	63,1	**4,3**	5,5	17,5	6,4

17.1. ábra. A CASE02 jelöltjeinek additív értéke és megbánása öt forgatókönyvben. A félkövér számok a forgatókönyv legjobb jelöltjét jelölik; az alsó sor a legrosszabb értéket és a legnagyobb megbánást mutatja.

jelöltekről, hanem a modellről is szól. Ezért érdemes a forgatókönyveket olyan résztvevőkkel is megbeszélni, akik a modell készítésében nem vettek részt.

17.3. Maximin és minimax megbánás

Ha a forgatókönyvek valószínűségét nem ismerjük, két klasszikus döntési szabály segít.

Maximin (Wald 1950): minden jelöltnél megnézzük a legrosszabb forgatókönyvbeli értéket, és azt választjuk, amelyiknek ez a legjobb. Ez a legrosszabb esetre felkészülő, óvatos szabály. A CASE02-ben a legrosszabb értékek: A 65,6, B 62,3, C 52,0, D 63,1; a maximin-választás **A**.

Minimax megbánás (Savage 1951): a **megbánás** egy jelölt és egy forgatókönyv esetén az a veszteség, amelyet akkor érzünk, ha utólag kiderül, hogy abban a forgatókönyvben egy másik jelölt jobb lett volna: $r(a,s) = \max_b V(b,s) - V(a,s)$. Minden jelöltnél megnézzük a legnagyobb megbánást, és azt választjuk, amelyiknél ez a legkisebb. A CASE02-ben a legnagyobb megbánások: A 4,3 (nagy futás), B 5,5, C 17,5, D 6,4 (infrastruktúra-kiesés); a minimax megbánás választása szintén **A**.

Ez fontos eredmény. A bázisban D a legjobb, és D nyer az öt forgatókönyvből háromban. A két robusztus szabály mégis A-t választja, mert D legrosszabb esete (az energiaár-ugrás és az infrastruktúra-kiesés) súlyosabb, mint A legrosszabb esete. Hogy melyik választás a jobb, az a döntéshozó kockázatvállalási hajlandóságától és attól függ, mennyire tartja hihetőnek a kedvezőtlen forgatókönyveket. A robusztussági elemzés ezt a mérlegelést nem dönti el, de láthatóvá teszi.

Robusztusság

Egy döntés **robusztus**, ha a hihető jövőképek széles körében elfogadhatóan teljesít. A robusztusság definíciója mindig egy választott szabályhoz kötött (például maximin, minimax megbánás, vagy egy küszöbérték teljesítése a forgatókönyvek adott hányadában), ezért a jelentésben ki kell mondani, melyik definíciót alkalmaztuk (Marchau és mtsai. 2019).

Próbáld ki: stressztest és megbánás

Előbb tippeld meg, melyik jelöltet választaná a minimax megbánás szabálya. Ezután kapcsold ki és be a forgatókönyveket, módosítsd a hatásaikat, és figyeld meg, hogyan változik a maximin és a minimax megbánás választása, valamint a forgatókönyvenkénti nyertes.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h17-stressztest.html#K14

17.4. Fekete hattyú és az előrejelezhetőség határa

Mit nem tanítanak meg a múltbeli adatok?

Egy szolgáltatás évek óta zavartalanul működik, a kockázati táblázat szerint minden rendben. Egy nap olyan esemény történik, amely a korábbi adatokban egyszer sem fordult elő, és amelyre senki sem készült.
A lényeg: A múltbeli adatokból nem lehet megbecsülni annak esélyét, ami még soha nem fordult elő; a sérülékenységet ezért külön kell vizsgálni.
Kérdés: Mi lenne a te rendszered „sosem látott” eseménye, és mennyire bírná ki?
Szemléltető, kitalált helyzet · D39 · Próbáld ki: h17-stressztest

Nassim Nicholas Taleb **fekete hattyúnak** nevezi azt a ritka, nagy hatású eseményt, amely a korábbi tapasztalatok alapján váratlan, utólag mégis magyarázhatónak tűnik (Taleb 2007). Az elnevezés arra utal, hogy Európában sokáig minden ismert hattyú fehér volt, és ebből arra következtettek, hogy minden hattyú fehér, amíg Ausztráliában fekete hattyúkat nem találtak. A gondolat a döntéstámogatás számára két tanulságot hordoz.

Az első **ismeretelméleti**: a múltbeli adatokból nem lehet megbecsülni annak a valószínűségét, ami még soha nem fordult elő. Egy pontosnak látszó kockázati szám ilyenkor hamis biztonságot ad. A második **gyakorlati**: ha az esemény valószínűségét nem tudjuk megbecsülni, a *sérülékenységünket* akkor is vizsgálhatjuk. Mi történne a rendszerrel, ha egy ilyen esemény bekövetkezne? Mennyire tudna alkalmazkodni? A stressztest éppen ezt a kérdést teszi fel. A *The Decision Book* is ebből a szemszögből tárgyalja a fekete hattyú modellt (Krogerus és Tschäppeler 2011).

Próbáld ki: egy hiányzó stresszeset

A bázismodellből egy forgatókönyv hiányzik. Add hozzá, és figyeld meg, mennyire változik az ajánlás, és mekkora lesz a korábbi nyertes megbánása.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h17-stressziteszt.html#D39

Ismeretlen szélsőségnek ne adjunk önkényes pontos valószínűséget

Csábító egy ritka eseménynek „egy a tízezerhez” valószínűséget adni, hogy beférjen a várható értékes számításba. Ha ennek a számnak nincs alapja, a számítás pontosnak látszik, de valójában egy önkényes feltevést rejt el. Mély bizonytalanságnál őszintébb a forgatókönyvet valószínűség nélkül, stressztesztként kezelni, és megkérdezni, mit tennénk, ha bekövetkezne.

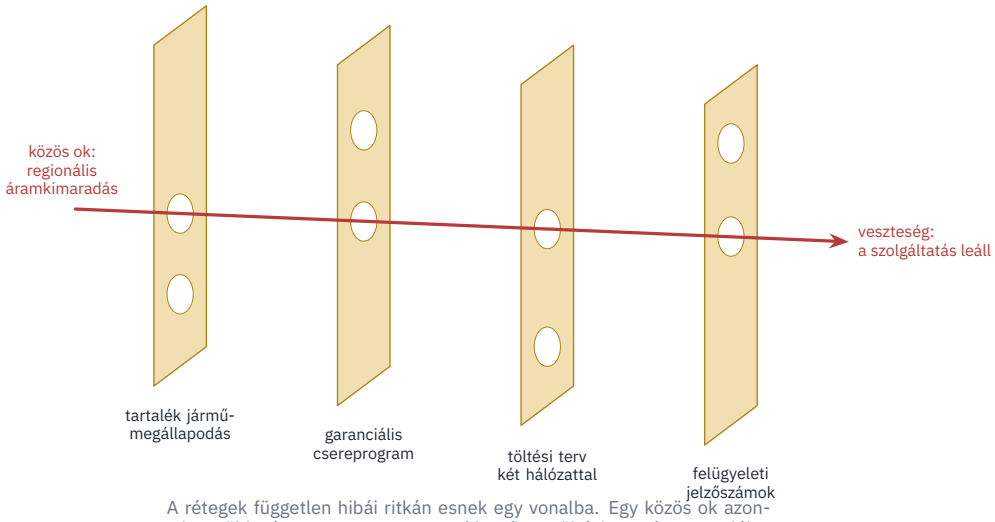
17.5. Svájci sajt: védelmi rétegek és közös hibaforrások

Négy védelmi réteg elég biztonságos?

A szolgáltatás kiesése ellen négy védelmi réteg van: tartalék jármű, garancia, kettős töltési terv és felügyeleti jelzőszámok. Mindegyik ritkán hibázik. Egy regionális áramkimaradás azonban kettőt egyszerre tesz használhatatlanná.
A lényeg: A független rétegek együttes hibája ritka, de egy közös ok több réteget is egyszerre gyengíthet.
Kérdés: Melyik két védelmi rétegednek van közös gyenge pontja?
Szemléltető, kitalált helyzet · D30 · Próbáld ki: h17-stressziteszt

James Reason **svájcisajt-modellje** a balesetek kialakulását védelmi rétegek sorozataként írja le: minden rétegben vannak „lyukak” (hibák, hiányosságok), és baj akkor történik, ha a lyukak egy vonalba esnek, és a veszély minden rétegen áthatol (Reason 1990, 2000). A modell a rendszerszemléletű hibakezelés egyik alapgondolata: a baleset ritkán egyetlen ember vagy egyetlen hiba következménye, sokkal inkább több réteg együttes gyengeségéé (17.2. ábra).

A modell döntéstámogatási tanulsága a **közös hibaforrás**. Ha négy réteg egyenként 10% eséllyel hibázik, és a hibák függetlenek, mind a négy egyszerre csak $0{,}1^4 = 0{,}0001$ eséllyel hibázik. Ha azonban egy közös ok, például egy regionális áramkimaradás, két réteget egyszerre tesz használhatatlanná, a független számítás nagyságrendekkel alábecsüli a kockázatot. A CASE02-ben az elektromos jármű töltési terve és a tartalék jármű töltése egyaránt az áramellátástól függ. Egy robusztusabb terv olyan tartalékot választ, amelynek más a gyenge pontja, például egy hibrid bérelt járművet.



A rétegek független hibái ritkán esnek egy vonalba. Egy közös ok azonban több réteget egyszerre gyengíthet (itt a töltési terv és a tartalék jármű is áramhoz kötött), és ilyenkor a lyukak egy vonalba rendeződnek.

17.2. ábra. A svájcisajt-modell a CASE02 szolgáltatás-folytonossági rétegeire. Egy közös ok (regionális áramkimaradás) több réteget egyszerre gyengít, és a lyukak egy vonalba rendeződnek.

Próbáld ki: védelmi rétegek

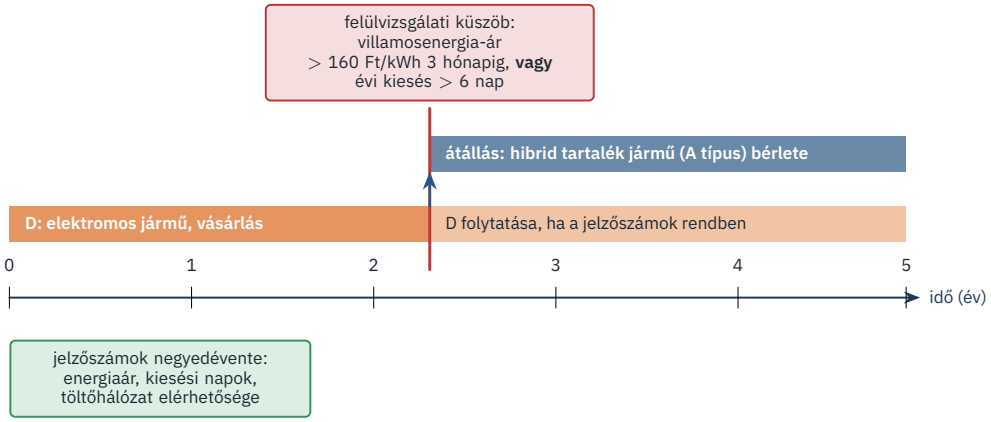
Állítsd be négy védelmi réteg hibavalószínűségét, és kapcsolj össze közös okkal két réteget. Az alkalmazás összeveti a független és a közös okú számítás eredményét, és megmutatja a lehetséges hibautakat.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h17-stresszteszt.html#D30

17.6. Adaptív terv, jelzőszám és felülvizsgálati küszöb

A robusztus döntés nem feltétlenül egyetlen, végleges választás. Egy **adaptív terv** kezdő döntést hoz, és előre rögzíti, milyen **jelzőszámokat** figyelünk, és milyen **felülvizsgálati küszöb** elérésekor váltunk egy előre kidolgozott alternatív útra (Haasnoot és mtsai. 2013). A terv így egyszerre használja ki a legvalószínűbbnek tartott jövő előnyeit, és véd a kedvezőtlen jövőkkel szemben.

A CASE02 elemzése egy ilyen tervet sugall (17.3. ábra). A szervezet a D jelöltet választja, mert a bázisban és három forgatókönyvben a legjobb, de két feltétellel. Egyrészt megköt egy garanciális megállapodást az akkumulátorcserére, amely D legnagyobb költségkockázatát csökkenti (16.7. szakasz). Másrészt rögzít

két felülvizsgálati küszöböt: ha a villamosenergia-ár három hónapon át 160 Ft/kWh fölött marad, vagy az évi kiesés meghaladja a 6 napot, a szervezet egy hibrid tartalék jármű (A típusú) bérletére vált. A tartalék bérletének előzetes keretszerződése a terv része, így a váltás gyorsan végrehajtható.



17.3. ábra. Adaptív döntési terv a CASE02-re. A kezdő döntés D; a negyedéves jelzőszámok egy felülvizsgálati küszöb elérésekor egy előre kidolgozott átállási utat indítanak el.

Az adaptív terv egyesíti a fejezet eszközeit. A forgatókönyvek megmutatták, hol sérülékeny a bázisdöntés; a megbánás megmutatta, mekkora az ára; a svájcisajt-modell megmutatta, hogy a tartaléknak más gyenge pontja kell legyen; a jelzőszámok és a küszöbök pedig a döntést a 28. fejezet követési tervéhez kapcsolják.

Átviteli példa: vízhiány egy közös tartálynál (CASE06)

Egy kis közösség közös víztartályának bővítéséről dönt. A hosszú távú csapadékelőrejelzések vitatottak, a szárazság gyakoriságáról a szakértők nem értenek egyet. A közösség három forgatókönyvet vizsgál (változatlan éghajlat, gyakoribb szárazság, szélsőséges, többéves szárazság), és azt a bővítési változatot választja, amelynek a legnagyobb megbánása a legkisebb. A döntés adaptív: egy kisebb bővítéssel indulnak, és rögzítik, hogy ha a tartály szintje két egymást követő nyáron 20% alá esik, a második bővítési szakasz indul. A 24. fejezetben ugyanezt a közösséget a használati szabályok és az ösztönzők szempontjából vizsgáljuk.

Összefoglalás

- Mély bizonytalanságnál a jövőképek valószínűsége vitatott; a cél robusztus és adaptív döntés, nem a várható érték maximalizálása.
- A forgatókönyv hihető jövőkép, nem előrejelzés; a stressztesztet a javaslat sérülékenységét és a modell rejtett feltevéseit tárja fel.

- A maximin a legrosszabb esetre, a minimax megbánás a legnagyobb utólagos veszteségre optimalizál; a CASE02-ben mindkettő A-t választja, bár D a bázisban és három forgatókönyvben a legjobb.
- A robusztusság definícióját mindig meg kell nevezni.
- A fekete hattyú a múltból nem becsülhető ritka esemény; valószínűsége helyett a sérülékenységünket kell vizsgálni.
- A svájcisajt-modell szerint egy közös ok több védelmi réteget is gyengíthet, ezért a független számítás alábecsülheti a kockázatot.
- Az adaptív terv kezdő döntést, jelzőszámokat, felülvizsgálati küszöböket és előre kidolgozott alternatív utat tartalmaz.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség a kockázat és a mély bizonytalanság között?
2. Számold ki a megbánást egy forgatókönyvben, ahol az értékek A 60, B 66, C 55, D 64!
3. Miért választhat a maximin és a minimax megbánás más jelöltet, mint a bázisban legjobb?
4. Négy független védelmi réteg egyenként 5% eséllyel hibázik. Mekkora az együttes hiba esélye? Hogyan változik ez, ha két réteg közös okból egyszerre hibázik 5% eséllyel?
5. Mi a felülvizsgálati küszöb szerepe egy adaptív tervben?

Megoldás.

1. A kockázatnál a kimenetelek és a valószínűségeik ismertek vagy jól becsülhetők; mély bizonytalanságnál a valószínűségek, sőt a hihető jövőképek köre is vitatott.
2. A legjobb érték 66 (B). A megbánások: A 6, B 0, C 11, D 2.
3. Mert a bázisban legjobb jelölt egy vagy több kedvezőtlen forgatókönyvben sokkal rosszabbul teljesíthet; a robusztus szabályok a legrosszabb esetet vagy a legnagyobb megbánást nézik, nem a bázist.
4. Függetlenül $0{,}05^4 = 6{,}25 \cdot 10^{-6}$. Ha két réteg közös okból együtt hibázik 5% eséllyel, az együttes hiba esélye körülbelül $0{,}05 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05 = 1{,}25 \cdot 10^{-4}$, vagyis hússzor nagyobb.
5. Előre rögzíti, milyen megfigyelhető változás esetén kell a kezdő döntést felülvizsgálni, és elindítani az előre kidolgozott alternatív utat; így a döntés alkalmazkodik, és nem kell utólagos indoklást gyártani.

Továbbolvasás

- Lempert, R. J., Popper, S. W., Bankes, S. C. (2003); Marchau, V. A. W. J. és mtsai (szerk., 2019) – a mély bizonytalanság és a robusztus döntéshozatal (Lempert és mtsai. 2003; Marchau és mtsai. 2019).
- Haasnoot, M. és mtsai (2013): Dynamic adaptive policy pathways (Haasnoot és mtsai. 2013).
- Wald, A. (1950); Savage, L. J. (1951) – a maximin és a minimax megbánás szabálya (Wald 1950; Savage 1951).
- Reason, J. (2000): Human error: models and management (Reason 2000).
- Taleb, N. N. (2007): *The Black Swan* (Taleb 2007).

Gyakorlat

A Döntési műhely 17. műhelyében a stresszteszt-alkalmazással (H17) forgatókönyveket adhatsz hozzá, kiszámíthatod a maximin és a minimax megbánás választását, és kipróbálhatod a svájcisajt-modellt. Az E17 munkafüzet és az N17 notebook a forgatókönyv–alternatíva táblát, a megbánástáblát és két beavatkozási küszöböt rögzíti; a jelentés a robusztusság választott definícióját is tartalmazza.

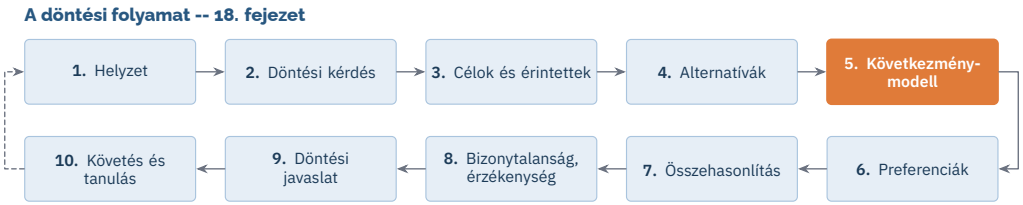
V. rész – Adatok, idő és összetett rendszerek



Pannon Egyetem
University of Pannonia

18.

Adatok, előrejelzés, okság és modellvalidálás



A több munkatárs okozza a hosszabb sort?

Áron, az ügyfélszolgálat új vezetője, végignézi a tavalyi adatokat, és meglepődik: a zsúfolt napokon több ügyintéző dolgozott, a várakozás mégis hosszabb volt. Elsőre azt gondolja, hogy a több ember csak útban van egymásnak. Aztán eszébe jut, hogy a beosztást éppen a várható forgalom alapján készítették.

A lényeg: Az együttjárás mögött közös ok is állhat, amely a beavatkozás hatását egészen másként alakítja.

Kérdés: Mi történne, ha ugyanannyi ügyfél mellé érkezne egy új munkatárs?

Szemléltető, kitalált helyzet · F18 · Próbáld ki: h18-elorejelzes

A könyv ötödik része azt vizsgálja, hogyan viselkedik a rendszer, amelybe a döntéssel beavatkozunk. Ehhez gyakran adatokra támaszkodunk: a múltbeli kereslet, a várakozási idők, a költségek alapján becsüljük a jövőt, és következtetünk a beavatkozások hatására. Ez a fejezet két, gyakran összekevert kérdést választ szét. Az **előrejelzés** azt kérdezi, mi fog történni, ha minden úgy megy tovább, mint eddig. Az **okségi** kérdés azt, mi történne, ha *beavatkoznánk*. Egy modell lehet kiváló az elsőben és teljesen félrevezető a másodikban (Shmueli 2010).

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- értékelni az adatok minőségét, reprezentativitását és mérési hibáját;
- elkülöníteni a becslési és a beavatkozási kérdést;
- egyszerű alapmodellt (átlagmodell, szezonális naiv) választani, és ahhoz mérni egy összetettebb modellt;
- időrendi tanuló–teszt felosztással, adatszivárgás nélkül összevetni a modellek teszthibáját;
- oksági ábrán felismerni a közös okot, és megmagyarázni, miért nem igazolja a korreláció az oksági értelmezést;
- megnevezni a visszacsatolás, az adateltolódás és a monitorozás szerepét.

A fejezet az adatminőséggel kezd, majd a kategóriamodellek és a regresszió alapjait foglalja össze. A harmadik szakasz az időrendi tanuló–teszt felosztást, a negyedik a hibamértékeket mutatja be a CASE04-en. Az ötödik szakasz az oksági kérdéssel és a fekete doboz modellek korlátaival foglalkozik, a hatodik a modellek követésével.

18.1. Adatminőség, reprezentativitás és mérési hiba

Egy adatmodell nem lehet jobb az adatainál. Mielőtt bármilyen modellt illesztenénk, három kérdést kell feltenni. **Mit mér pontosan az adat?** A „várakozási idő” lehet az érkezéstől a kiszolgálás kezdetéig vagy a végéig eltelt idő; a „kereslet” lehet a beérkezett vagy a kiszolgált megkeresések száma, és a kettő eltér, ha a túlterhelt napokon sokan feladják. **Reprezentatív-e az adat a döntési helyzetre?** Egy járvány idején gyűjtött ügyfélszolgálati adat nem feltétlenül írja le a mostani keresletet. **Mekkora a mérési hiba, és van-e szisztematikus torzítás?** A kézzel rögzített időadatok kerekítettek; a hiányzó napok nem véletlenszerűek, ha éppen a legforgalmasabb napokon nem volt idő rögzíteni.

A 7.5. szakaszban a hiányzó adatot külön státuszként kezeltük; az adatmodelleknél ugyanez érvényes. A könyv minden adatkészletnél jelöli, hogy mért, becsült, szakértői vagy szintetikus adatról van-e szó, és mikor rögzítették.

18.2. Kategóriamodellek, lineáris regresszió és nemlinearitás

A legegyszerűbb előrejelző modellek **kategóriamodellek**: az adatokat csoportokra osztjuk (például a hét napjai szerint), és minden csoportra a csoport átlagát jósoljuk. Page ezt a „kategóriákkal való gondolkodás” modelljének nevezi: a kategória jó, ha a csoportokon belüli szóródás kicsi a csoportok közöttihez képest (Page 2018). A **lineáris regresszió** a célváltozót (a

keresletet) magyarázó változók (a hét napja, a trend) lineáris kombinációjaként írja le, és az együtthatókat a legkisebb négyzetek módszerével becsüli (Hastie és mtsai. 2009). A regresszió a kategóriamodellt is tartalmazza: a hét napjait ún. dummy változókkal építjük be.

A valódi összefüggések gyakran nemlineárisak: a várakozási idő a kihasználtság növekedésével egyre meredekebben nő (19. fejezet). A nemlinearitást transzformált változókkal vagy rugalmasabb modellekkel lehet kezelni, de minden további rugalmasság a **túlillesztés** veszélyével jár: a modell a tanulóadat zaját is megtanulja, és új adatokon rosszabbul teljesít. Ezért kell a modelleket a tanulóadattól független adatokon ellenőrizni.

18.3. Tanuló- és tesztadat, időbeli felosztás

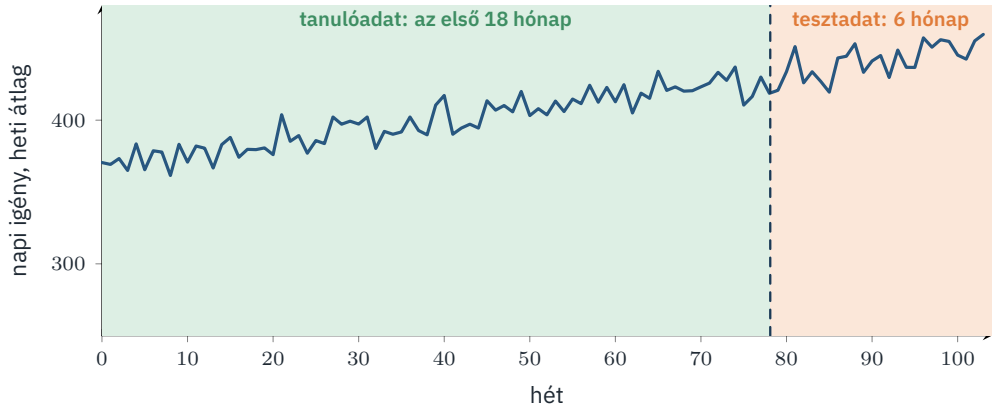
Jó a modell, vagy csak emlékszik?

Egy előrejelző modell szinte tökéletesen illeszkedik a múltbeli adatokra. Az első valódi hónapban mégis sokat téved, mert a teszteléshez a jövőbeli adatokat is felhasználták az illesztésben.
A lényeg: Egy előrejelző modellt olyan adatokon kell ellenőrizni, amelyeket az illesztésnél nem használtunk, idősorban időrendben elkülönítve.
Kérdés: Hol húznád meg a határt a tanuló- és a tesztadat között egy kétéves idősorban?
Szemléltető, kitalált helyzet · K15 · Próbáld ki: h18-elorejelzes

Egy előrejelző modell minőségét a korábban nem látott adatokon elért hibája méri. Ehhez az adatokat **tanuló-** és **tesztadatra** bontjuk: a modellt csak a tanulóadaton illesztjük, a tesztadaton csak értékeljük. Idősoroknál a felosztásnak **időrendinek** kell lennie: a tanulóadat a múlt, a tesztadat a jövő. Véletlenszerű felosztásnál a modell a jövőbeli adatokból is tanulna, ami a valóságban nem lehetséges (Hyndman és Athanasopoulos 2021).

> **CASE04 – A napi igény előrejelzése**
>
> Egy hallgatói szolgáltatási iroda két év napi megkeresési adatát vizsgálja. Az igényben erős heti mintázat van (hétfőn a legtöbb, szombaton kevés, vasárnap zárva), és enyhe, évi mintegy 10%-os növekedés. Az első 18 hónap (469 nyitvatartási nap) a tanulóadat, az utolsó hat hónap (157 nap) a tesztadat (18.1. ábra). Az adatok szintetikusak.

Három modellt vetünk össze. Az **átlagmodell** minden napra a tanulóadat átlagát jósolja. A **szezonális naiv** modell az egy héttel korábbi, azonos napi értéket. A **regresszió** a hét napjait és egy lineáris trendet használ. Az első kettő **alapmodell** (*baseline*): minden összetettebb modellnek meg kell vernie őket, különben nincs értelme.



18.1. ábra. A CASE04 napi igényének heti átlaga két évre, az időrendi tanuló–teszt felosztással. A modelleket csak a zöld szakaszon illesztjük, és a narancs szakaszon értékeljük.

18.4. Hibamérték és bizonytalansági tartomány

Két gyakori hibamértéket használunk. Az **átlagos abszolút hiba** $\text{MAE} = \frac{1}{n}\sum|y_i - \hat{y}_i|$ a hibák átlagos nagysága, az eredeti mértékegységben. A **négyzetes középhiba** $\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}$ a nagy hibákat erősebben bünteti.

18.1. táblázat. A CASE04 modelljeinek teszthibája (157 nap)

Modell	MAE (megkeresés/nap)	RMSE
átlagmodell	124,0	146,1
szezonális naiv	27,3	33,9
regresszió (hét napjai + trend)	**23,5**	**28,2**
regresszió adatszivárgással (hibás)	22,0	26,3

Az átlagmodell nagyon gyenge, mert figyelmen kívül hagyja a heti mintázatot. A szezonális naiv modell már jó: egyszerűen a múlt heti értéket ismétli. A regresszió valamivel jobb nála, mert a véletlen ingadozást kiátlagolja, és a trendet is követi. A különbség a szezonális naiv modellhez képest mintegy 14% (MAE), ami egy kapacitástervben érezhető, de nem drámai javulás.

A táblázat utolsó sora figyelmeztetés. Ha a regressziót a *teljes* adaton illesztjük, és csak utána értékeljük a teszten, a hiba kisebbnek látszik (22,0). Ez **adatszivárgás** (*leakage*): a tesztadat információja bekerült a modellbe, ezért a teszthiba túl optimista képet ad (Kaufman és mtsai. 2012). A valóságban a jövőbeli adatok nem állnak rendelkezésre, így a jövőbeli hiba a 23,5-höz lesz

közelebb. A szivárgás finomabb formái is gyakoriak, például ha a normalizálás paramétereit a teljes adatból számoljuk.

Egy előrejelzés soha nem egyetlen szám. A tesztmaradékokból egy **bizonytalansági tartomány** is becsülhető: ha a hibák nagyjából normális eloszlásúak, az RMSE kétszerese körülbelül a 95%-os tartomány félszélessége. A CASE04-ben egy átlagos napra jósolt 450 megkeresés mellé így ± 56-os tartomány tartozik, és a kapacitástervnek erre is fel kell készülnie.

> **Próbáld ki: előrejelzés-ellenőrző**
>
> Előbb tippeld meg, melyik modell lesz a legjobb a teszten. Ezután mozgasd a tanuló–teszt határt, válts modellt, és kapcsold be a szivárgásos illesztést. Az alkalmazás megmutatja a teszthibákat és azt, hogyan torzítja a szivárgás az értékelést.
> Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h18-elorejelzes.html#K15

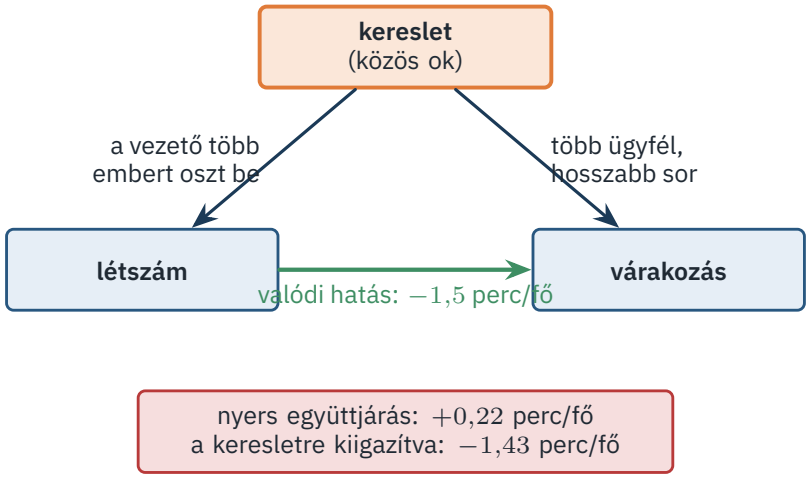
18.5. Korreláció, oksági ábra és beavatkozás

A nyitókártya helyzete a CASE04-ben is előfordul. A vezetők a várhatóan forgalmas napokon több ügyintézőt osztanak be. Ha a múltbeli adatokban a létszám és a várakozási idő kapcsolatát nézzük, *pozitív* összefüggést kapunk: a több ügyintéző hosszabb várakozással jár együtt (meredekség $+0{,}22$ perc/fő, korreláció 0,22). Ebből arra lehetne következtetni, hogy a létszám növelése rontja a helyzetet. Ez téves.

Az **oksági ábra** (18.2. ábra) megmutatja, mi történik. A kereslet **közös ok** (*confounder*): növeli a létszámot (a vezető több embert oszt be) és a várakozást is (több ügyfél, hosszabb sor). A létszám valódi hatása a várakozásra *negatív*: minden további ügyintéző azonos kereslet mellett 1,5 perccel csökkenti a várakozást. Ha a keresletet is bevonjuk a regresszióba, a létszám együtthatója $-1{,}43$ lesz, közel a valódi hatáshoz.

Judea Pearl oksági keretrendszere megkülönbözteti a **megfigyelést** ($P(Y \mid X = x)$: mit látunk, ha a létszám x) és a **beavatkozást** ($P(Y \mid \mathrm{do}(X = x))$: mi történik, ha a létszámot x-re *állítjuk*) (Pearl 2009). A kettő csak akkor egyezik, ha nincs közös ok, vagy ha azt figyelembe vesszük. Az oksági ábra eszköz arra, hogy eldöntsük, mely változókat kell kiigazításba bevonni, és melyeket nem (Hernán és Robins 2020).

> **A jó előrejelző nem feltétlenül jó beavatkozási modell**
>
> Az együttható és a jó tesztpontosság önmagában nem igazolja az oksági értelmezést. Egy modell, amely a létszámból kiválóan előre jelzi a várakozást (mert a létszám a keresletet jelzi), egy beavatkozásnál teljesen tévedhet. Az



18.2. ábra. Oksági ábra a CASE04 létszám–várakozás kapcsolatára. A kereslet közös ok; a nyers együttjárás pozitív, a keresletre kiigazított hatás negatív. Szintetikus adatok.

oksági következtetéshez az oksági szerkezetről kell állítást tenni, és ezt adatokkal, kísérlettel vagy szakértői tudással alátámasztani.

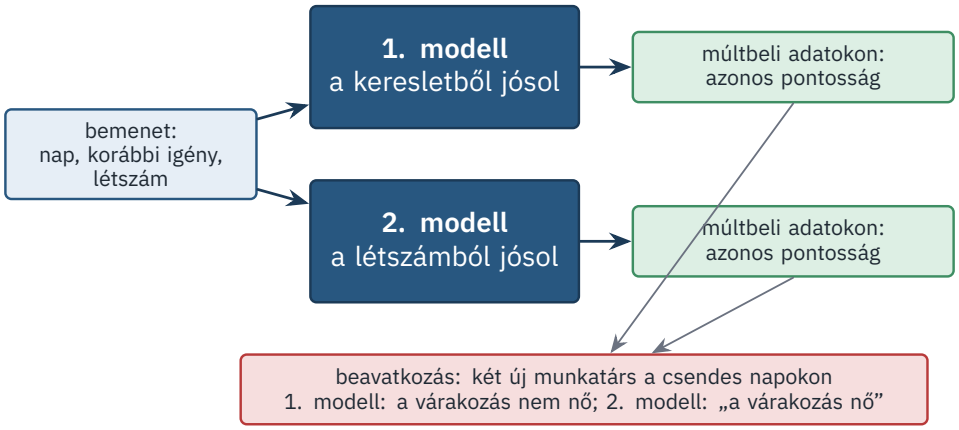
18.5.1. Fekete doboz modellek

Mit tudsz egy modellről, amelybe nem látsz bele?

Két előrejelző modell a múltbeli adatokon ugyanolyan pontos. Az egyik a keresletből, a másik a beosztott létszámból jósol. Amikor a vezetés két új munkatársat vesz fel a csendes napokra, a két modell ellentétes előrejelzést ad.
A lényeg: Egy modell kimeneti pontossága nem árulja el, milyen összefüggésekre épít, és ezért azt sem, hogyan viselkedik egy beavatkozás után.
Kérdés: Milyen kérdést tennél fel egy modell készítőjének, mielőtt egy beavatkozást a jóslataira alapoznál?
Szemléltető, kitalált helyzet · D41 · Próbáld ki: h18-elorejelzes

A *The Decision Book* fekete doboz modellje arra figyelmeztet, hogy egy rendszer bemeneteit és kimeneteit ismerhetjük úgy is, hogy a belső működését nem értjük (Krogerus és Tschäppeler 2011). Az adatvezérelt modelleknél ez a kérdés különösen éles. Leo Breiman a statisztikai modellezés „két kultúrájáról” írt: az egyik a mechanizmus leírására, a másik a pontos előrejelzésre törekszik (Breiman 2001). A fekete doboz modellek (például összetett neurális hálók)

gyakran pontosabbak, de nem mondják meg, milyen összefüggésekre épülnek. Cynthia Rudin szerint nagy tétű döntéseknél a fekete doboz magyarázata helyett, ahol lehet, eleve értelmezhető modellt érdemes használni (Rudin 2019). A 18.3. ábra azt mutatja, miért: két modell ugyanolyan pontos a múltbeli adatokon, de egy beavatkozásnál ellentétes következtetést ad.



18.3. ábra. Két, a múltbeli adatokon azonos pontosságú modell eltérő belső feltevései. Egy beavatkozás után ellentétes előrejelzést adnak.

Próbáld ki: két fekete doboz

Két modell ugyanazt a múltbeli adatot közel azonos hibával jelzi előre. Fedd fel a belső feltevéseiket, majd alkalmazz egy beavatkozást (két új munkatárs a csendes napokon), és figyeld meg, mit jósolnak.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h18-elorejelzes.html#D41

18.6. Visszacsatolás, adateltolódás és monitorozás

Egy előrejelző modell a használatba vétel után is változó környezetben működik. Három jelenségre kell figyelni. **Visszacsatolás:** ha a modell előrejelzése alapján döntünk (például több ügyintézőt osztunk be), a döntés megváltoztatja a jövőbeli adatokat (a várakozás csökken), és a modell a saját hatását is megtanulhatja. **Adateltolódás** (*data drift*, *concept drift*): a kereslet szerkezete változik, például egy új online szolgáltatás miatt kevesebben jönnek személyesen, és a modell egyre többet téved (Gama és mtsai. 2014). **Monitorozás:** a modell hibáját folyamatosan követni kell, és előre rögzíteni, mekkora hibánál kell újraillesztni vagy újragondolni. Ez a 17.6. szakasz felülvizsgálati küszöbeinek adatmodellekre vonatkozó változata.

Átviteli példa: költség és futásteljesítmény (CASE02)

A CASE02 szervezet korábbi járműveinek adataiban a nagyobb futású járművek karbantartási költsége kisebb volt kilométerenként. Ebből arra lehetne következtetni, hogy a több futás csökkenti a fajlagos karbantartási költséget. Az oksági ábra azonban egy közös okra figyelmeztet: a megbízhatóbb járműveket osztották be a hosszú utakra, és ezek eleve kevesebb javítást igényeltek. Egy üzemeltetési beavatkozás (például a futás növelése) hatását a nyers együttjárásból nem lehet megbecsülni.

Összefoglalás

- Az adatmodell előtt tisztázni kell, mit mér az adat, reprezentatív-e, és mekkora a mérési hiba.
- Az előrejelzési és az oksági kérdés különböző; egy jó előrejelző nem feltétlenül jó beavatkozási modell.
- Minden összetettebb modellt alapmodellekhez (átlag, szezonális naiv) kell mérni; a CASE04-ben a regresszió 23,5-ös MAE-vel valamivel jobb a szezonális naiv modell 27,3-ánál.
- Idősoroknál időrendi tanuló–teszt felosztás kell; az adatszivárgás túl optimista hibát mutat.
- A közös ok a korrelációt az oksági hatással ellentétes irányba is fordíthatja; az oksági ábra megmutatja, mit kell kiigazítani.
- A fekete doboz modellek pontossága nem árulja el, hogyan viselkednek beavatkozás után; nagy tétnél az értelmezhető modell előnyös.
- A használatban lévő modellt a visszacsatolás és az adateltolódás miatt monitorozni kell.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség a megfigyelés és a beavatkozás valószínűsége, $P(Y \mid X = x)$ és $P(Y \mid \mathrm{do}(X = x))$ között?
2. Miért nem szabad idősornál véletlenszerűen felosztani az adatokat tanuló- és tesztadatra?
3. Számold ki a MAE-t és az RMSE-t, ha a három teszthiba 10, −20 és 30!
4. A CASE04-ben miért pozitív a létszám és a várakozás nyers együttjárása, ha a létszám valódi hatása negatív?
5. Egy elemző a normalizálás átlagát és szórását a teljes adatból számolja, majd időrendben bontja tanuló- és tesztadatra. Mi a probléma?

Megoldás.

1. Az első azt írja le, mit figyelünk meg azokban az esetekben, ahol $X = x$ volt; a második azt, mi történne, ha X-et beavatkozással x-re állítanánk. Közös ok esetén a kettő eltér.
2. Mert a modell így a jövőbeli adatokból is tanulna, ami a valóságos előrejelzésnél nem lehetséges; a teszthiba túl optimista lenne.
3. $\mathrm{MAE} = (10 + 20 + 30)/3 = 20$; $\mathrm{RMSE} = \sqrt{(100 + 400 + 900)/3} = \sqrt{466{,}7} \approx 21{,}6$.

4. Mert a kereslet közös ok: a forgalmas napokon több az ügyintéző és hosszabb a sor is. A nyers együttjárás a keresletet tükrözi, nem a létszám hatását.
5. Adatszivárgás: a tesztadat információja a normalizálás paraméterein keresztül bekerül a modellbe. A paramétereket csak a tanulóadatból szabad számolni, és a tesztadatra ugyanazokkal kell transzformálni.

Továbbolvasás

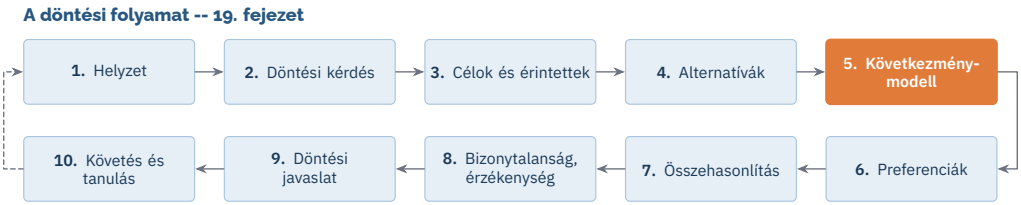
- Shmueli, G. (2010): To explain or to predict? – a magyarázó és az előrejelző modellezés különbsége (Shmueli 2010).
- Hyndman, R. J., Athanasopoulos, G. (2021): *Forecasting: Principles and Practice* – alapmodellek, időrendi validálás (Hyndman és Athanasopoulos 2021).
- Pearl, J. (2009): *Causality*; Hernán, M. A., Robins, J. M. (2020): *Causal Inference: What If* (Pearl 2009; Hernán és Robins 2020).
- Kaufman, S. és mtsai (2012) – az adatszivárgás formái (Kaufman és mtsai. 2012).
- Rudin, C. (2019) – értelmezhető modellek nagy tétű döntésekhez (Rudin 2019).

Gyakorlat

A Döntési műhely 18. műhelyében az előrejelzés-ellenőrzővel (H18) a CASE04 modelljeit vetheted össze időrendi felosztással, és kipróbálhatod az adatszivárgás és a közös ok hatását. Az N18 notebook a teljes elemzést végzi: adatlap, alapmodellek, regresszió, teszthiba és egy oksági példa; a teszthalmaz előfeldolgozása kizárólag a tanulóadat paramétereit használja.

19.

Időbeli következmények: készletek, növekedés és stabilitás



Miért nő vissza a már ledolgozott hátralék?

Vera csapata egy hétre mindenki segítségét kéri, hogy ledolgozzák a felgyűlt kérelmeket. A hét végén büszkén nézik a látványosan rövid sort, pár héttel később azonban a hátralék újra nőni kezd, mert a beérkező igény nem változott. Vera nem érti, hová lett a sok munka eredménye.
A lényeg: A készletet a beérkezés és a teljesítés folyamatos különbsége alakítja az időben.
Kérdés: Milyen tartós változtatás tartaná alacsonyan a hátralékot a pluszhét után is?
Szemléltető, kitalált helyzet · F19 · Próbáld ki: h19-keszlet

Sok döntés következménye nem egy pillanatban, hanem időben bontakozik ki. Egy kapacitásbővítés hetek alatt hat, egy beruházás évek alatt térül meg, egy szolgáltatás felhasználói köre fokozatosan nő, és egy idő után telítődik. Az ilyen helyzetekben a döntés értékét az határozza meg, hogyan alakul a rendszer állapota több időlépésen keresztül. Ez a fejezet a dinamikus gondolkodás alapjait mutatja be: a készleteket és az áramokat, a készletezés klasszikus modelljeit, a növekedés típusait, a késleltetéseket és a visszacsatolásokat, az állapottér-modellt és a stabilitás pontos fogalmát, végül azt, hogyan vezethet egy egészen egyszerű szabály bifurkációhoz és kaotikus viselkedéshez (Sterman 2000; Meadows 2008; Strogatz 2015).

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- felírni egy készletmérleget, és elkülöníteni a készletet és az áramot mértékegységük alapján;
- kiszámítani a gazdaságos tételnagyságot, a biztonsági készletet és az újságárus-modell optimális rendelési mennyiségét;
- összevetni az összeadódó (lineáris) és a kamatos (exponenciális) növekedést, és felismerni az erőforráskorlát szerepét;
- felismerni a késleltetés és a visszacsatolási hurkok hatását egy beavatkozásra;
- felírni egy egyszerű állapottér-modellt differencia- és differenciálegyenlettel;
- definiálni az egyensúlyt és a stabilitást, és a sajátértékek alapján eldönteni egy lineáris rendszer stabilitását;
- megmagyarázni a Ljapunov-gondolat lényegét és a konvergencia feltételeit;
- a logisztikus leképezésen bemutatni a bifurkációt és a kaotikus viselkedést, és értelmezni a Ljapunov-exponenst.

A fejezet a készletek és az áramok fogalmával kezd, és a CASE04 hátralékán mutatja be, majd a készletezés klasszikus modelljeivel (gazdaságos tételnagyság, biztonsági készlet, újságárus-modell) folytatja. Ezután a növekedés két alaptípusát, a késleltetést és a visszacsatolást tárgyalja. A következő rész az állapottér-modellt, az egyensúly és a stabilitás pontos fogalmát, valamint a Ljapunov-gondolatot mutatja be. Az utolsó két szakasz a telítődő növekedés modelljeivel (logisztikus és Solow-modell) foglalkozik, és megmutatja, hogyan vezet ugyanaz az egyszerű egyenlet bifurkációhoz és káoszhoz.

19.1. Készlet, áram és mértékegység

Mi marad a kádban?

A kádba percenként tíz liter folyik be, és nyolc folyik ki. Hiába csavarod el egy percre a lefolyót, a víz szintje utána ugyanúgy emelkedik tovább, ahogy előtte.
A lényeg: A készlet szintjét nem az egyszeri beavatkozás, hanem a be- és a kiáramlás tartós különbsége határozza meg.
Kérdés: Mekkora tartós változás kellene ahhoz, hogy a szint ne emelkedjen tovább?
Szemléltető, kitalált helyzet · K16 · Próbáld ki: h19-keszlet

A dinamikus rendszerek két alapfogalma a **készlet** (*stock*) és az **áram** (*flow*) (Forrester 1961; Sterman 2000). A készlet egy adott pillanatban mérhető mennyiség: a hátralék (ügy), a raktárkészlet (darab), a bankszámla egyenlege (forint), a felhasználók száma (fő). Az áram a készlet időegységenkénti

változása: a beérkező ügyek (ügy/hét), a teljesítés (ügy/hét), a befizetés (forint/hónap). A legegyszerűbb ellenőrzés a **mértékegység**: a készletnek nincs időegysége, az áramnak van.

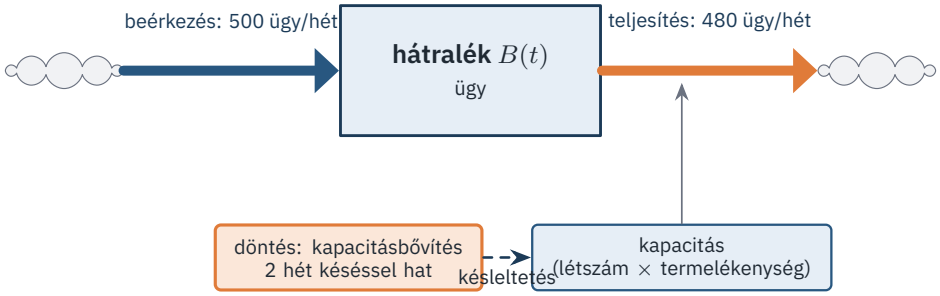
A készlet a be- és a kiáramlás különbségét gyűjti fel. Diszkrét időlépéssel

$$B(t+1) = B(t) + \text{beérkezés}(t) - \text{teljesítés}(t). \tag{19.1}$$

CASE04 – A felhalmozódó hátralék

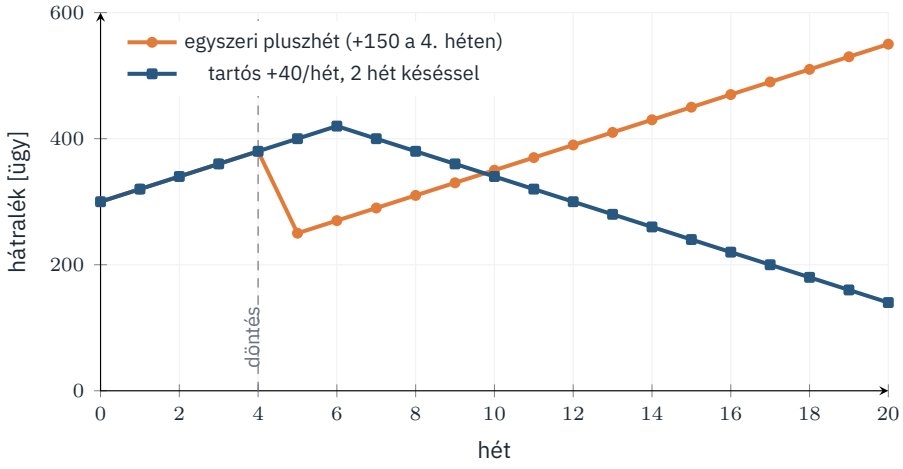
A hallgatói szolgáltatási irodába hetente 500 ügy érkezik, a jelenlegi kapacitás heti 480 ügy. A kiinduló hátralék 300 ügy. A negyedik héten a vezetés egy pluszhetet szervez: aznap 150 ügyet többet dolgoznak fel. Egy másik változatban tartósan heti 40 ügy többletkapacitást teremtenek (egy részmunkaidős munkatárs felvételével), amely a döntés után két héttel lép érvénybe. A számértékek szemléltetők.

A 19.1. ábra a rendszer szerkezetét, a 19.2. ábra a két beavatkozás hatását mutatja. A pluszhét után a hátralék 380-ról 250-re esik, de mivel a beérkezés (500) továbbra is meghaladja a teljesítést (480), utána ismét heti 20 üggyel nő, és a huszadik hétre 550-re emelkedik, többre, mint a beavatkozás előtt. A tartós bővítés két hét késéssel hat: addig a hátralék tovább nő (420-ig), utána viszont, mivel a teljesítés (520) meghaladja a beérkezést, heti 20 üggyel csökken, és a huszadik hétre 140 lesz.



19.1. ábra. A CASE04 hátralékának készlet–áram szerkezete. A kapacitásbővítési döntés késleltetéssel hat a teljesítésre.

A tanulság a nyitókártya kérdésére felel: a hátralékot nem egyszeri akció, hanem a be- és a kiáramlás *tartós* viszonyának megváltoztatása tartja alacsonyan. Ehhez vagy a teljesítést kell tartósan növelni, vagy a beérkezést csökkenteni (például egy önkiszolgáló online felülettel, amely a gyakori kérdéseket megválaszolja).



19.2. ábra. A hátralék alakulása két beavatkozás mellett. Az egyszeri pluszhét csak ideiglenesen csökkenti a hátralékot; a tartós, kis többletkapacitás késleltetve, de tartósan hat.

Próbáld ki: készlet és visszacsatolás

Előbb tippeld meg, hol lesz a hátralék a huszadik héten egyszeri pluszhét után. Ezután változtasd a beérkezést, a kapacitást, a beavatkozás formáját és a késleltetést. Az alkalmazás kirajzolja az időpályát, és jelzi, ha a rendszer nem éri el a stabil állapotot.

Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h19-keszlet.html#K16

19.2. Készletezési modellek: mennyit és mikor rendeljünk?

Hány kiló kávét rendeljen egyszerre Lili?

Lili tavaly nyitotta meg kis kávézóját Veszprém belvárosában. A babot egy pörkölőtől rendeli: minden szállítás 20 ezer forintba kerül fuvarral és ügyintézéssel együtt. A raktáron álló kávé viszont pénzt köt le, és lassan veszít a frissességéből; ezt Lili kilogrammonként évi 4000 forintra becsüli. Egy év alatt nagyjából 1000 kilogramm fogy. Ha ritkán rendel, sok kávé áll a polcon; ha gyakran, a szállítási díj emészti fel a hasznot.
A lényeg: A rendelési és a tartási költség a tételnagysággal ellentétes irányba mozdul. A kettő összege egy jól meghatározott tételnagyságnál a legkisebb, és a minimum körül meglepően lapos.
Kérdés: Hány kilogrammot rendeljen Lili egyszerre, és nagyjából hányszor egy évben?
Szemléltető, kitalált helyzet · K31 · Próbáld ki: h19-keszlet

A készlet puffer a beszerzés és a felhasználás között: azért tartunk raktáron alapanyagot, alkatrészt vagy árut, mert a beszerzés és a felhasználás ritmusa eltér, és mert a jövőbeli igény bizonytalan. A készletezési modellek két kérdésre felelnek: *mennyit* rendeljünk egyszerre, és *mikor* adjuk le a rendelést (Silver és mtsai. 2017). Az első kérdésre adott klasszikus válasz Ford W. Harris 1913-as cikkéből származik, amely egy gyár alkatrészgyártási tételeinek gazdaságos nagyságát vizsgálta (Harris 1913).

Gazdaságos tételnagyság (EOQ)

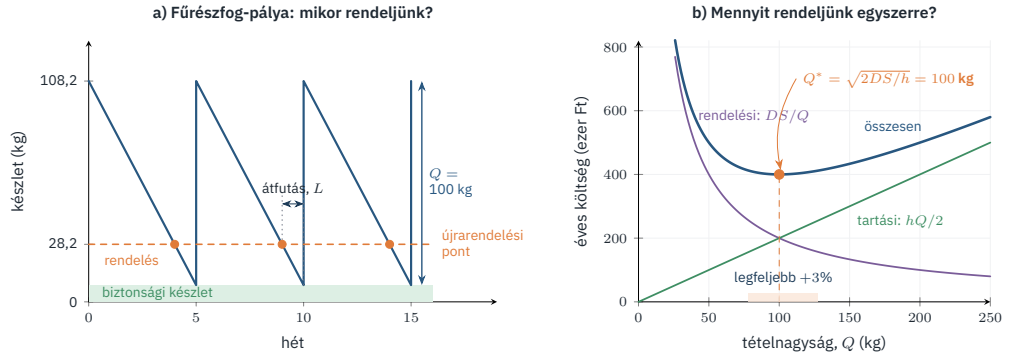
Legyen az éves igény D egyenletes és ismert, egy rendelés (vagy gyártási beállítás) fix költsége S, egy egység egyévi tartási költsége h, és érkezzen meg a rendelt tétel azonnal. Q tételnagyságnál az átlagos készlet $Q/2$, az éves rendelésszám D/Q, az éves költség tehát

$$K(Q) = \frac{D}{Q}\,S + \frac{Q}{2}\,h, \qquad Q^{*} = \sqrt{\frac{2DS}{h}}. \tag{19.2}$$

Az optimális Q^{*} tételnagyságnál a rendelési és a tartási költség éppen egyenlő.

Lili kávézójában $Q^{*} = \sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 20\,000/4000} = 100$ kg, vagyis évente tízszer érdemes rendelnie. Az éves költség 400 ezer forint, fele szállítás, fele tartás (19.3. ábra, jobb oldal). A költséggörbe a minimum körül lapos: ha Lili kényelmi okból havonta rendel (kb. 83 kg-ot), mindössze 1,7%-kal fizet többet, 150 kg-os tételeknél 8,3%-kal; heti rendelésnél (kb. 19 kg) viszont 2,7-szer annyit. A képlet tehát nem a tizedesjegyek miatt hasznos, hanem mert megmutatja, melyik irányban és mennyire tér el a jelenlegi gyakorlat az észszerűtől. A gyökös összefüggésnek van egy kevésbé nyilvánvaló

következménye is: ha az igény megnégyszereződik, a tételnagyság csak kétszeresére nő, vagyis a nagy forgalmú tételeket arányosan gyakrabban érdemes rendelni.



19.3. ábra. A készletezés két alapkérdése Lili kávézójának adataival. a) Átlagos igény mellett a készlet fűrészfog alakban fogy; a rendelést az újrarendelési pontnál kell leadni, hogy az átfutási idő alatt se fogyjon ki a raktár. b) Az éves rendelési és tartási költség összege 100 kg-nál a legkisebb, és a minimum körül lapos.

19.2.1. Biztonsági készlet és újrarendelési pont

A gazdaságos tételnagyság azt mondja meg, mennyit rendeljünk, de azt nem, mikor. Ha a rendelés beérkezéséig L idő telik el (ez az *átfutási idő*), a rendelést akkor kell leadni, amikor a készlet már csak az átfutási idő alatti igényre elég. Bizonytalan igénynél ehhez **biztonsági készlet** is kell, amely a vártnál nagyobb igényt fedezi. Ha az időegységenkénti igény átlaga d, szórása σ_d, és az egymást követő időszakok igénye független, az **újrarendelési pont**

$$R = d\,L + z\,\sigma_d\sqrt{L}, \tag{19.3}$$

ahol z a kívánt **ciklus-kiszolgálási szinthez** (annak esélyéhez, hogy egy rendelési ciklusban nem fogy ki a készlet) tartozó standard normális kvantilis (Silver és mtsai. 2017). Lilinél a heti igény átlagosan 20 kg, szórása 5 kg, a pörkölő egy hét alatt szállít. 95%-os kiszolgálási szinthez $z = 1{,}645$, a biztonsági készlet 8,2 kg, az újrarendelési pont 28,2 kg (19.3. ábra, bal oldal). 90%-hoz 6,4 kg, 99%-hoz már 11,6 kg biztonsági készlet kell: az utolsó néhány százalékpontnyi biztonság egyre drágább. Évi tíz rendelési ciklus mellett a 95%-os szint azt jelenti, hogy átlagosan kétévente egyszer fogy ki a kávé egy szállítás előtt.

Ha az átfutási idő is bizonytalan, vagy a készletet csak rögzített időközönként ellenőrzik, a képlet bonyolultabb, de a gondolat ugyanaz. A bizonytalan igényű készletezés matematikai elméletét Kenneth Arrow, Theodore Harris és Jacob

Marschak 1951-es cikke alapozta meg; ebből a hagyományból erednek a gyakorlatban elterjedt „ha a készlet s alá esik, töltsd fel S-ig” típusú szabályok (Arrow és mtsai. 1951; Silver és mtsai. 2017).

19.2.2. Egyszeri rendelés romlandó termékből: az újságárus-modell

Hány csokrot rendeljen Kinga anyák napjára?

Kinga virágboltjában az anyák napja az év legforgalmasabb hétvégéje. A csokrokat két héttel korábban kell megrendelnie a nagykereskedőtől, darabját 4000 forintért; ő 10 000 forintért adja el őket. Ami vasárnap estére megmarad, azt hétfőn 1000 forintért viszik el. Tavaly 140 csokor fogyott, tavalyelőtt 105; idénre nagyjából 120-at vár, de ebben maga sem biztos.
A lényeg: Ha a hiány és a maradék költsége nem egyforma, nem a várható igényt érdemes rendelni. Az optimális mennyiséget az elmaradt haszon és a maradék vesztesége közötti arány határozza meg.
Kérdés: Kevesebbet, pontosan 120-at vagy többet rendeljen Kinga a várható igénynél?
Szemléltető, kitalált helyzet · K32 · Próbáld ki: h19-keszlet

Az **újságárus-modell** (*newsvendor model*) egyszeri beszerzést ír le, amikor a termék a szezon végén elveszíti értékének nagy részét: napilap, friss pékáru, szezonális áru, egy rendezvényre rendelt étel (Arrow és mtsai. 1951; Silver és mtsai. 2017). Kétféle hiba lehetséges. Ha keveset rendelünk, minden hiányzó darabon elveszítjük a hasznot, $c_u = p - c$ forintot (eladási ár mínusz beszerzési ár). Ha sokat, minden megmaradt darabon $c_o = c - v$ forintot veszítünk (beszerzési ár mínusz maradványérték). A várható nyereséget az a Q^* maximalizálja, amelynél annak esélye, hogy az igény nem haladja meg Q^*-ot, éppen a **kritikus hányados**:

$$P(D \le Q^*) = \frac{c_u}{c_u + c_o} = \frac{p - c}{p - v}. \tag{19.4}$$

Kingánál $c_u = 6000$ és $c_o = 3000$ forint, a kritikus hányados $6000/9000 = 0{,}667$. Ha az igény 120 várható értékű, 30 szórású normális eloszlással írható le, $Q^* = 120 + 0{,}43 \cdot 30 \approx 133$ csokor. A várható nyereség így kb. 622 ezer forint, szemben a 120 csokornál várható 612 és a 100 csokornál várható 559 ezer forinttal. A különbség nem óriási, de a gondolat általános: mivel egy elmaradt eladás kétszer annyiba kerül, mint egy megmaradt csokor, Kingának a várható igénynél többet érdemes rendelnie, és el kell fogadnia, hogy a legtöbb évben marad néhány csokra (az összes csak kb. egyharmad eséllyel fogy el). Ha a maradékot nem tudná értékesíteni ($v = 0$), a kritikus hányados 0,6 lenne, és kb. 128 csokor volna az optimum.

Az átlagra tervezés csapdája

Ha a bizonytalan igény helyére a várható értékét írjuk, és arra optimalizálunk, a terv szisztematikusan téved. A várható igényre méretezett készlet a ciklusok nagyjából felében kifogy, és egy nemlineáris költségfüggvény várható értéke általában nem egyenlő a várható igénynél számolt költséggel. Sam Savage ezt az *átlagok hibájának* nevezi (Savage 2009). A helyes kérdés nem az, hogy mennyi lesz az igény, hanem az, hogy mennyibe kerül, ha többet vagy kevesebbet rendeltünk, és ennek mekkora az esélye.

Próbáld ki: rendelési politika és biztonsági készlet

Előbb tippeld meg Lili gazdaságos tételnagyságát. Ezután változtasd a tételnagyságot, az újrarendelési pontot, az átfutási időt és az igény szórását: az alkalmazás egy év heti készletpályáját szimulálja, megszámolja a kifogyásokat, és összeveti a költséget a képlet szerinti optimummal.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h19-keszlet.html#K31

Próbáld ki: az újságárus-modell

Előbb tippeld meg, hány csokrot érdemes rendelni. Ezután változtasd az árakat, a maradványértéket és az igény bizonytalanságát, és figyeld, hogyan mozdul el a várható nyereség maximuma a várható igényhez képest.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h19-keszlet.html#K32

Gazdaságos tételnagyság, biztonsági készlet és újságárus-modell

A biztonsági készlethez és a kritikus hányadoshoz a standard normális eloszlás kvantilisfüggvénye (`norm.ppf`) kell; a várható nyereséget szimulációval ellenőrizzük.

```python
import numpy as np
from scipy.stats import norm

# Lili kávézója: éves igény, rendelési és tartási költség
D, S, h = 1000.0, 20000.0, 4000.0   # kg/év, Ft/rendelés, Ft/kg/év

def eves_koltseg(Q):
    """Rendelési és tartási költség (Ft/év) Q tételnagyságnál."""
    return D / Q * S + Q / 2 * h

Q_opt = np.sqrt(2 * D * S / h)       # Harris képlete
print(f"Q* = {Q_opt:.0f} kg, évi {D / Q_opt:.0f} rendelés, "
      f"{eves_koltseg(Q_opt):,.0f} Ft/év")
for Q in [50, 83.3, 150, 200]:
    tobblet = eves_koltseg(Q) / eves_koltseg(Q_opt) - 1
    print(f"Q = {Q:5.1f} kg: +{tobblet:.1%} költség")

# Újrarendelési pont bizonytalan heti igénynél
d, sd = 20.0, 5.0       # heti igény átlaga és szórása (kg)
L = 1.0                 # átfutási idő (hét)
for szint in [0.90, 0.95, 0.99]:
    bk = norm.ppf(szint) * sd * np.sqrt(L)   # biztonsági készlet
    print(f"{szint:.0%}: biztonsági készlet {bk:.1f} kg, "
          f"újrarendelési pont {d * L + bk:.1f} kg")

# Újságárus-modell: Kinga anyák napi csokrai
ar, beszer, marad = 10000, 4000, 1000    # Ft/csokor
mu, sigma = 120, 30                      # várható igény, szórás
kritikus = (ar - beszer) / (ar - marad)
Q_uj = mu + sigma * norm.ppf(kritikus)
print(f"kritikus hányados {kritikus:.3f}, "
      f"rendelés {Q_uj:.0f} csokor")

rng = np.random.default_rng(1)
igeny = rng.normal(mu, sigma, 200_000).clip(0).round()
for Q in [100, 120, round(Q_uj), 150]:
    eladott = np.minimum(igeny, Q)
    nyereseg = ar * eladott + marad * (Q - eladott) - beszer * Q
    print(f"Q = {Q}: várható nyereség {nyereseg.mean():,.0f} Ft, "
          f"elfogy {np.mean(igeny >= Q):.0%} eséllyel")
```

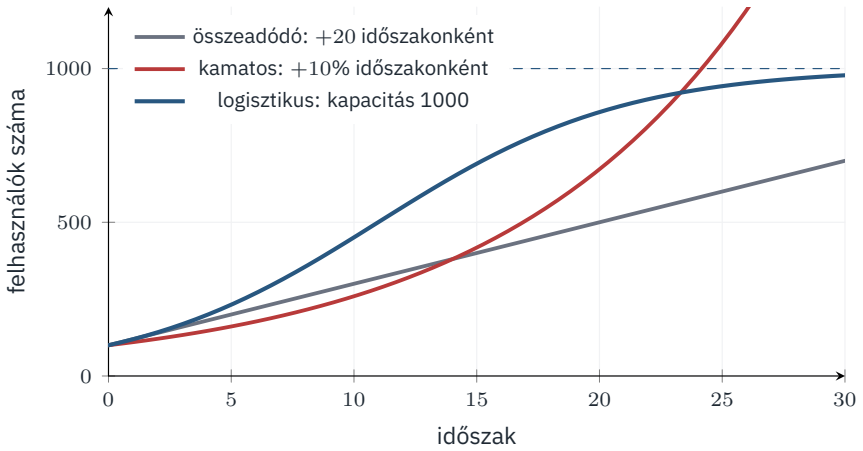
A futás eredménye: $Q^* = 100$ kg, évi 10 rendelés, 400 000 Ft/év; havi rendelésnél +1,7%, 50 kg-nál +25%. A biztonsági készlet 6,4, 8,2, illetve 11,6 kg. A kritikus hányados 0,667, az optimális rendelés 133 csokor, kb. 622 ezer forint várható nyereséggel; az összes csokor 34% eséllyel fogy el.

19.3. Összeadódó és kamatos változás

A növekedésnek két alaptípusa van (19.4. ábra). Az **összeadódó** (lineáris) növekedésnél minden időszakban ugyanannyi adódik hozzá a készlethez: $x(t+1) = x(t) + a$. A **kamatos** (exponenciális) növekedésnél a hozzáadott

mennyiség a készlettel arányos: $x(t+1) = (1+r)\,x(t)$, így $x(t) = x(0)\,(1+r)^t$. Az exponenciális növekedés kezdetben lassúnak tűnik, aztán egyre gyorsul: 10%-os időszakonkénti növekedésnél a készlet nagyjából hét időszak alatt megduplázódik ($\ln 2 / \ln 1{,}1 \approx 7{,}3$), harminc időszak alatt pedig tizenhétszeresére nő.

Az exponenciális növekedés a **pozitív visszacsatolás** jele: minél nagyobb a készlet, annál gyorsabban nő. A valóságban ez soha nem tart örökké, mert előbb-utóbb egy erőforrás korlátozza. Erről szól a fejezet két utolsó szakasza.



19.4. ábra. Összeadódó, kamatos és logisztikus növekedés. A kamatos növekedés eleinte lassabb az összeadódónál, aztán gyorsan túllépi; a logisztikus növekedés egy kapacitáskorlát felé telítődik.

19.4. Késleltetés és visszacsatolási hurok

A dinamikus rendszerek két legfontosabb szerkezeti eleme a **visszacsatolási hurok** és a **késleltetés** (Sterman 2000). A **negatív** (kiegyenlítő) visszacsatolás egy célállapot felé tereli a rendszert: ha a hátralék nő, a vezetés több kapacitást rendel hozzá, és a hátralék csökken. A **pozitív** (erősítő) visszacsatolás eltávolítja a célállapottól: ha a hátralék nő, a munkatársak túlterheltek, többen betegszenek meg, a kapacitás csökken, és a hátralék tovább nő.

A **késleltetés** a beavatkozás és a hatása között eltelt idő. A késleltetés miatt a negatív visszacsatolás is okozhat ingadozást: ha a vezetés a jelenlegi hátralék alapján dönt, de a döntés csak két hét múlva hat, könnyen túlreagál, és a hátralék a kívánt szint alá esik, majd a csökkentett kapacitás miatt ismét fölé nő. Jay Forrester ipari dinamikai modelljei éppen ezt mutatták meg az ellátási láncokban: a késleltetett, de jó szándékú döntések erős ingadozást okozhatnak (Forrester 1961).

19.4.1. Torlódás és a kihasználtság nemlinearitása

Egy kiszolgáló rendszerben a várakozás a kihasználtsággal nem lineárisan, hanem egyre meredekebben nő. A legegyszerűbb sorbanállási modellben az átlagos rendszerben töltött idő $W = 1/(\mu - \lambda)$, ahol λ az érkezési, μ a kiszolgálási ráta; ha a kihasználtság $\rho = \lambda/\mu$ 80%-ról 90%-ra nő, a várakozás megduplázódik, 95%-nál megnégyszereződik. Ezért kis többletkapacitás egy közel teljesen kihasznált rendszerben aránytalanul sokat javít, ahogy az 1.3. szakasz kapacitásbővítési példája is mutatta. A várakozási sorok modelljeit, a Little-törvényt és a közös sor előnyét a 20.5. szakasz tárgyalja részletesen.

19.5. Állapottér: differencia- és differenciálegyenletek

Miért hullámzik egyre jobban a hátralék?

Orsi két hónapja vezeti a hallgatói szolgáltatási irodát. Hétfő reggelente megnézi a hátralékot, és ennek alapján kér több vagy kevesebb kisegítőt a következő hétre. Az első hetekben türelmes volt, két hét alatt akarta ledolgozni a többletet, és a hátralék szépen beállt. Egy rossz hónap után aztán elhatározta, hogy mostantól egy héten belül eltünteti. Azóta a hátralék egyre nagyobb kilengésekkel hullámzik, pedig Orsi minden héten pontosan azt teszi, ami akkor észszerűnek látszik.

A lényeg: A rendszer viselkedését nemcsak az egyes döntések, hanem a döntési szabály és az állapotok összekapcsolódása határozza meg. Egy túl erős, késleltetéssel ható szabály a jó szándékú beavatkozást is instabillá teheti.

Kérdés: Mi történik a hátralékkal, ha Orsi egy hétnél rövidebb idő alatt akarja ledolgozni a többletet?

Szemléltető, kitalált helyzet · K33 · Próbáld ki: h19-keszlet

Az eddigi modellekben egyetlen készlet változott. A legtöbb rendszert azonban több, egymásra ható mennyiség írja le: a hátralék és a kapacitás, a raktárkészlet és a beszállítónál lévő rendelésállomány, a tőke és a foglalkoztatás. Az **állapot** azoknak a mennyiségeknek az összessége, amelyek ismeretében – a jövőbeli bemenetekkel együtt – a rendszer további viselkedése meghatározható; a múlt minden más részlete ebben az értelemben fölösleges. Ugyanez a gondolat áll a 20. fejezet Markov-feltevése mögött is, ott diszkrét állapotokra és véletlen átmenetekre alkalmazva (Luenberger 1979; Åström és Murray 2021).

Állapottér-modell

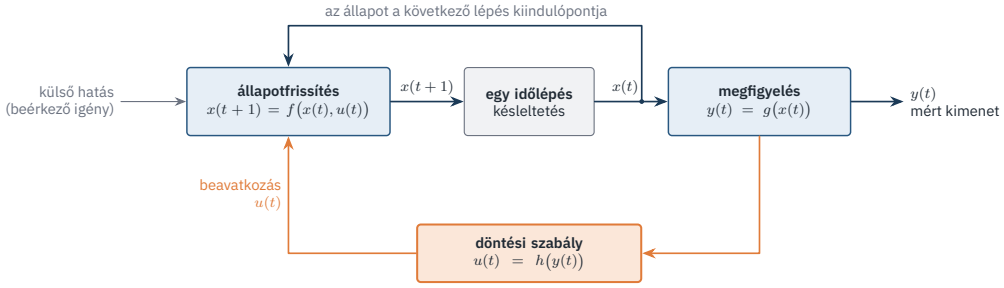
Az **állapottér-modell** az $x(t)$ állapotvektor időbeli változását írja le az $u(t)$ bemenetek (beavatkozások, külső hatások) függvényében. Diszkrét

időben **differenciaegyenlettel** a következő állapotot, folytonos időben **differenciálegyenlettel** a változás ütemét adjuk meg:

$$x(t+1) = f\big(x(t), u(t)\big), \qquad \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F\big(x(t), u(t)\big). \tag{19.5}$$

A megfigyelt kimenet az állapot függvénye: $y(t) = g\big(x(t)\big)$. Lineáris esetben $x(t+1) = A\,x(t) + B\,u(t)$, illetve $\dot{x} = A\,x + B\,u$.

A 19.5. ábra a szerkezetet mutatja. Az állapotfrissítés a jelenlegi állapotból és a bemenetből számolja a következőt; a döntéshozó a megfigyelt kimenet alapján avatkozik be, és ez a visszacsatolás zárja a hurkot. A 19.1. szakasz készletmérlege (19.1) egyállapotú differenciaegyenlet volt; a következő példa két állapotot kapcsol össze.



Lineáris esetben $x(t+1) = A\,x(t) + B\,u(t)$ és $y(t) = C\,x(t)$; folytonos időben a változás ütemét írjuk fel: $\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big)$.
A narancs hurok a visszacsatolás: a döntéshozó a megfigyelt kimenet alapján avatkozik be.

19.5. ábra. Az állapottér-modell szerkezete. Az állapot a rendszer „emlékezete”: belőle és a bemenetből számolható a következő állapot. A döntési szabály a megfigyelt kimenet alapján avatkozik be, és ezzel visszacsatolási hurkot zár.

Írjuk le a CASE04 irodáját két állapottal: x_1 a hátralék eltérése a célszinttől (ügy), x_2 a kapacitás eltérése a beérkezéstől, vagyis a többletkapacitás (ügy/hét). A hátralék eltérése annyival csökken, amennyi a többletkapacitás. A vezető hetente a kapacitást annak a szintnek az irányába igazítja, amely a többlethátralékot τ hét alatt ledolgozná, és a hiányzó rész α-szorosát pótolja:

$$x_1(t+1) = x_1(t) - x_2(t), \qquad x_2(t+1) = x_2(t) + \alpha\Big(\frac{x_1(t)}{\tau} - x_2(t)\Big), \tag{19.6}$$

vagyis $x(t+1) = A\,x(t)$ az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha/\tau & 1-\alpha \end{pmatrix}$ mátrixszal. A célállapot $x^* = (0, 0)$: nincs többlethátralék és nincs többletkapacitás.

A folytonos és a diszkrét modell kapcsolata egyszerű. Ha a $\dot{x} = F(x)$ differenciálegyenletet Δt lépésközzel közelítjük, az **Euler-módszer** az $x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t\,F\big(x(t)\big)$ differenciaegyenletet adja. A fenti modell

éppen a $\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = \alpha(x_1/\tau - x_2)$ folytonos rendszer egyhetes lépésközű változata, és itt a lépésköz a döntési ritmus: Orsi hetente egyszer nézi meg a hátralékot, és ekkor módosít. A következő szakaszból kiderül, hogy ez a látszólag technikai részlet a stabilitás szempontjából döntő.

19.6. Egyensúly és stabilitás

Egy dinamikus rendszer **egyensúlyi állapota** az, amelyben a készletek nem változnak: a be- és a kiáramlás egyenlő. A hátralékmodellben egyensúly akkor van, ha a beérkezés és a teljesítés egyenlő; ilyenkor a hátralék bármely szinten állandó maradhat.

Az egyensúly létezése azonban nem jelenti, hogy a rendszer el is jut oda, vagy ott is marad (19.6. ábra). Egy egyensúly **stabil**, ha egy kis kitérítés után a rendszer visszatér hozzá, és **instabil**, ha egy kis kitérítés is eltávolítja tőle. A völgy alján nyugvó golyó stabil, a domb tetején egyensúlyozó instabil egyensúlyban van: mindkettő nyugalomban maradhat, de csak az első tér vissza egy kis lökés után.



Mindkét helyzetben van egyensúly: a golyó nyugalomban maradhat. Csak a bal oldaliban tér vissza egy kis kitérítés után. Az egyensúly létezése tehát nem jelent stabilitást.

19.6. ábra. Stabil és instabil egyensúly. Mindkét helyzetben nyugalomban maradhat a golyó, de csak a bal oldaliban tér vissza egy kis kitérítés után.

Egyensúly és stabilitás

Az x^* állapot **egyensúly** (nyugalmi vagy rögzített pont), ha a rendszer onnan nem mozdul el: diszkrét időben $f(x^*) = x^*$, folytonos időben $F(x^*) = 0$. Az egyensúly

- **stabil** (Ljapunov értelmében), ha bármilyen kis $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy az x^*-hoz δ-nál közelebbről induló pályák mindvégig ε-nál közelebb maradnak hozzá;
- **aszimptotikusan stabil**, ha stabil, és a közelből induló pályák x^*-hoz tartanak;
- **instabil**, ha nem stabil: tetszőlegesen kis kitérítés után is van olyan pálya, amely eltávolodik tőle.

A gyakorlatban a stabilitást legtöbbször **linearizálással** döntjük el (Luenberger 1979; Strogatz 2015). Az egyensúly kis környezetében a rendszer jól közelíthető

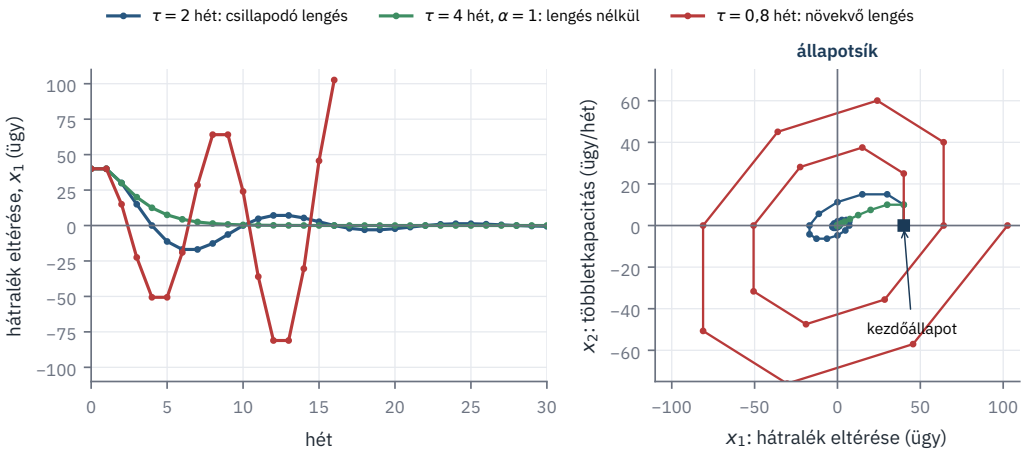
egy lineárissal, és a lineáris rendszer viselkedését a mátrix λ_i sajátértékei határozzák meg. Az egyensúly aszimptotikusan stabil, ha

$$\text{diszkrét időben } |\lambda_i| < 1, \qquad \text{folytonos időben } \operatorname{Re}\lambda_i < 0 \qquad \text{minden } i\text{-re;} \tag{19.7}$$

ha pedig valamelyik sajátérték abszolút értéke 1-nél nagyobb (illetve valós része pozitív), instabil. Egyváltozós $x(t+1) = f(x(t))$ esetben a feltétel $|f'(x^*)| < 1$. A komplex sajátértékek lengést jeleznek: csillapodót, ha az abszolút értékük 1-nél kisebb, és erősödőt, ha nagyobb.

A legegyszerűbb, egyváltozós esetben a stabilitás közvetlenül látszik. Ha egy kiegyenlítő szabály szerint a vezetés minden héten a célszinttől való eltérés k-szorosával módosítja a kapacitást, a hátralék eltérése a célszinttől $e(t+1) = (1-k)\,e(t)$. A rendszer akkor tér vissza a célszinthez, ha $|1-k| < 1$, vagyis $0 < k < 2$. Ha $k > 1$, a rendszer túllő és oszcillál, de csillapodva; $k \geq 2$ esetén az oszcilláció nem csillapodik, a beavatkozás többet árt, mint használ.

A kétállapotú hátralékmodellben (19.6) a sajátértékek a $\lambda^2 - (2-\alpha)\lambda + 1 - \alpha + \alpha/\tau = 0$ egyenlet gyökei. $\alpha = 0{,}5$ és $\tau = 2$ hét mellett $\lambda = 0{,}75 \pm 0{,}43\,i$, abszolút értékük 0,87: a hátralék csillapodó lengéssel áll vissza a célszintre (19.7. ábra). Ha Orsi türelmetlen, és $\tau = 0{,}8$ hét alatt akarja ledolgozni a többletet, $|\lambda| = 1{,}06$, vagyis a lengés hétről hétre erősödik. Rövid számolással belátható, hogy $0 < \alpha < 2$ esetén a rendszer pontosan akkor stabil, ha $\tau > 1$ hét: ha a vezető nem akarja gyorsabban ledolgozni a többletet, mint ahogy a saját döntési ritmusa engedi. Ez a kártya kérdésére adott válasz: a túl gyors célkitűzés nem gyorsítja a rendeződést, hanem a lengés forrásává válik.



19.7. ábra. A kétállapotú hátralékmodell pályái 40 ügy többlethátralékból indulva. Bal oldalon a hátralék eltérése az időben, jobb oldalon ugyanezek a pályák az állapotsíkon, ahol egy pont a hátralék és a többletkapacitás együttes állapota. A stabil pályák a célállapotba (az origóba) spiráloznak, az instabil kifelé.

Érdemes ezt összevetni a folytonos idejű változattal. A $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = \alpha(x_1/\tau - x_2)$ rendszer mátrixának nyoma $-\alpha < 0$, determinánsa $\alpha/\tau > 0$, ezért mindkét sajátérték valós része negatív: a folyamatosan, minden pillanatban igazító vezető bármilyen τ mellett stabilizálná a hátralékot. Az instabilitást tehát nem maga a szabály, hanem a szabály és a heti döntési ritmus találkozása okozza. Ez a 19.4. szakasz késleltetési tanulságának pontos formája: minél ritkábban mérünk és avatkozunk be, annál óvatosabb szabály kell.

Próbáld ki: állapottér és stabilitás

Előbb tippeld meg, mi történik, ha Orsi egy hétnél rövidebb idő alatt akarja ledolgozni a többletet. Ezután változtasd az igazítás ütemét (α) és a lebontási időt (τ): az alkalmazás kirajzolja az időpályát és az állapotsíkot, kiszámítja a sajátértékeket, és összeveti a heti és a folytonos döntési ritmust.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h19-keszlet.html#K33

Állapottér-modell, sajátértékek és stabilitás

A kód a (19.6) modell mátrixának sajátértékeit számolja, majd az $x(t+1) = A\,x(t)$ szorzást ismételve kirajzolja a pályát. Az utolsó rész a folytonos idejű változatot vizsgálja, amelynek mátrixa $A - I$.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def rendszer(alfa, tau):
    """Állapot: (hátralék eltérése, többletkapacitás).
    alfa: a kapacitás heti igazítási üteme,
    tau: a többlethátralék lebontására szánt idő (hét)."""
    return np.array([[1.0, -1.0],
                     [alfa / tau, 1.0 - alfa]])

for tau in [2.0, 1.2, 0.8]:
    lam = np.linalg.eigvals(rendszer(0.5, tau))
    r = np.abs(lam).max()
    print(f"tau = {tau}: |lambda| = {r:.3f} ->",
          "stabil" if r < 1 else "instabil")

fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 3))
for tau, szin in [(2.0, "C0"), (0.8, "C3")]:
    A, x = rendszer(0.5, tau), np.array([40.0, 0.0])
    palya = [x[0]]
    for het in range(20):
        x = A @ x                    # x(t+1) = A x(t)
        palya.append(x[0])
    ax.plot(palya, "o-", color=szin, label=f"tau = {tau} hét")
ax.axhline(0, color="gray", lw=0.8)
ax.set_xlabel("hét"); ax.set_ylabel("hátralék eltérése (ügy)")
ax.legend(); plt.show()

# A folytonos idejű változat (dx/dt = (A - I) x) mindig stabil
for tau in [2.0, 0.8]:
    lam_c = np.linalg.eigvals(rendszer(0.5, tau) - np.eye(2))
    print(f"folytonos, tau = {tau}: Re(lambda) =",
          np.round(lam_c.real, 3))
```

A futás eredménye: $\tau = 2$ hétnél $|\lambda| = 0{,}866$, $\tau = 1{,}2$ hétnél $0{,}957$ (mindkettő stabil), $\tau = 0{,}8$ hétnél $1{,}061$ (instabil). A folytonos változat sajátértékeinek valós része mindkét esetben $-0{,}25$.

19.7. Ljapunov-gondolat és konvergencia

Bonyolultabb, nemlineáris rendszereknél a stabilitás nem mindig vezethető le ilyen egyszerűen. Alekszandr Ljapunov orosz matematikus gondolata az volt, hogy ilyenkor egy „energiaszerű” függvényt keresünk, amely az egyensúlyban a legkisebb, és a rendszer mozgása során mindig csökken. Ha ilyen **Ljapunov-függvény** létezik, a rendszer az egyensúlyhoz konvergál, még akkor is, ha a pályáját nem tudjuk kiszámolni (Strogatz 2015).

A gondolat a döntéshozatalban is hasznos. Page példája szerint ha egy folyamatban minden lépés csökkent egy korlátos mennyiséget (például a résztvevők elégedetlenségét vagy egy feladatlista hosszát), és minden lépésben

legalább egy rögzített minimummal csökken, akkor a folyamat véges sok lépés után megáll (Page 2018). Ez magyarázza például, miért jut el egy önkéntes cserekereskedelem (ahol minden csere mindkét félnek előnyös) egy olyan állapotba, ahol további csere már nem történik.

> **Egyensúly létezése nem bizonyít konvergenciát**
>
> Gyakori hiba, hogy egy modellben megtaláljuk az egyensúlyi állapotot, és azt gondoljuk, a rendszer oda is fog jutni. A konvergenciához stabilitás kell, és a stabilitás a beavatkozási szabálytól, a késleltetéstől, a döntési ritmustól és a paraméterektől függ. Egy állandó növekedési ráta extrapolálása sem mechanizmus: azt állítja, hogy a múltbeli ütem folytatódik, de nem mondja meg, miért, és meddig.

19.8. Növekedési modellek és erőforráskorlát

Ha egy exponenciálisan növekvő folyamatot egy erőforrás korlátoz, a növekedés lelassul, és a készlet egy **kapacitáshatár** felé telítődik. A legegyszerűbb ilyen modell a **logisztikus** növekedés: $x(t+1) = x(t) + r\,x(t)\,(1 - x(t)/K)$, ahol K a kapacitás (19.4. ábra). Kezdetben, amikor x kicsi, a növekedés közel exponenciális; ahogy x közelít K-hoz, a növekedés lelassul. A logisztikus görbe S alakú, és a 21. fejezetben az innovációk elterjedésének modelljeként is visszatér. Nagy időlépésenkénti növekedési ütemnél azonban ugyanez az egyenlet egészen más viselkedést mutat; erről szól a fejezet utolsó szakasza.

19.8.1. A Solow-modell: felhalmozás és innováció

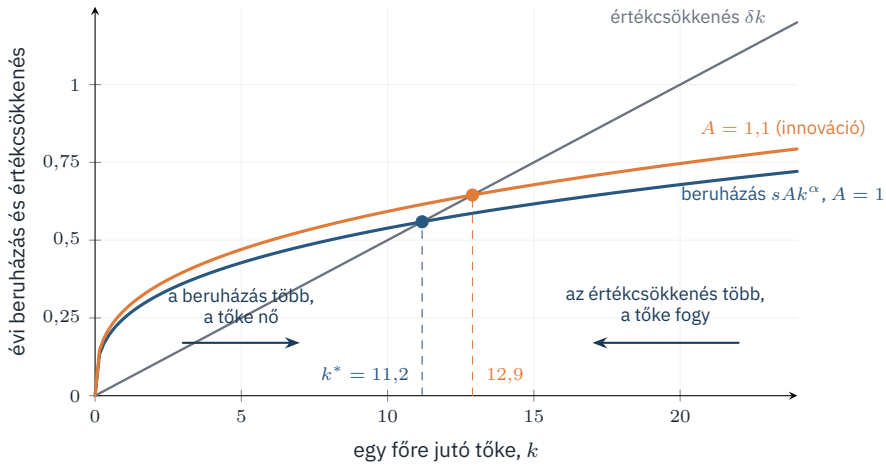
> **Miért lassult le a gyár növekedése?**
>
> Ádám nagyapja a hetvenes években egy veszprémi gyárban dolgozott. Szívesen meséli, hogy évről évre új gépsorokat állítottak be, a nyereség jó részét visszaforgatták, és az első években látványosan nőtt a termelés. Később hiába vásároltak továbbra is gépeket, a növekedés egyre lassult. Ádám, aki most tanul makroökonómiát, azon gondolkodik, mi lehetett ennek az oka.
>
> **A lényeg:** Ha a tőke határhozadéka csökken, a felhalmozás egy egyensúlyi szint felé lassul. Tartós növekedést csak a termelékenység javulása, az innováció hozhat.
>
> **Kérdés:** Ha a megtakarítási ráta 25%-ról 50%-ra nő, hányszorosára nő hosszú távon az egy főre jutó kibocsátás?
>
> Szemléltető, kitalált helyzet · K34 · Próbáld ki: h19-keszlet

A Solow-féle növekedési modell ugyanezt a telítődő szerkezetet mutatja egy gazdaság tőkefelhalmozásában (Solow 1956). Egyszerűsített, népességnövekedés

nélküli alakjában az egy főre jutó tőke k, a kibocsátás $y = A\,k^{\alpha}$, ahol $0 < \alpha < 1$, így a tőke határhozadéka csökken. A kibocsátás s hányadát beruházzák, a tőke évente δ hányada elavul:

$$k(t+1) = k(t) + s\,A\,k(t)^{\alpha} - \delta\,k(t), \qquad k^{*} = \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}. \tag{19.8}$$

Az egyensúlyban a beruházás éppen pótolja az elavulást (19.8. ábra). A k^{*}-nál kisebb tőkénél a beruházás a nagyobb, és a tőke nő; nagyobb tőkénél az elavulás, és a tőke fogy. Az egyensúly tehát stabil, és a növekedés üteme a közeledéssel lelassul: $\alpha = 1/3$, $s = 0{,}25$, $\delta = 0{,}05$, $A = 1$ és $k(0) = 1$ mellett az egy főre jutó kibocsátás az első évben 6,3%-kal, a tizedikben 2,4%-kal, az ötvenedikben már csak 0,3%-kal nő.



19.8. ábra. A Solow-modell egyensúlya. A beruházási görbe és az értékcsökkenési egyenes metszéspontja az egyensúlyi tőkeállomány; a nyilak mutatják, hogy mindkét oldalról ide tart a rendszer. Az innováció (nagyobb A) a beruházási görbét felfelé tolja, és magasabb egyensúlyt hoz.

A modellből két, a döntéshozók számára is fontos következtetés adódik. Az első, hogy a megtakarítási ráta emelése csak a szintet emeli, a tartós ütemet nem. Kétszeres megtakarítás mellett az egyensúlyi tőke 11,2-ről 31,6-ra nő, a kibocsátás viszont csak 2,24-ről 3,16-ra, vagyis $\sqrt{2} \approx 1{,}41$-szeresére, a fogyasztás pedig 1,68-ról 1,58-ra *csökken*. Az egyensúlyi fogyasztást az $s = \alpha$ megtakarítási ráta maximalizálja; ez a felhalmozás úgynevezett aranyszabálya (Phelps 1961). A második következtetés, hogy a tartós növekedés forrása a termelékenység, A javulása: 10%-kal jobb technológia az egyensúlyi kibocsátást 15%-kal emeli, és az ismételt innováció ismételt növekedést hoz. Paul Krugman ezzel a gondolatmenettel érvelt amellett, hogy a döntően a tőke és a munkaerő bevonására épülő növekedés – akár a szovjet típusú gazdaságokban, akár egyes kelet-ázsiai országokban – előbb-utóbb lelassul

(Krugman 1994). A 7.6. szakasz innovációs tanulsága itt makroszinten tér vissza: a front, itt az egyensúlyi szint eltolása többet ér, mint a meglévő kereteken belüli optimalizálás.

Próbáld ki: a Solow-modell

Előbb tippeld meg, hányszorosára nő az egyensúlyi kibocsátás kétszeres megtakarítás mellett. Ezután változtasd a megtakarítási rátát, az értékcsökkenést és a tőke hozadékát, és indíts el egy innovációs lökést: az alkalmazás kirajzolja a tőke, a kibocsátás és a növekedési ütem pályáját.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h19-keszlet.html#K34

A Solow-modell egyensúlya és lassuló növekedése

Az egyensúlyi tőkét az $sAk^{\alpha} = \delta k$ egyenlet adja; a pályát a (19.8) differenciaegyenlet ismétlésével számoljuk.

```
import numpy as np

alfa, delta = 1 / 3, 0.05        # tőkehányad, értékcsökkenés

def egyensuly(s, A):
    """Egyensúlyi tőke és kibocsátás: s*A*k^alfa = delta*k."""
    k = (s * A / delta) ** (1 / (1 - alfa))
    return k, A * k ** alfa

for nev, s, A in [("alap", 0.25, 1.0),
                  ("kétszeres megtakarítás", 0.50, 1.0),
                  ("10%-kal jobb technológia", 0.25, 1.1)]:
    k, y = egyensuly(s, A)
    print(f"{nev:25s} k* = {k:5.2f}  y* = {y:4.2f}  "
          f"fogyasztás = {(1 - s) * y:4.2f}")

# A pálya: a növekedés üteme fokozatosan lelassul
k = 1.0
y_elozo = k ** alfa
for ev in range(1, 51):
    k = k + 0.25 * k ** alfa - delta * k
    y = k ** alfa
    if ev in (1, 10, 50):
        print(f"{ev}. év: növekedés {y / y_elozo - 1:.1%}")
    y_elozo = y
```

A futás eredménye: az alapesetben $k^* = 11{,}18$, $y^* = 2{,}24$; kétszeres megtakarításnál $k^* = 31{,}62$, $y^* = 3{,}16$, a fogyasztás 1,68-ról 1,58-ra csökken; jobb technológiával $y^* = 2{,}58$. A növekedési ütem az 1., 10. és 50. évben 6,3%, 2,4% és 0,3%.

19.9. Bifurkáció és káosz: a logisztikus leképezés

Lehet-e egyetlen, egyszerű oka a kiszámíthatatlanságnak?

Dóra nagyapja negyven éve vezeti a falu horgászegyesületét, és egy füzetben jegyzi, mennyi halat fognak évente a tóban. Volt évtized, amikor a számok szépen beálltak, máskor kétévente váltakozott a jó és a gyenge év, az utóbbi időben pedig szinte kiszámíthatatlanul hullámzanak, pedig a tó kezelése alig változott. A nagyapa külső okot keres: időjárást, betegséget, orvhalászokat. Dóra, aki most ismerkedik a dinamikus modellekkel, arra gondol, hogy talán nincs is szükség külső okra.

A lényeg: Egyetlen paraméter, itt a szaporodás ütemének változása minőségileg más viselkedést hozhat: egyensúlyt, periodikus ingadozást vagy kaotikus hullámzást. Egy egyszerű, véletlent nem tartalmazó szabály is lehet a gyakorlatban előrejelezhetetlen.

Kérdés: Mi történik a hosszú távú viselkedéssel, ha a szaporodási paraméter 2,8-ról fokozatosan 4-re nő?

Szemléltető, kitalált helyzet · K35 · Próbáld ki: h19-keszlet

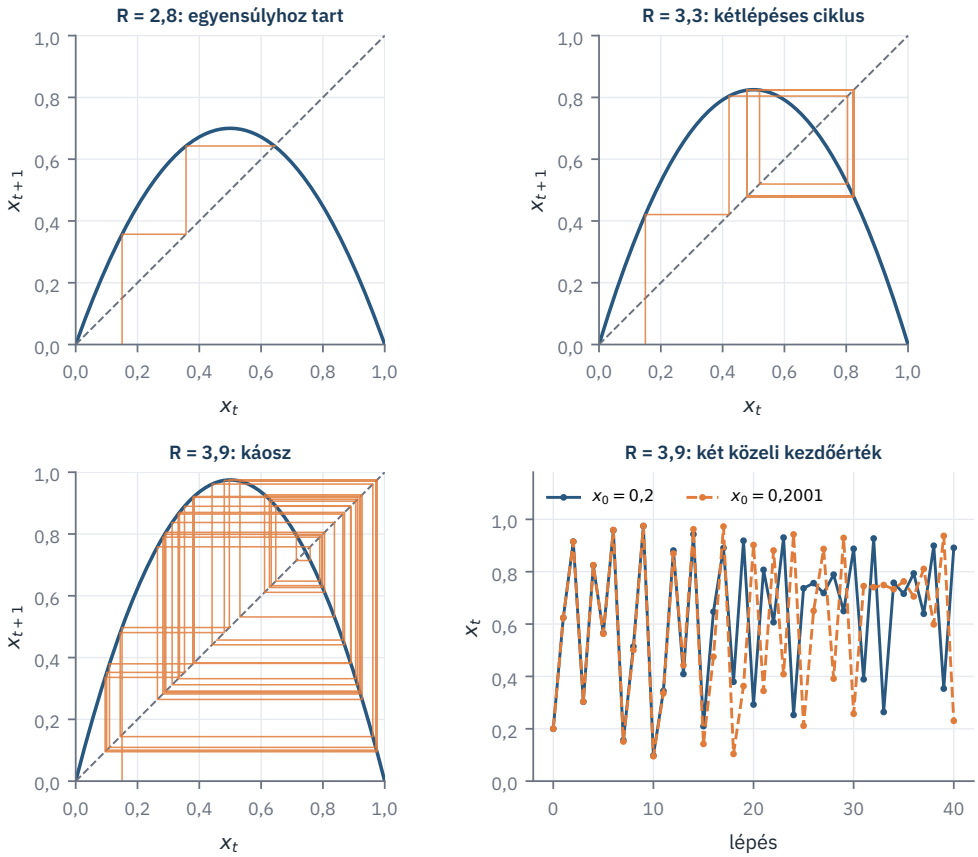
Térjünk vissza a 19.8. szakasz logisztikus növekedéséhez, de most egy olyan populációt nézzünk, amelynek nemzedékei évente követik egymást, például egy rovar- vagy halállományt. Az $x(t+1) = x(t) + r\,x(t)\,(1 - x(t)/K)$ diszkrét logisztikus modell az $y = r\,x/\big((1+r)K\big)$ új változóval a **logisztikus leképezés** alakjára hozható:

$$y(t+1) = R\,y(t)\,(1 - y(t)), \qquad R = 1 + r. \tag{19.9}$$

Robert May 1976-os, nagy hatású cikkében éppen ezen a látszólag ártatlan egyenleten mutatta meg, hogy egy egyszerű determinisztikus szabály is rendkívül bonyolult viselkedést produkálhat (May 1976). Az alábbiakban a változót ismét x-szel jelöljük.

Az egyenletnek két egyensúlya van: $x^* = 0$ és $x^* = 1 - 1/R$. A második stabilitását a derivált dönti el: $f'(x^*) = R(1 - 2x^*) = 2 - R$, ezért az egyensúly $1 < R < 3$ esetén stabil. A 19.9. ábra **pókhálóábrákon** mutatja a pályákat: a parabolától az átlóig, onnan vissza a parabolára lépkedve kapjuk a soron következő értékeket. $R = 2{,}8$-nál a pálya az egyensúlyhoz tart. $R = 3$-nál a derivált -1, az egyensúly elveszíti stabilitását, és helyette egy stabil kétlépéses ciklus jelenik meg: $R = 3{,}3$-nál a populáció egy jó (0,82) és egy gyenge (0,48) év között váltakozik. Ez a **periódus-kettőződés**.

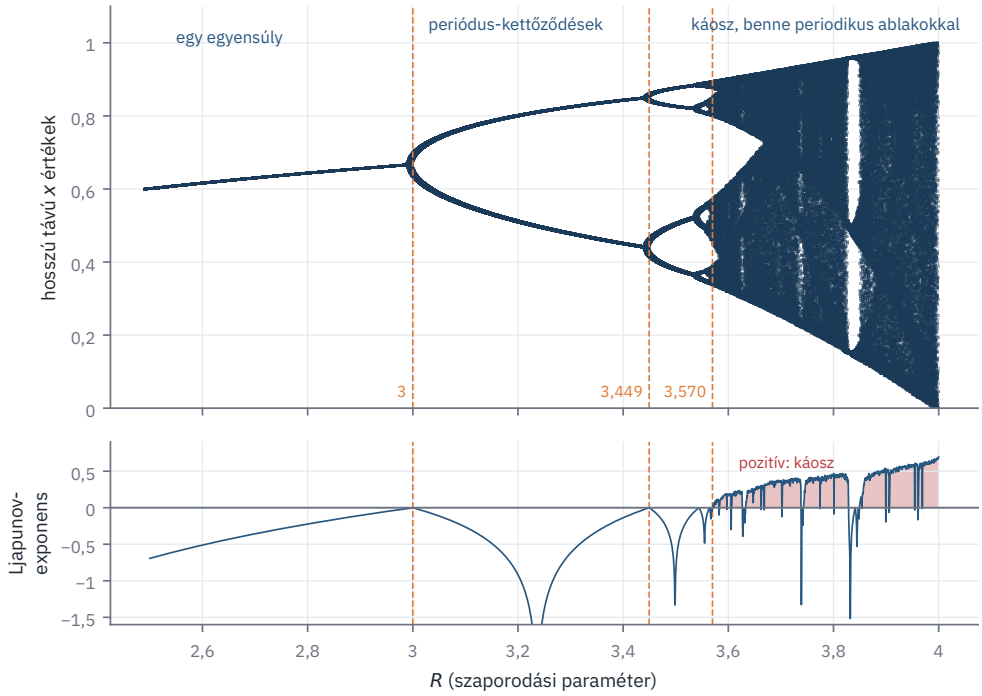
> **Bifurkáció és káosz**
>
> **Bifurkációnak** nevezzük, ha egy paraméter kis változása egy kritikus értéken áthaladva a rendszer hosszú távú viselkedésében minőségi változást okoz: megváltozik az egyensúlyok vagy a ciklusok száma, illetve stabilitása. **Káosznak**



19.9. ábra. A logisztikus leképezés pókhálóábrái. A parabola a következő évi értéket adja, a szaggatott átló segítségével lépünk tovább. Az R növelésével a pálya egyensúlyhoz, majd kétlépéses ciklushoz tart, végül kaotikussá válik; a jobb alsó panelen két, csupán 0,0001-gyel eltérő kezdőértékből induló pálya néhány tucat lépés után már teljesen különbözik.

> egy determinisztikus rendszer olyan hosszú távú, nem periodikus viselkedését nevezzük, amely érzékenyen függ a kezdőfeltételektől: két tetszőlegesen közeli kezdőállapotból induló pálya idővel eltávolodik egymástól (Strogatz 2015).

Ha R-et tovább növeljük, a kettőződések egyre sűrűbben követik egymást: négyes ciklus $R = 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}449$-nél, nyolcas kb. 3,544-nél jelenik meg, és a sorozat $R_\infty \approx 3{,}5699$-nél véget ér (19.10. ábra). Mitchell Feigenbaum felfedezte, hogy az egymást követő kettőződési intervallumok hosszának aránya egy univerzális állandóhoz, $\delta \approx 4{,}669$-hez tart, amely a parabolához hasonló alakú leképezések egész családjában ugyanaz (Feigenbaum 1978). R_∞ fölött a viselkedés többnyire kaotikus, de periodikus ablakok szakítják meg; a legszembetűnőbb a háromperiódusú ablak $R \approx 3{,}83$ körül. A bifurkációs ábra ráadásul önhasonló: egy-egy ágát kinagyítva az egész ábra kicsinyített mását látjuk, ami a 22.5. szakaszban bemutatott fraktálok rokonává teszi.



19.10. ábra. A logisztikus leképezés bifurkációs ábrája (fent) és Ljapunov-exponense (lent). Minden R értéknél a kezdeti átmenet utáni értékeket ábrázoltuk. A szaggatott vonalak az első két kettőződést és a káosz kezdetét jelzik; ahol a Ljapunov-exponens pozitív, a viselkedés kaotikus.

Hogyan mérhető a kezdőfeltételektől való érzékeny függés? Ha két pálya kezdetben ε_0 távolságra van, a távolság átlagosan $\varepsilon_t \approx \varepsilon_0 \, e^{\lambda t}$ szerint változik,

ahol λ a **Ljapunov-exponens**:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \ln\left|f'(x_t)\right|. \tag{19.10}$$

Negatív exponens esetén a közeli pályák összetartanak (egyensúly vagy ciklus), pozitívnál széttartanak: ez a káosz kvantitatív ismérve (19.10. ábra, alsó panel). A mérőszám ugyanannak a Ljapunovnak a nevét viseli, akinek a stabilitási gondolatát a 19.7. szakasz bemutatta: ő vezette be a megoldások exponenciális növekedési ütemét jellemző kitevőket. $R = 3{,}9$-nél $\lambda \approx 0{,}50$, vagyis a kezdeti hiba lépésenként átlagosan 1,6-szorosára nő; $R = 4$-nél $\lambda = \ln 2$, a hiba lépésenként megduplázódik. A gyakorlati következmény az **előrejelzési horizont**: egy 0,0001 pontossággal ismert kezdőállapotból indított előrejelzés $R = 3{,}9$-nél már a 16. lépésben 0,1-nél többet téved (19.9. ábra, jobb alsó panel), és a mérés tízszeres pontosítása is csak kb. öt lépéssel tolja ki a horizontot.

A káosz nem a logisztikus leképezés különlegessége. Edward Lorenz 1963-ban egy háromváltozós, a légköri áramlást durván közelítő differenciálegyenlet-rendszerben fedezte fel ugyanezt az érzékenységet, és ebből következtetett az időjárás-előrejelzés elvi határára (Lorenz 1963). Folytonos idejű rendszerben a káoszhoz legalább három állapotváltozó kell, mert két dimenzióban a pályák nem keresztezhetik egymást, ezért csak egyensúlyhoz vagy ciklushoz tarthatnak; diszkrét időben viszont már egyetlen változó is elég (Strogatz 2015). Laboratóriumi kísérletek is igazolták, hogy valódi populációk viselkedése a modell által jósolt módon válthat át egyensúlyból ciklusokba és káoszba: Costantino és munkatársai a felnőtt egyedek halandóságát magasra állítva, az utánpótlás ütemének kísérleti változtatásával egyensúlyból kváziperiodikus ciklusokon át kaotikus viselkedésbe vitték lisztbogár-populációk létszámát (Costantino és mtsai. 1997).

> **Mit jelent a káosz a döntéshozó számára?**
>
> Három tanulság adódik. Először: egy szabálytalan idősor mögött nem feltétlenül áll külső ok vagy véletlen; egy egyszerű, visszacsatolt szabály is termelhet ilyen viselkedést, ezért a „bűnös” keresése mellett érdemes a rendszer szerkezetét is megvizsgálni. Másodszor: kaotikus rendszerben a pontos, hosszú távú előrejelzés elvileg lehetetlen, a statisztikai jellemzők (átlag, ingadozási tartomány) viszont előrejelezhetők. A tervezés célja ilyenkor a tartományra méretezett, robusztus döntés, nem a pontos pálya (17. fejezet). Harmadszor: a viselkedés egy paraméter függvényében hirtelen válthat. Egy lassan változó tényező (a szaporodás üteme, egy szabály erőssége, a kihasználtság) a kritikus érték közelében kis változással is minőségi fordulatot hozhat, ahogy a 21. fejezet fordulópontjai is mutatják.

Próbáld ki: bifurkáció és káosz

Előbb tippeld meg, melyik R értéknél kezd a hosszú távú viselkedés két érték között váltakozni. Ezután mozgasd az R paramétert: a pókhálóábra lépésről lépésre kirajzolja a pályát, a bifurkációs ábrán egy jelölő mutatja a helyed, és két, nagyon közeli kezdőértékből indított pálya szemlélteti a kezdőfeltételektől való érzékeny függést.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h19-keszlet.html#K35

A logisztikus leképezés: periódus-kettőződés, káosz és Ljapunov-exponens

A kód először néhány R értékre kiírja a hosszú távú viselkedést, majd két közeli kezdőérték pályáját hasonlítja össze, kiszámítja a Ljapunov-exponenst, végül kirajzolja a bifurkációs ábrát.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def palya(R, x0, n):
    """A logisztikus leképezés: x(t+1) = R x(t) (1 - x(t))."""
    x = np.empty(n)
    x[0] = x0
    for t in range(n - 1):
        x[t + 1] = R * x[t] * (1 - x[t])
    return x

# Hosszú távú viselkedés különböző R mellett
for R in [2.8, 3.3, 3.5, 3.9]:
    print(f"R = {R}:", np.round(palya(R, 0.2, 1000)[-6:], 3))

# Érzékeny függés a kezdőértéktől
a, b = palya(3.9, 0.2, 60), palya(3.9, 0.2001, 60)
lepes = np.argmax(np.abs(a - b) > 0.1)
print("a 0,0001-es különbség", lepes, "lépés alatt 0,1 fölé nő")

# Ljapunov-exponens: ln|f'(x)| = ln|R (1 - 2x)| átlaga
for R in [2.8, 3.5, 3.9, 4.0]:
    x = palya(R, 0.2, 20000)[1000:]
    lyap = np.mean(np.log(np.abs(R * (1 - 2 * x))))
    print(f"R = {R}: Ljapunov-exponens {lyap:+.3f}")

# Bifurkációs ábra: minden R-re a kezdeti átmenet utáni értékek
Rs = np.linspace(2.5, 4.0, 1500)
x = np.full_like(Rs, 0.2)
for _ in range(600):
    x = Rs * x * (1 - x)
pontok = []
for _ in range(150):
    x = Rs * x * (1 - x)
    pontok.append(x.copy())
plt.figure(figsize=(6, 3.2))
plt.plot(np.tile(Rs, 150), np.ravel(pontok), ",", alpha=0.3)
plt.xlabel("R"); plt.ylabel("hosszú távú x értékek")
plt.show()
```

A futás eredménye: $R = 2{,}8$-nál a pálya 0,643-nál nyugszik meg, $R = 3{,}3$-nál 0,824 és 0,479 között váltakozik, $R = 3{,}5$-nél négy érték ismétlődik, $R = 3{,}9$-nél nincs ismétlődés. A 0,0001-es különbség 16 lépés alatt nő 0,1 fölé. A Ljapunov-exponens $R = 2{,}8$-nál $-0{,}22$, $3{,}5$-nél $-0{,}87$, $3{,}9$-nél $+0{,}50$, 4-nél $+0{,}69 = \ln 2$.

Átviteli példa: egy közös erőforrás megújulása (CASE06)

Egy közösen használt víztartályba hetente esővíz folyik be, a használók pedig vizet vesznek ki. A tartály szintje készlet, a beáramlás és a kivétel áram. Ha a kivétel tartósan meghaladja a beáramlást, a tartály kiürül; ha a közösség a szint alapján szabályozza a kivételt (alacsony szintnél kevesebbet szabad kivenni),

negatív visszacsatolás jön létre, amely stabilizálja a szintet. A késleltetés itt is számít: ha a szintet csak havonta mérik, a szabály túl későn reagál. A 24. fejezet ezt a helyzetet az egyéni ösztönzők szempontjából is megvizsgálja.

Összefoglalás

- A készlet egy pillanatban mérhető mennyiség, az áram a változásának üteme; a mértékegység (van-e időegység) egyszerű ellenőrzés.
- A készletet a be- és a kiáramlás tartós különbsége alakítja; egyszeri beavatkozás csak ideiglenesen hat, ha az áramok viszonya nem változik.
- A gazdaságos tételnagyság, $Q^{*} = \sqrt{2DS/h}$ a rendelési és a tartási költséget egyensúlyozza, a költség a minimum körül lapos. A biztonsági készlet az átfutási idő alatti igény bizonytalanságát fedezi; az újságárus-modellben a $(p-c)/(p-v)$ kritikus hányados adja az optimális rendelést.
- Az összeadódó növekedés lineáris, a kamatos exponenciális; az exponenciális növekedés pozitív visszacsatolás jele, és erőforráskorlát nélkül nem tartható fenn.
- A késleltetés a kiegyenlítő visszacsatolást is ingadozóvá teheti; a kiszolgáló rendszerek várakozása a kihasználtsággal nemlineárisan nő.
- Az állapottér-modell az állapot változását differencia- vagy differenciálegyenlettel írja le; a döntési szabály visszacsatolási hurkot zár.
- Az egyensúly létezése nem jelent stabilitást. Lineáris közelítésben egy egyensúly stabil, ha minden sajátérték abszolút értéke 1-nél kisebb (diszkrét idő), illetve valós része negatív (folytonos idő); a ritka döntési ritmus egy folytonosan stabil szabályt is instabillá tehet.
- A Ljapunov-gondolat szerint egy minden lépésben csökkenő, korlátos mennyiség konvergenciát garantál.
- A logisztikus növekedés egy kapacitáshatár felé telítődő S alakú pálya; a Solow-modellben a felhalmozás egyensúlyhoz lassul, tartós növekedést a termelékenység javulása hoz.
- A logisztikus leképezés a szaporodási paraméter növelésével egyensúlyból periódus-kettőződéseken át káoszba jut. Pozitív Ljapunov-exponens esetén a kezdeti hiba exponenciálisan nő, és a pontos előrejelzés horizontja véges.

Önellenőrzés

1. Melyik készlet és melyik áram: raktárkészlet, havi eladás, felhasználók száma, napi új regisztráció?
2. A hátralék 200 ügy, hetente 300 érkezik, a kapacitás 280. Mennyi lesz a hátralék tíz hét múlva, ha nincs beavatkozás?
3. Miért nő újra a hátralék az egyszeri pluszhét után?
4. Egy kiegyenlítő szabály szerint $e(t+1) = (1-k)\,e(t)$. Mi történik $k = 0{,}5$, $k = 1{,}5$ és $k = 2{,}5$ esetén?
5. Egy elemző a felhasználók számának elmúlt két évi 8%-os havi növekedését a következő öt évre extrapolálja. Mit vetnél ellen?

6. Egy termék éves igénye 4000 darab, egy rendelés költsége 5000 Ft, a tartási költség darabonként évi 1000 Ft. Mekkora a gazdaságos tételnagyság, és mennyi az éves rendelési és tartási költség?
7. Kinga a csokrokat 5000 forintért kapja; az eladási ár és a maradványérték változatlan. Hogyan változik a kritikus hányados, és többet vagy kevesebbet rendeljen, mint korábban?
8. Stabil-e az $x(t+1) = A\,x(t)$ rendszer $(0,0)$ egyensúlya, ha $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$?
9. A logisztikus leképezésben $R = 2{,}5$. Hol van a nem nulla egyensúly, stabil-e, és hogyan közelít hozzá a pálya?
10. Miért nem lehet egy kaotikus rendszer állapotát hosszú távra pontosan előrejelezni, ha a szabálya pontosan ismert?

Megoldás.

1. Készlet: raktárkészlet, felhasználók száma. Áram: havi eladás, napi új regisztráció.
2. $200 + 10 \cdot (300 - 280) = 400$ ügy.
3. Mert a pluszhét csak egyszer csökkentette a készletet, a beérkezés (500) és a teljesítés (480) tartós különbsége nem változott; utána a hátralék ugyanúgy heti 20 üggyel nő.
4. $k = 0{,}5$: az eltérés minden héten feleződik, monoton konvergencia. $k = 1{,}5$: az eltérés előjelet vált és feleződik, csillapodó oszcilláció. $k = 2{,}5$: az eltérés előjelet vált és másfélszeresére nő, a rendszer instabil.
5. Az exponenciális növekedés extrapolálása nem mechanizmus; öt év alatt a 8%-os havi növekedés több mint százszoros növekedést jelentene, amit a piac mérete és más erőforrások szinte biztosan korlátoznak. Egy telítődő (például logisztikus) modell és a korlátozó tényező megnevezése indokoltabb.
6. $Q^* = \sqrt{2 \cdot 4000 \cdot 5000/1000} = 200$ darab, évi 20 rendelés; a költség $20 \cdot 5000 + 100 \cdot 1000 = 200\,000$ Ft évente.
7. $c_u = 10\,000 - 5000 = 5000$, $c_o = 5000 - 1000 = 4000$, a kritikus hányados $5/9 \approx 0{,}56$, $z \approx 0{,}14$, így kb. $120 + 0{,}14 \cdot 30 \approx 124$ csokor: kevesebbet érdemes rendelni, mert a maradék vesztesége közelebb került az elmaradt haszonhoz.
8. Nem stabil. A mátrix háromszögmátrix, sajátértékei a főátló elemei: 0,5 és 1,1. Mivel $|1{,}1| > 1$, a második állapotváltozó minden lépésben 10%-kal nő, és magával húzza az elsőt is.
9. $x^* = 1 - 1/2{,}5 = 0{,}6$; $f'(x^*) = 2 - 2{,}5 = -0{,}5$, tehát $|f'(x^*)| < 1$, az egyensúly stabil. A negatív derivált miatt az eltérés lépésenként előjelet vált és nagyjából feleződik: a pálya csillapodó oszcillációval közelít.
10. Mert a kezdőállapotot sosem ismerjük tökéletesen, és kaotikus rendszerben a kezdeti hiba átlagosan $e^{\lambda t}$ szerint nő (pozitív Ljapunov-exponens). A hiba egy idő után a változó teljes tartományával összemérhető lesz; a mérés pontosítása a horizontot csak logaritmikusan tolja ki.

Továbbolvasás

- Sterman, J. D. (2000): *Business Dynamics* – készletek, áramok, visszacsatolás és késleltetés (Sterman 2000).
- Meadows, D. H. (2008): *Thinking in Systems* – a rendszerszemlélet közérthető bevezetése (Meadows 2008).

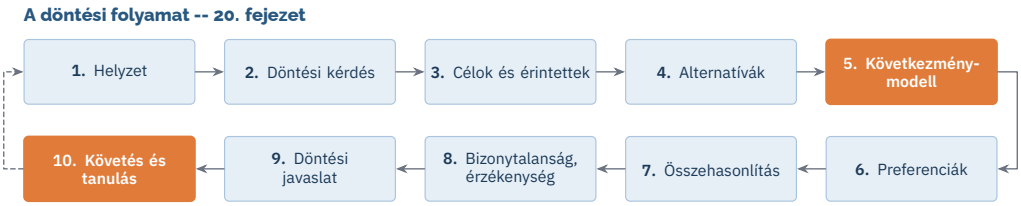
- Harris, F. W. (1913); Silver, E. A., Pyke, D. F., Thomas, D. J. (2017): *Inventory and Production Management in Supply Chains* – gazdaságos tételnagyság, biztonsági készlet, újságárus-modell (Harris 1913; Silver és mtsai. 2017).
- Arrow, K. J., Harris, T., Marschak, J. (1951) – optimális készletpolitika bizonytalan igény mellett (Arrow és mtsai. 1951).
- Luenberger, D. G. (1979): *Introduction to Dynamic Systems*; Åström, K. J., Murray, R. M. (2021): *Feedback Systems* – állapottér-modellek, sajátértékek, stabilitás és visszacsatolás (Luenberger 1979; Åström és Murray 2021).
- Strogatz, S. H. (2015): *Nonlinear Dynamics and Chaos* – egyensúly, stabilitás, Ljapunov-függvények, bifurkáció és káosz (Strogatz 2015).
- May, R. M. (1976); Feigenbaum, M. J. (1978); Lorenz, E. N. (1963) – a logisztikus leképezés, az univerzalitás és az érzékeny függés (May 1976; Feigenbaum 1978; Lorenz 1963).
- Solow, R. M. (1956); Phelps, E. S. (1961); Krugman, P. (1994) – a neoklasszikus növekedési modell, az aranyszabály és a felhalmozásra épülő növekedés határai (Solow 1956; Phelps 1961; Krugman 1994).

Gyakorlat

A Döntési műhely 19. műhelyében a készletmodell-alkalmazással (H19) a CASE04 hátralékát és a kiegyenlítő szabályok stabilitását, a készletezési modelleket (gazdaságos tételnagyság, biztonsági készlet, újságárus-modell), a kétállapotú állapottér-modellt, a Solow-modellt és a logisztikus leképezés bifurkációit vizsgálhatod. Az E19 munkafüzet a hétről hétre számolt készletmérleget tartalmazza, az N19 notebook pedig a lineáris, az exponenciális és a logisztikus növekedést, a lépésköz hatását és a fejezet Python-demóit is tartalmazza; minden áramhoz időegység tartozik.

20.

Állapotváltások és szekvenciális döntések



Ma működik. Holnap is számíthatsz rá?

Laci két használt autó közül választ, és a próbaúton mindkettő kifogástalanul működik. Az előző tulajdonosok szerint az egyik gyakran megáll apró hibákkal, a másik ritkábban romlik el, de akkor hetekig szervizben van. A mai állapot kevés ahhoz, hogy eldöntse, melyikre számíthat jobban.
A lényeg: A következő időszak rendelkezésre állását az állapotváltások és a javítási idő is befolyásolja.
Kérdés: Melyik átmenet megváltoztatásával javítanád leginkább az autó használhatóságát a következő hónapban?
Szemléltető, kitalált helyzet · F20 · Próbáld ki: h20-markov

Az előző fejezet folytonos mennyiségek (készletek) időbeli változását vizsgálta. Sok rendszert azonban néhány diszkrét **állapottal** lehet jól leírni: egy jármű működik, javítás alatt áll vagy cserére vár; egy ügyfél aktív, szüneteltetti az előfizetését vagy lemondta; egy hallgató kezdő, haladó vagy befejezte a tanulmányait. A rendszer időszakról időszakra véletlenszerűen vált az állapotok között. A **Markov-lánc** ezt a viselkedést írja le, és lehetővé teszi, hogy kiszámítsuk, hol lesz a rendszer néhány időszak múlva, mennyi időt tölt az egyes állapotokban, és mennyibe kerül mindez (Kemeny és Snell 1960; Norris 1997). A Markov-láncok egyik legfontosabb alkalmazása a sorbanállás

elmélete, amely ügyfélszolgálatok, rendelők, telefonközpontok és szerverek méretezését támogatja.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- egy rendszert állapotokkal és átmeneti valószínűségekkel leírni, és megfogalmazni a Markov-feltevést;
- felírni egy sorösszeg-egy átmeneti mátrixot, és kiszámítani két állapotátmeneti lépést;
- megkülönböztetni a többlépéses eloszlást és a stacionárius eloszlást;
- azonosítani az elnyelő állapotot, és értelmezni az irreducibilitást és a periodicitást;
- kiszámítani az elnyelésig várható időt és a kumulált költséget;
- egy várakozási sort születési–halálozási folyamatként leírni, kiszámítani az M/M/1 és az M/M/c modell átlagos várakozási idejét, és alkalmazni a Little-törvényt;
- két cselekvési politika eltérő átmeneteit összevetni, és felismerni, mikor elégtelen a Markov-feltevés.

A fejezet az állapot és az átmenet fogalmával, valamint a Markov-feltevéssel kezd. Ezután az átmeneti mátrixot és a többlépéses eloszlást tárgyalja a CASE02 járművén, majd a stacionárius állapotot és a lánc szerkezeti tulajdonságait. A negyedik szakasz a várható időtartamot és a költséget, az ötödik a várakozási sorokat mint születési–halálozási folyamatokat, az utolsó a cselekvésfüggő átmeneteket és a Markov-döntési folyamatokat mutatja be.

20.1. Állapot és átmenet: a Markov-feltevés

Markov-feltevés

Egy állapotváltó rendszer **Markov-tulajdonságú**, ha a következő állapot valószínűsége csak a jelenlegi állapottól függ, attól nem, hogyan jutott a rendszer ide: $P(X_{t+1} = j \mid X_t = i, X_{t-1}, \dots) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = p_{ij}$.

A Markov-feltevés egyszerűsítés, és mindig meg kell vizsgálni, mennyire indokolt. Egy jármű meghibásodási esélye valószínűleg függ az életkorától és attól, hányszor javították már; egy egyszerű háromállapotú modell ezt elhanyagolja. Ha a múlt fontos, az állapotot bővíteni kell (például „működik, két évesnél fiatalabb” és „működik, idősebb”), és a lánc így ismét Markov-tulajdonságú lehet. Az állapot elnevezése azonban önmagában nem szünteti meg a múltfüggést: ha a „működik” állapotban a jövő a korábbi javításoktól is függ, a modell téves lesz, akárhogy nevezzük az állapotot.

20.2. A sorösszeg-egy átmeneti mátrix és a többlépéses eloszlás

Hol lesz a jármű két hónap múlva?

Egy működő jármű a következő hónapban 85% eséllyel működik, 12% eséllyel javításra kerül, 3% eséllyel pedig véglegesen cserére szorul. A javításból 60% eséllyel tér vissza.
A lényeg: Az átmeneti valószínűségekből a több lépés utáni állapoteloszlás egyszerű mátrixszorzással kiszámítható.
Kérdés: Tippeld meg: mekkora az esélye, hogy a jármű két hónap múlva működik?
Szemléltető, kitalált helyzet · K17 · Próbáld ki: h20-markov

Az átmeneti valószínűségeket egy $n \times n$-es **átmeneti mátrixba** gyűjtjük, amelynek p_{ij} eleme annak esélye, hogy az i állapotból egy lépésben a j állapotba jut a rendszer. Minden sor összege 1, mert a rendszernek valahová el kell jutnia. A könyv a **sorvektor-konvenciót** használja: ha $p(t)$ az állapotvalószínűségek sorvektora a t időpontban, akkor

$$p(t+1) = p(t)\,P, \qquad p(t) = p(0)\,P^{t}. \tag{20.1}$$

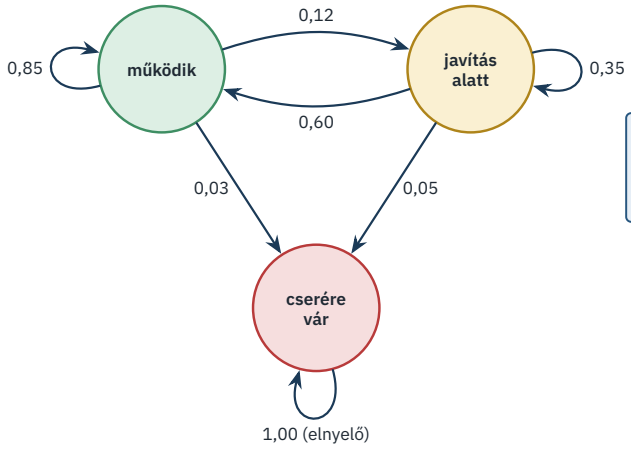
CASE02 – A jármű állapotai

A szervezet járműve havonta három állapot valamelyikében van: működik, javítás alatt van, vagy cserére vár (javíthatatlan meghibásodás miatt). Ha a karbantartást halasztják, egy működő jármű a következő hónapban 0,85 eséllyel működik, 0,12 eséllyel javításra kerül, 0,03 eséllyel cserére szorul. A javítás alatt álló jármű 0,60 eséllyel visszatér a működéshez, 0,35 eséllyel a javítás folytatódik, 0,05 eséllyel cserére szorul. A cserére váró állapot elnyelő: a modell az aktuális jármű életét írja le. Rendszeres karbantartás mellett a működő jármű átmenetei 0,92, 0,07 és 0,01. A számértékek szemléltetők.

Egy működő járműből indulva ($p(0) = (1, 0, 0)$) egy hónap után $p(1) = (0{,}85;\ 0{,}12;\ 0{,}03)$, vagyis az átmeneti mátrix első sora. Két hónap után

$$p(2) = p(1)\,P = (0{,}85{\cdot}0{,}85{+}0{,}12{\cdot}0{,}60;\ 0{,}85{\cdot}0{,}12{+}0{,}12{\cdot}0{,}35;\ 0{,}85{\cdot}0{,}03{+}0{,}12{\cdot}0{,}05{+}0$$

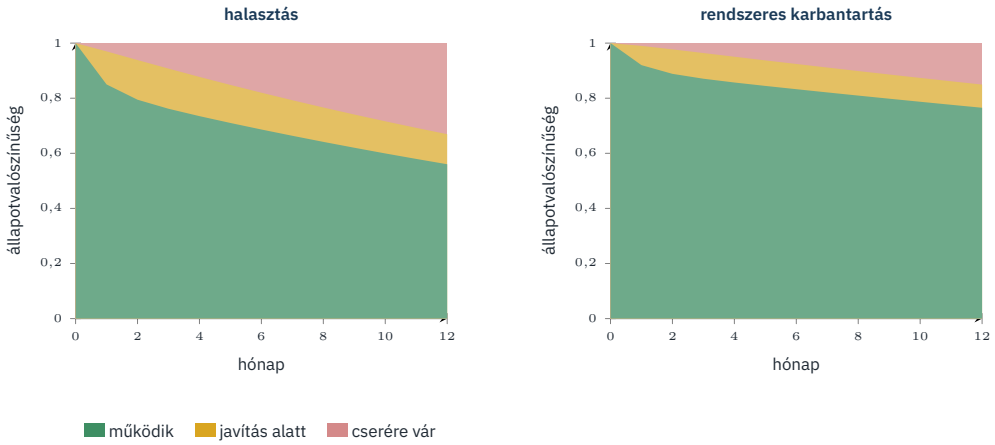
Két hónap múlva tehát 79,5% eséllyel működik a jármű. Tizenkét hónap után a halasztásos politikában már csak 56%, és 33% eséllyel cserére vár (20.2. ábra).



$$P = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}60 & 0{,}35 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sorösszeg: 1; $p(t+1) = p(t)\,P$

20.1. ábra. A jármű háromállapotú Markov-lánca halasztott karbantartás mellett. A cserére váró állapot elnyelő; az átmeneti mátrix minden sorának összege 1.



20.2. ábra. Az állapotvalószínűségek alakulása tizenkét hónapon át, egy működő járműből indulva, halasztott és rendszeres karbantartás mellett.

Próbáld ki: Markov-állapotok

Előbb tippeld meg a két hónap utáni működési valószínűséget. Ezután változtasd az átmeneti valószínűségeket és a kezdőeloszlást, válts a halasztásos és a karbantartásos politika között, és kövesd az állapotok időbeli alakulását és a költséget. Az alkalmazás jelzi, ha egy sor összege nem 1.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h20-markov.html#K17

20.3. Stacionárius állapot, irreducibilitás, periodicitás és elnyelés

Ha egy lánc minden állapotából minden más állapot elérhető (**irreducibilis**), és nem ciklikusan váltakozik (**aperiodikus**), akkor a $p(t)$ eloszlás egy **stacionárius eloszláshoz** π tart, függetlenül a kezdőállapottól. A stacionárius eloszlás a $\pi = \pi P$, $\sum_i \pi_i = 1$ egyenletrendszer megoldása: azt mutatja, hosszú távon az idő mekkora hányadát tölti a rendszer az egyes állapotokban (Norris 1997).

A CASE02 lánca nem irreducibilis, mert a cserére váró állapotból nincs visszaút: ez egy **elnyelő állapot**, és hosszú távon minden jármű ide jut. Ha a modellt kiegészítjük azzal, hogy a csere után egy hónap alatt új, működő jármű érkezik (a cserére váró állapotból 1 valószínűséggel a működőbe lépünk), a lánc irreducibilissá válik. Ennek stacionárius eloszlása $\pi = (0{,}817;\ 0{,}151;\ 0{,}032)$: hosszú távon a szervezetnek az idő 81,7%-ában van működő járműve.

A stacionárius eloszlás *létezése* és a hozzá való *konvergencia* két külön kérdés. A $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ lánc irreducibilis, és stacionárius eloszlása $(0{,}5;\ 0{,}5)$, de az első állapotból indulva az eloszlás hónapról hónapra $(1, 0)$ és $(0, 1)$ között váltakozik, soha nem konvergál. Ez a **periodicitás**. A valóságban ritka a tiszta periodicitás, de egy erősen ciklikus folyamat (például félévente váltakozó terhelés) hasonló viselkedést mutathat.

20.4. Várható időtartam és kumulált költség

Elnyelő láncnál két kérdés különösen fontos: mennyi ideig marad a rendszer az átmeneti állapotokban, és mennyibe kerül ez? Ha Q az átmeneti állapotokra szűkített mátrix, az $N = (I - Q)^{-1}$ **alapmátrix** (i, j) eleme azt adja meg, hány időszakot tölt várhatóan a rendszer a j állapotban, ha az i-ből indul. Az elnyelésig várható idő az alapmátrix sorösszege (Kemeny és Snell 1960).

A CASE02-ben egy működő járműből indulva a cserére szorulásig várható idő halasztott karbantartásnál 30,2 hónap, rendszeres karbantartásnál 72 hónap. A rendszeres karbantartás tehát a jármű várható élettartamát több

mint kétszeresére növeli. Az első tizenkét hónapban a működési arány (rendelkezésre állás) 68,4%-ról 83,1%-ra nő.

A költség az állapotokhoz és az átmenetekhez rendelhető. Ha a karbantartás havonta 40 ezer forintba kerül a működő hónapokban, egy javítási hónap 300 ezer, egy cserére várakozó hónap 500 ezer forintba (pótjármű és elmaradt munka), az első év várható költsége halasztásnál 1,39, karbantartásnál 1,11 millió forint. A karbantartás tehát nemcsak a rendelkezésre állást javítja, hanem olcsóbb is, mert a megelőzött javítások és cserék többet érnek a karbantartás díjánál.

20.5. Várakozási sorok: a születési–halálozási folyamat

Két sor vagy egy közös?

Réka a hallgatói szolgáltatási iroda ügyfélszolgálati csoportját vezeti. Szeptember első heteiben két ablaknál két külön sor kígyózik, és a hallgatók gyakran bosszankodnak, hogy a másik sor gyorsabban halad. Egyik munkatársa azt javasolja, hogy legyen egyetlen közös sor sorszámhúzással, és mindig a szabaddá váló ablakhoz hívják a következő hallgatót. Réka kételkedik: az ablakok és az ügyintézők száma ugyanannyi marad, mitől lenne gyorsabb?

A lényeg: A sorban töltött idő a kihasználtsággal meredeken nő. Ugyanannyi ügyintéző közös sorral lényegesen rövidebb várakozást ad, mert nem fordulhat elő, hogy az egyik ablak üresen áll, miközben a másiknál sorban állnak.

Kérdés: Óránként 16 hallgató érkezik, egy ügyintézés átlagosan 6 percig tart. Mennyi időt tölt átlagosan egy hallgató az irodában két külön sor, és mennyit egy közös sor esetén?

Szemléltető, kitalált helyzet · K36 · Próbáld ki: h20-markov

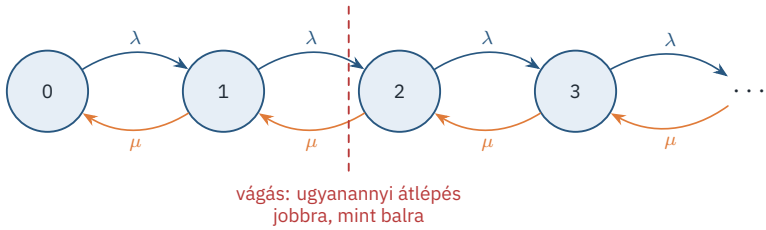
A sorbanállás a mindennapok egyik legismertebb dinamikus jelensége: ügyfélszolgálat, orvosi rendelő, telefonos központ, szerver, gyártósor. A **sorbanállás-elmélet** Agner Krarup Erlang dán mérnök 1909-es, a telefonközpontok forgalmáról szóló munkájával kezdődött (Erlang 1909; Shortle és mtsai. 2018). A modelleket David Kendall jelölésével írjuk le: az $A/S/c$ jelölésben A az érkezések, S a kiszolgálási idők eloszlását, c a kiszolgálók számát jelöli, és az M betű (Markov) a véletlen, emlékezet nélküli érkezésre, illetve az exponenciális kiszolgálási időre utal (Kendall 1953).

A legegyszerűbb, M/M/1 modellben az ügyfelek egymástól függetlenül, óránként átlagosan λ rátával érkeznek, és egyetlen kiszolgáló óránként átlagosan μ ügyfelet szolgál ki. A rendszer állapota a benne lévő ügyfelek száma, $n = 0, 1, 2, \ldots$, és ez folytonos idejű Markov-lánc: érkezéskor n eggyel nő,

távozáskor eggyel csökken (20.3. ábra). Az ilyen láncot **születési–halálozási folyamatnak** nevezzük. Ha a kihasználtság $\rho = \lambda/\mu < 1$, a lánc stacionárius eloszlása az egyensúlyi áramlás elvéből adódik: hosszú távon minden, az n és az $n+1$ állapot közötti vágáson át ugyanannyiszor lép át a lánc jobbra, mint balra, $\pi_n \lambda = \pi_{n+1}\mu$, ezért

$$\pi_n = (1-\rho)\,\rho^n, \qquad L = \frac{\rho}{1-\rho}, \qquad W = \frac{1}{\mu-\lambda}, \tag{20.2}$$

ahol L a rendszerben lévők átlagos száma, W az átlagos rendszerben töltött idő. Ha $\rho \geq 1$, a sor korlátlanul nő, és nincs stacionárius eloszlás.



Az állapot a rendszerben lévő ügyfelek száma: érkezéskor eggyel jobbra, távozáskor eggyel balra lép a lánc. Egyensúlyban minden vágáson át ugyanannyi átmenet történik: $\pi_n\lambda = \pi_{n+1}\mu$, ezért $\pi_n = (1-\rho)\rho^n$, ahol $\rho = \lambda/\mu$.

20.3. ábra. Az M/M/1 várakozási sor születési–halálozási lánca. A stacionárius eloszlás a vágásokon átmenő áramok egyensúlyából adódik.

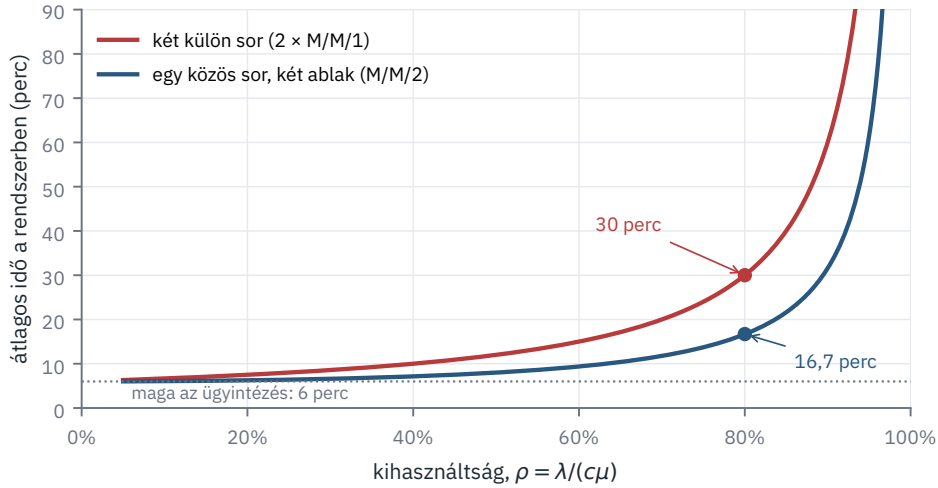
Az L és a W közötti kapcsolat a **Little-törvény**: $L = \lambda W$ (Little 1961). A törvény meglepően általános: bármely stacionárius állapotban lévő rendszerre érvényes, az érkezési és a kiszolgálási idők eloszlásától és a kiszolgálás sorrendjétől függetlenül. Ha egy ügyfélszolgálaton átlagosan nyolc ügy van folyamatban, és óránként négy új érkezik, egy ügy átlagosan két órát tölt a rendszerben; ehhez semmit nem kell tudnunk a részletekről. A termelésirányításban ugyanez az összefüggés köti össze a folyamatban lévő munkát, az átfutási időt és a teljesítményt (Hopp és Spearman 2008).

Több kiszolgálónál (M/M/c) annak esélyét, hogy egy érkezőnek várnia kell, az **Erlang C-képlet** adja, és ebből a többi jellemző is következik:

$$P_{\text{vár}} = \frac{\dfrac{a^c}{c!\,(1-\rho)}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{c-1}\frac{a^k}{k!} + \frac{a^c}{c!\,(1-\rho)}}, \qquad W_q = \frac{P_{\text{vár}}}{c\mu-\lambda}, \qquad W = W_q + \frac{1}{\mu}, \tag{20.3}$$

ahol $a = \lambda/\mu$ a forgalom, $\rho = a/c$ a kihasználtság, W_q pedig a sorban töltött átlagos idő (Shortle és mtsai. 2018).

Réka irodájában óránként 16 hallgató érkezik, egy ügyintézés átlagosan 6 perc ($\mu = 10$ óránként), a két ablak kihasználtsága tehát 80%. Két külön sornál mindkét ablak egy-egy M/M/1 rendszer $\lambda = 8$ rátával: $W = 1/(10 - 8)$ óra, vagyis 30 perc, ebből 24 perc várakozás. Egy közös sornál (M/M/2) a hallgatók 71%-ának kell ugyan várnia, de az átlagos idő csak 16,7 perc (20.4. ábra). A közös sor ugyanazzal a két ügyintézővel csaknem felére csökkenti az átlagos időt, mert soha nem fordul elő, hogy az egyik ablak üresen áll, miközben a másiknál sorban állnak. Ez az **összevonás** (*pooling*) hatása, amely a bankok, a repülőterek és az ügyfélszolgálatok közös sorainak elméleti alapja. Egy harmadik ügyintéző beállítása (M/M/3) az átlagos időt 7,2 percre csökkentené, amiből alig több mint egy perc a várakozás. Ha a forgalom óránként 18 hallgatóra, a kihasználtság 90%-ra nő, a külön sorok átlagos ideje 60, a közös soré 32 percre emelkedik: a 19.4.1. szakaszban leírt nemlinearitás itt számszerűen is látszik.



20.4. ábra. Az átlagos rendszerben töltött idő a kihasználtság függvényében, két ügyintézővel. A közös sor minden kihasználtságnál rövidebb időt ad, a különbség a terhelés növekedésével egyre nagyobb.

A várakozást nemcsak a kihasználtság, hanem a **változékonyság** is növeli. John Kingman közelítő képlete szerint egyetlen kiszolgálónál

$$W_q \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot t_s, \tag{20.4}$$

ahol t_s az átlagos kiszolgálási idő, c_a és c_s pedig az érkezési időközök, illetve a kiszolgálási idők relatív szórása (szórás osztva az átlaggal) (Kingman 1961; Hopp és Spearman 2008). Exponenciális időknél $c_a = c_s = 1$, és a képlet az M/M/1 modell pontos eredményét adja. A három tényező három beavatkozási lehetőséget jelent: a kihasználtság csökkentését (több kapacitás), a változékonyság csökkentését (szabványosított ügyintézés, időpontfoglalás,

amely az érkezéseket is egyenletesebbé teszi) és a kiszolgálási idő rövidítését. Ha egy 80%-os kihasználtságú, 6 perces átlagos ügyintézésű ablaknál az ügyintézési idő relatív szórását a felére csökkentjük, a várakozás 24 percről kb. 15 percre rövidül, egyetlen új munkatárs nélkül. A hat szigma szóráscsökkentő gondolata (16.6. szakasz) itt a szolgáltatásban tér vissza.

A teljes kihasználtság nem cél

Egy kiszolgáló rendszerben a magas kihasználtság hatékonynak látszik, de véletlen érkezések mellett a várakozás $\rho \to 1$ esetén minden határon túl nő. Az a vezetői cél, hogy „senki ne álljon üresen”, sorbanállási rendszerben szükségképpen hosszú várakozást jelent. A tartalék kapacitás nem pazarlás, hanem a változékonyság ára; a kérdés az, mennyit ér a várakozási idő csökkenése az ügyfeleknek és a szervezetnek.

Próbáld ki: várakozási sorok

Előbb tippeld meg, mennyi időt tölt egy hallgató az irodában két külön sor esetén. Ezután változtasd az érkezési és a kiszolgálási rátát, az ablakok számát és a sorszervezést: az alkalmazás animált szimulációval mutatja a sorok alakulását, és összeveti a mért átlagos időt az Erlang-képletekkel.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h20-markov.html#K36

M/M/1 és M/M/c sor, Little-törvény és szimuláció

Az `mmc` függvény az Erlang C-képletet (20.3) számolja; a szimuláció érkezésenként a leghamarabb felszabaduló ablakhoz rendeli az ügyfelet, ami egy közös, érkezési sorrendben haladó sornak felel meg.

```
import math
import numpy as np

def mmc(lam, mu, c):
    """M/M/c sor: a várakozás esélye (Erlang C), Wq és W."""
    a, rho = lam / mu, lam / (c * mu)
    if rho >= 1:
        return 1.0, math.inf, math.inf    # a sor korlátlanul nő
    tag = sum(a**k / math.factorial(k) for k in range(c))
    utolso = a**c / math.factorial(c) / (1 - rho)
    p_var = utolso / (tag + utolso)
    wq = p_var / (c * mu - lam)
    return p_var, wq, wq + 1 / mu

mu = 10.0              # ügyintézőnként 10 hallgató óránként
for lam in [12, 16, 18]:
    w1 = mmc(lam / 2, mu, 1)[2]         # két külön sor
    p2, _, w2 = mmc(lam, mu, 2)         # egy közös sor
    w3 = mmc(lam, mu, 3)[2]             # három ablak
    print(f"lambda = {lam}/óra: külön {60 * w1:4.1f} perc, "
          f"közös {60 * w2:4.1f} perc (vár: {p2:.0%}), "
          f"három ablak {60 * w3:4.1f} perc")

# Little-törvény: L = lambda * W
_, wq, w = mmc(16, mu, 2)
print(f"L = {16 * w:.2f} hallgató a rendszerben, "
      f"Lq = {16 * wq:.2f} a sorban")

# Ellenőrzés eseményvezérelt szimulációval
def szimulal(lam, mu, c, n=100_000, mag=1):
    rng = np.random.default_rng(mag)
    erkezes = np.cumsum(rng.exponential(1 / lam, n))
    kiszolg = rng.exponential(1 / mu, n)
    szabad = np.zeros(c)        # mikor szabadul fel az ablak
    ido = np.empty(n)
    for i in range(n):
        j = np.argmin(szabad)   # a leghamarabb szabaduló ablak
        kezd = max(erkezes[i], szabad[j])
        szabad[j] = kezd + kiszolg[i]
        ido[i] = szabad[j] - erkezes[i]
    return ido.mean()

for nev, lam, c in [("közös sor", 16, 2), ("külön sor", 8, 1)]:
    print(f"szimuláció, {nev}: "
          f"{60 * szimulal(lam, mu, c):.1f} perc")

# Kingman-közelítés: a változékonyság hatása egy ablaknál
ts, rho = 6.0, 0.8                    # perc, kihasználtság
for cs in [1.0, 0.5]:
    wq = (1 + cs**2) / 2 * rho / (1 - rho) * ts
    print(f"kiszolgálási idő relatív szórása {cs}: "
          f"Wq = {wq:.0f} perc")
```

A futás eredménye: 16 hallgató/óra mellett külön sorokkal 30,0, közös sorral 16,7, három ablakkal 7,2 perc az átlagos idő; 18 hallgató/óránál 60,0 és 31,6 perc. A közös sornál $L = 4{,}44$ és $L_q = 2{,}84$. A szimuláció 16,8, illetve 30,3 percet ad. A Kingman-közelítés szerint a fele akkora relatív szórás a várakozást 24-ről 15 percre csökkenti.

20.6. Cselekvésfüggő átmenet és a Markov-döntési folyamat

A két politika összevetése egy általánosabb gondolat legegyszerűbb esete. Egy **Markov-döntési folyamatban** (*Markov decision process*, MDP) minden állapotban a döntéshozó választ egy cselekvést, és a cselekvés határozza meg az átmeneti valószínűségeket és a költséget (Puterman 1994). A cél egy **politika**: egy szabály, amely minden állapothoz megmondja, melyik cselekvést válasszuk, úgy, hogy a hosszú távú várható költség a legkisebb legyen.

A CASE02-ben a politika lehetne állapotfüggő is: például csak akkor végezzünk karbantartást, ha a jármű egy javításból tér vissza. Az optimális politikát a dinamikus programozás eszközeivel (értékiteráció, politikaiteráció) lehet kiszámítani; ezek a könyv kereteit meghaladják, a Döntési műhely egy kis, kétállapotú példán mutatja be őket. A gondolat a 14. fejezet döntési fáinak ismétlődő változata: minden időszakban egy döntés és egy véletlen esemény követi egymást.

A Markov-feltevés és a konvergencia határai

Két gyakori hiba van. Az egyik, hogy a múltfüggést elhanyagoljuk, mert az állapotok elnevezése ezt elfedi: ha a meghibásodás esélye az életkorral nő, egy állandó átmeneti mátrix alábecsüli a későbbi meghibásodásokat. A másik, hogy a stacionárius eloszlást a rövid távú viselkedésre alkalmazzuk: a stacionárius eloszlás csak hosszú távon érvényes, és egy elnyelő állapotos láncban nem is értelmezhető a megszokott módon.

Átviteli példa: tanulási állapotok (CASE05)

Egy online kurzus résztvevői hetente három állapot egyikében vannak: aktívan tanulnak, szüneteltetnek, vagy befejezték (illetve feladták). Az átmenetek a heti aktivitásból becsülhetők. A lánc megmutatja, hány hét alatt fejezi be várhatóan egy résztvevő a kurzust, és melyik átmenet javítása (például a szüneteltetőkhöz küldött emlékeztető) segítene a legtöbbet. A Markov-feltevés itt is kérdéses: aki már kétszer szüneteltetett, valószínűleg nagyobb eséllyel adja fel, ezért az állapotot érdemes a szüneteltetések számával bővíteni.

Összefoglalás

- A Markov-lánc állapotokkal és átmeneti valószínűségekkel írja le a rendszert; a Markov-feltevés szerint a jövő csak a jelen állapottól függ.
- Az átmeneti mátrix minden sorának összege 1; sorvektor-konvencióval $p(t+1) = p(t)P$.
- A CASE02 járműve két hónap után 79,5%, egy év után 56% eséllyel működik halasztott karbantartás mellett.
- Irreducibilis, aperiodikus láncnál az eloszlás a stacionárius eloszláshoz tart; a létezés és a konvergencia külön kérdés, a periodikus lánc nem konvergál.
- Az elnyelő láncban az alapmátrix adja az állapotokban töltött várható időt; a rendszeres karbantartás a cseréig várható időt 30-ról 72 hónapra növeli, és az első év költségét is csökkenti.
- A várakozási sor születési–halálozási folyamat; az M/M/1 sorban $W = 1/(\mu - \lambda)$, a Little-törvény szerint $L = \lambda W$. Ugyanannyi kiszolgálóval a közös sor rövidebb várakozást ad, a várakozás pedig a kihasználtsággal és a változékonysággal meredeken nő.
- A Markov-döntési folyamatban a cselekvés határozza meg az átmeneteket; a cél egy hosszú távon optimális politika.

Önellenőrzés

1. Mit jelent a Markov-feltevés, és mikor sérül egy járműmodellben?
2. Számold ki a karbantartásos politikában a két hónap utáni eloszlást egy működő járműből indulva!
3. Miért nem irreducibilis a CASE02 eredeti lánca, és hogyan lehet azzá tenni?
4. Egy kétállapotú lánc: $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Mekkora a stacionárius eloszlása?
5. Egy elemző a stacionárius eloszlás alapján azt állítja, hogy az első hónapban a jármű 82%-ban működik. Mi a hiba?
6. Egy ügyfélszolgálaton óránként 6 hívás érkezik, egy hívás átlagosan 8 percig tart, és egy munkatárs dolgozik. Mekkora a kihasználtság, az átlagos rendszerben töltött idő és a rendszerben lévő hívások átlagos száma (M/M/1)?
7. Egy irodában átlagosan 12 ügy van folyamatban, és hetente 30 új érkezik. Mennyi ideig tart átlagosan egy ügy?
8. Miért rövidíti a közös sor az átlagos várakozást, ha az ügyintézők száma nem változik?

Megoldás.

1. Hogy a következő állapot csak a jelenlegitől függ, a múlttól nem. Sérül, ha például a meghibásodás esélye az életkortól vagy a korábbi javítások számától függ.
2. $p(1) = (0{,}92;\ 0{,}07;\ 0{,}01)$; $p(2) = (0{,}92\cdot 0{,}92 + 0{,}07\cdot 0{,}60;\ 0{,}92\cdot 0{,}07 + 0{,}07\cdot 0{,}35;\ 0{,}92\cdot 0{,}01 + 0{,}07\cdot 0{,}05 + 0{,}01) = (0{,}8884;\ 0{,}0889;\ 0{,}0227)$.
3. Mert a cserére váró állapotból nincs visszaút (elnyelő). Ha a csere után új, működő jármű érkezik, vagyis a cserére váró állapotból átmenet vezet a működőbe, minden állapot elérhetővé válik minden másikból.
4. $\pi_1 = 0{,}9\pi_1 + 0{,}5\pi_2$, amiből $0{,}1\pi_1 = 0{,}5\pi_2$, $\pi_1 = 5\pi_2$; $\pi_1 + \pi_2 = 1$ miatt $\pi = (5/6;\ 1/6) \approx (0{,}833;\ 0{,}167)$.

5. A stacionárius eloszlás hosszú távú arány; az első hónapban az eloszlást a kezdőállapot és az átmeneti mátrix első sora határozza meg (működő járműből indulva 85%). Ráadásul az eredeti elnyelő láncra a stacionárius eloszlás nem is ez.
6. $\mu = 60/8 = 7{,}5$ hívás óránként, $\rho = 6/7{,}5 = 0{,}8$; $W = 1/(7{,}5 - 6) \approx 0{,}667$ óra, azaz 40 perc; $L = \lambda W = 6 \cdot 0{,}667 = 4$ hívás.
7. A Little-törvény szerint $W = L/\lambda = 12/30 = 0{,}4$ hét, ötnapos munkahéttel két munkanap.
8. Külön sorok esetén előfordul, hogy az egyik ügyintéző tétlen, miközben a másiknál sorban állnak; a közös sorban ez nem fordulhat elő, ezért a kapacitás jobban kihasználódik, és a véletlen ingadozások kiegyenlítik egymást (összevonási hatás).

Továbbolvasás

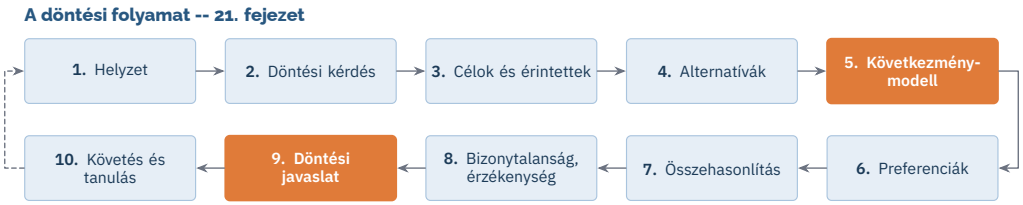
- Kemeny, J. G., Snell, J. L. (1960): *Finite Markov Chains* – az alapmátrix és az elnyelő láncok (Kemeny és Snell 1960).
- Norris, J. R. (1997): *Markov Chains* – a stacionárius eloszlás, az irreducibilitás és a periodicitás (Norris 1997).
- Erlang, A. K. (1909); Kendall, D. G. (1953); Shortle, J. F. és mtsai (2018): *Fundamentals of Queueing Theory* – a sorbanállás-elmélet alapjai, az M/M/1 és az M/M/c modell (Erlang 1909; Kendall 1953; Shortle és mtsai. 2018).
- Little, J. D. C. (1961); Kingman, J. F. C. (1961); Hopp, W. J., Spearman, M. L. (2008): *Factory Physics* – a Little-törvény, a változékonyság szerepe és a termelési rendszerek törvényszerűségei (Little 1961; Kingman 1961; Hopp és Spearman 2008).
- Puterman, M. L. (1994): *Markov Decision Processes* (Puterman 1994).
- Page, S. E. (2018): *The Model Thinker* – a Markov-modellek szerepe a döntésekben (Page 2018).

Gyakorlat

A Döntési műhely 20. műhelyében a Markov-alkalmazással (H20) állapottáblát, állapotpályát és két cselekvési politika összevetését készítheted el, a sorbanállási nézetben pedig szimulációval és az Erlang-képletekkel vetheted össze a külön és a közös sort. Az E20 munkafüzet és az N20 notebook a sorvektor-konvenciót használja, ellenőrzi a sorösszegeket, és egy periodikus ellenpéldát is tartalmaz.

21.

Fordulópontok, diffúzió és útfüggőség



Melyik lépéstől kezd el terjedni?

Petra hónapok óta népszerűsíti a falu új telekocsi-alkalmazását, de alig valaki használja. Aztán beszáll a sportegyesület népszerű edzője, és egy hét alatt több tucatnyian regisztrálnak. Petra azt próbálja megérteni, mi változott valójában.
A lényeg: A terjedés ütemét a kapcsolatok, az elfogadási küszöbök és a korábbi lépések együtt alakíthatják.
Kérdés: Melyik felhasználói kör csatlakozását segítenéd elő a következő beavatkozással?
Szemléltető, kitalált helyzet · F21 · Próbáld ki: h21-terjedes

Egy új szolgáltatás, technológia vagy gyakorlat elterjedése ritkán egyenletes. Hosszú, lassú kezdet után hirtelen gyorsulás jöhet, majd telítődés; máskor egy ígéretes kezdet elakad. Ugyanaz a termék két piacon egészen különböző pályát futhat be attól függően, kik csatlakoztak először. Ez a fejezet a terjedés modelljeit mutatja be: a kontaktuson alapuló diffúziót, az elfogadási küszöböket, a fordulópontokat és az útfüggőséget. A modellek közös tanulsága, hogy a korai lépéseknek és a kapcsolatok szerkezetének aránytalanul nagy hatása lehet a végeredményre (Page 2018; Rogers 2003).

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- megkülönböztetni a gyors növekedést a valódi rezsimváltástól (fordulóponttól);
- leírni a kontaktuson alapuló terjedést (diffúzió, SIS- és SIR-modell), az alap reprodukciós számot és a perkoláció küszöbét;
- megmagyarázni az egyéni elfogadási küszöbök, a láthatóság és a társas hatás szerepét egy kaszkádban, és elkülöníteni a társas hatást a szelekciótól;
- elkülöníteni az elfogadói csoportok üzleti keretét a formális diffúziós modelltől;
- a Pólya-urna példáján megmutatni a megerősítést és a bezáródást;
- korai jelzőszámokat és egy kísérletet javasolni a kritikus feltevés mérésére.

A fejezet a perkolációval és a kontaktuson alapuló terjedéssel kezd. Ezután az egyszerű diffúziót, a SIS- és a SIR-modellt, majd az elfogadási küszöböket és az álló ováció modelljét tárgyalja. A negyedik szakasz az elfogadói csoportok és a szakadék keretét, az ötödik a Pólya-urnát és a bezáródást mutatja be. A fejezet a bevezetési stratégiával és a korai jelzőszámokkal zárul.

CASE07 – Digitális szolgáltatás bevezetése

Az egyetem a vállalati képzéshez egy online gyakorló- és mentorplatformot indít. A célközönség néhány ezer szakember a régió cégeinél. A felhasználók egy része akkor csatlakozik, ha a kollégái közül már néhányan használják, más részük akkor, ha a szakmai közösségük ismert alakjai ajánlják. A csapat azt mérlegeli, kiket érdemes elsőként megnyerni. A számértékek szemléltetők.

21.1. Perkoláció, kontaktus és terjedés

Mikor ér át a terjedés az egész hálózaton?

Egy erdőben a tűz fáról fára terjed. Ha a fák ritkák, a tűz hamar kialszik; ha sűrűk, végigsöpör az erdőn. Egy szűk tartományban egy kis sűrűségváltozás eldönti, melyik történik.
A lényeg: A hálózaton való terjedésnek gyakran éles küszöbe van: alatta helyi marad, fölötte az egész rendszert eléri.
Kérdés: Szerinted hol van a küszöb: a fák fele, kétharmada vagy háromnegyede kell az átéréshez?
Szemléltető, kitalált helyzet · K18 · Próbáld ki: h21-terjedes

A **perkolációelmélet** azt vizsgálja, mikor alakul ki egy rácson vagy hálózaton összefüggő út egyik oldalról a másikra, ha az elemek (csomópontok vagy élek) véletlenszerűen, p valószínűséggel „nyitottak” (Stauffer és Aharony 1994). A meglepő eredmény, hogy van egy **kritikus valószínűség** p_c, amely alatt

a nyitott elemek kis, elszigetelt csoportokat alkotnak, fölötte pedig hirtelen kialakul egy az egész rendszert átfogó összefüggő csoport. Egy négyzetrácson, ahol a csomópontok nyitottak, $p_c \approx 0{,}593$. A küszöb közelében egy kis változás drámai hatású: ez a **fordulópont** (*tipping point*) egyik pontos jelentése.

Page hangsúlyozza, hogy a fordulópontot meg kell különböztetni a gyors, de folytonos növekedéstől (Page 2018). Egy exponenciális vagy logisztikus görbe (19.8. szakasz) gyorsuló szakasza nem fordulópont: a rendszer állapota folytonosan, előre jelezhetően változik. A valódi fordulópontnál egy paraméter kis változása a rendszert egy másik **rezsimbe** viszi (helyi helyett átfogó terjedés, elakadás helyett kaszkád).

Próbáld ki: terjedés és megerősítés

Előbb tippeld meg a perkoláció küszöbét. Ezután a perkolációs nézetben változtasd a sűrűséget, és figyeld, mikor ér át a terjedés; a SIS-nézetben a fertőzési és a gyógyulási rátát; a küszöbnézetben az egyéni elfogadási küszöböket; az urnanézetben pedig indíts több futást ugyanazzal a beállítással.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h21-terjedes.html#K18

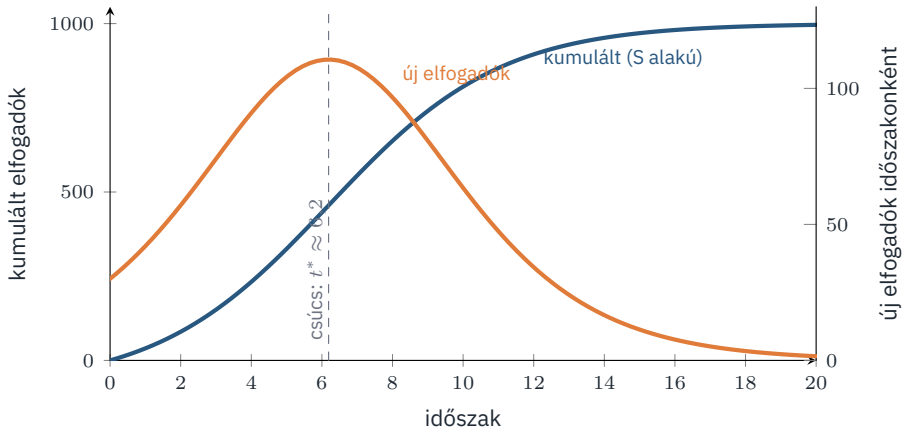
21.2. Egyszerű diffúzió és a SIS-modell

Az innovációk terjedésének legismertebb formális modellje Frank Bass modellje (Bass 1969). Eszerint a még nem elfogadók két okból csatlakoznak: egy külső hatás (hirdetés, ajánlat) miatt p rátával, és a már elfogadókkal való kapcsolat miatt q rátával, arányosan az elfogadók arányával. A kumulált elfogadók aránya $F(t)$ egy S alakú görbe, az időszakonkénti új elfogadók száma pedig egy harang alakú görbe, amelynek csúcsa a $t^* = \ln(q/p)/(p+q)$ időpontban van (21.1. ábra).

21.2.1. Elfogadói csoportok és terjedési mechanizmus

Hirdetés vagy szájhagyomány hajtja?

Két szolgáltatás ugyanannyi felhasználót ér el egy év alatt. Az egyiknél az első hónapban sokan csatlakoznak a hirdetés miatt, aztán lassul; a másiknál lassan indul, de a felhasználók egymást hívják, és felgyorsul.
A lényeg: A terjedés ütemét a külső hatás és a felhasználók közötti kapcsolat aránya határozza meg; a kettő más görbét és más beavatkozást kíván.
Kérdés: Ha a szolgáltatásod lassan indul, hirdetésre vagy ajánlási programra költenél?
Szemléltető, kitalált helyzet · D40b · Próbáld ki: h21-terjedes



21.1. ábra. A Bass-diffúziós modell $p = 0{,}03$, $q = 0{,}38$ és 1000 fős potenciális piac mellett: kumulált (S alakú) és új (harang alakú) elfogadók. Az új elfogadók száma a 6,2. időszakban tetőzik.

A Bass-modell két paramétere két különböző beavatkozást sugall. Ha p (a külső hatás) a meghatározó, a hirdetés és a közvetlen megkeresés gyorsít. Ha q (az utánzás) a meghatározó, az ajánlási programok, a közösségi jelenlét és a korai elfogadók láthatósága hatékonyabb. A **SIS-modell** (*susceptible–infected–susceptible*) a járványtanból ismert változat, amelyben az elfogadók egy idő után fel is hagyhatnak a használattal: az elfogadók aránya akkor marad fenn tartósan, ha a terjedési ráta és a felhagyási ráta aránya meghalad egy küszöböt, különben a használat kihal (Pastor-Satorras és mtsai. 2015). Egy előfizetéses szolgáltatásnál ez a lemorzsolódás szerepére figyelmeztet: hiába a gyors terjedés, ha a felhasználók gyorsabban hagyják el, mint ahogy újak érkeznek.

A járványtan klasszikus modellje, a **SIR-modell** (*susceptible–infected–recovered*) William Kermack és Anderson McKendrick 1927-es munkájára megy vissza (Kermack és McKendrick 1927). A népesség fogékony (S), fertőző (I) és már nem fertőző, védett (R) részre oszlik; egy fertőző β rátával adja tovább a fertőzést a fogékonyaknak, és γ rátával gyógyul meg:

$$\dot{S} = -\beta S I, \qquad \dot{I} = \beta S I - \gamma I, \qquad \dot{R} = \gamma I. \tag{21.1}$$

A kulcsmennyiség az **alap reprodukciós szám**, $R_0 = \beta/\gamma$: ennyi új esetet okoz egy fertőző egy teljesen fogékony népességben. Ha $R_0 < 1$, a terjedés elhal; ha $R_0 > 1$, járvány tör ki. Ez a perkolációhoz hasonló küszöb: $R_0 = 1$ körül egy kis változás dönti el, helyi marad-e a terjedés. A járvány akkor kezd lecsengeni, amikor a fogékonyak aránya $1/R_0$ alá esik, ezért a **nyájimmunitás** küszöbe $1 - 1/R_0$, $R_0 = 2{,}5$ mellett 60%. A modell kevésbé ismert következménye, hogy a járvány nem fertőz meg mindenkit: a végül megfertőződöttek z aránya a $z = 1 - e^{-R_0 z}$ egyenlet megoldása, $R_0 = 2{,}5$-nél 89%, $R_0 = 1{,}5$-nél 58%, a csúcson pedig egyszerre 23%, illetve 6% fertőző.

A beavatkozások (távolságtartás, oltás, egy hír esetén a forrás ellenőrzése) a tényleges reprodukciós számot szorítják le: egy járvány vagy egy álhír terjedésének megfékezéséhez nem kell mindenkit elérni, elég a terjedést a küszöb alá vinni (Pastor-Satorras és mtsai. 2015).

SIR-modell: csúcs, végső méret és nyájimmunitás

A differenciálegyenlet-rendszert a `solve_ivp` numerikusan oldja meg; a végső méretet a $z = 1 - e^{-R_0 z}$ egyenlet gyöke is megadja, a kettőnek egyeznie kell.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.optimize import brentq

def sir(t, y, beta, gamma):
    S, I, R = y
    return [-beta * S * I, beta * S * I - gamma * I, gamma * I]

gamma = 0.2                       # átlagosan 5 napig fertőző
for R0 in [1.5, 2.5]:
    meg = solve_ivp(sir, (0, 400), [0.999, 0.001, 0.0],
                    args=(R0 * gamma, gamma), max_step=0.5)
    S, I, R = meg.y
    z = brentq(lambda z: z - (1 - np.exp(-R0 * z)), 1e-6, 1)
    print(f"R0 = {R0}: csúcs {I.max():.1%} a "
          f"{meg.t[I.argmax()]:.0f}. napon; végül {R[-1]:.1%} "
          f"(egyenletből {z:.1%}); nyájimmunitás {1 - 1/R0:.0%}")
```

A futás eredménye: $R_0 = 1{,}5$-nél a csúcs 6,4% az 57. napon, végül a népesség 58,4%-a fertőződik meg (az egyenlet szerint 58,3%), a nyájimmunitás küszöbe 33%; $R_0 = 2{,}5$-nél a csúcs 23,4% a 24. napon, a végső arány 89,3%, a küszöb 60%.

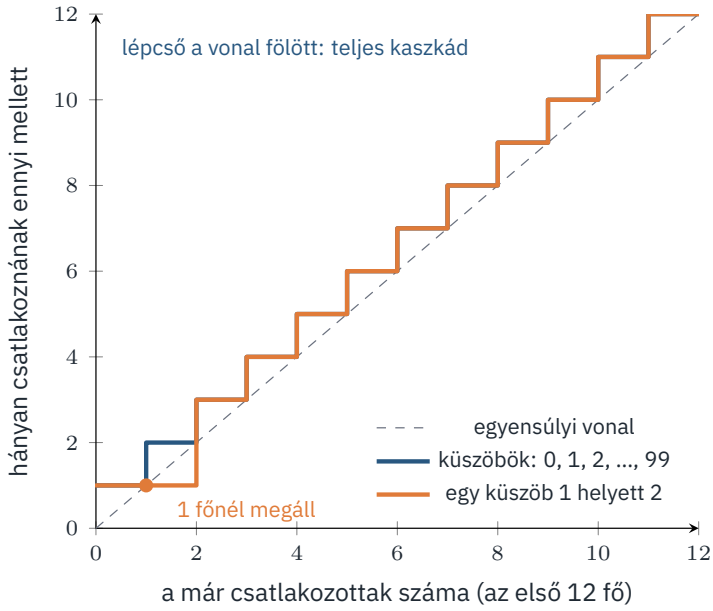
Próbáld ki: diffúziós görbék

Változtasd a külső hatás és az utánzás paraméterét, és figyeld meg külön görbén a napi új és a kumulált elfogadókat. Keresd meg azt a beállítást, amelynél a csúcs a leghamarabb jön.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h21-terjedes.html#D40b

21.3. Elfogadási küszöbök és társas hatások

Mark Granovetter **küszöbmodellje** szerint minden ember egy saját küszöbbel rendelkezik: akkor csatlakozik egy kollektív cselekvéshez, ha a már csatlakozottak száma eléri a küszöbét (Granovetter 1978). A modell híres gondolatkísérlete egy száz fős csoport, amelynek tagjai 0, 1, 2, …, 99 küszöbbel rendelkeznek. Az első (0-s küszöbű) mindenképp csatlakozik, ez elindítja az 1-es küszöbűt, és így tovább: végül mindenki csatlakozik. Ha azonban egyetlen embernek a küszöbe

1 helyett 2, a kaszkád az első ember után megáll, mert senki sem csatlakozik, ha csak egy ember van (21.2. ábra).



21.2. ábra. A Granovetter-féle küszöbmodell. A kék lépcső (küszöbök 0, 1, 2, ...) végig a vonal fölött marad: teljes kaszkád. A narancs lépcsőben egyetlen küszöb 1 helyett 2, a lépcső 1-nél eléri a vonalat, és a kaszkád megáll.

A két csoport átlagos küszöbe szinte azonos, a kimenetel mégis gyökeresen eltér. A tanulság kettős. Az egyéni preferenciák *eloszlása* és nem az átlaga dönti el a kollektív eredményt. Ráadásul egy kis változás a küszöbök eloszlásában fordulópontot okozhat. A CASE07-ben ez azt jelenti, hogy nem elég az átlagos felhasználót meggyőzni: a terjedés azon múlik, vannak-e elég alacsony küszöbű felhasználók minden lépcsőfokon, és ha valahol hiányzik egy fok, azt célzott beavatkozással (például egy kísérleti csoport bevonásával) lehet pótolni.

21.3.1. Álló ováció: láthatóság és társas hatás

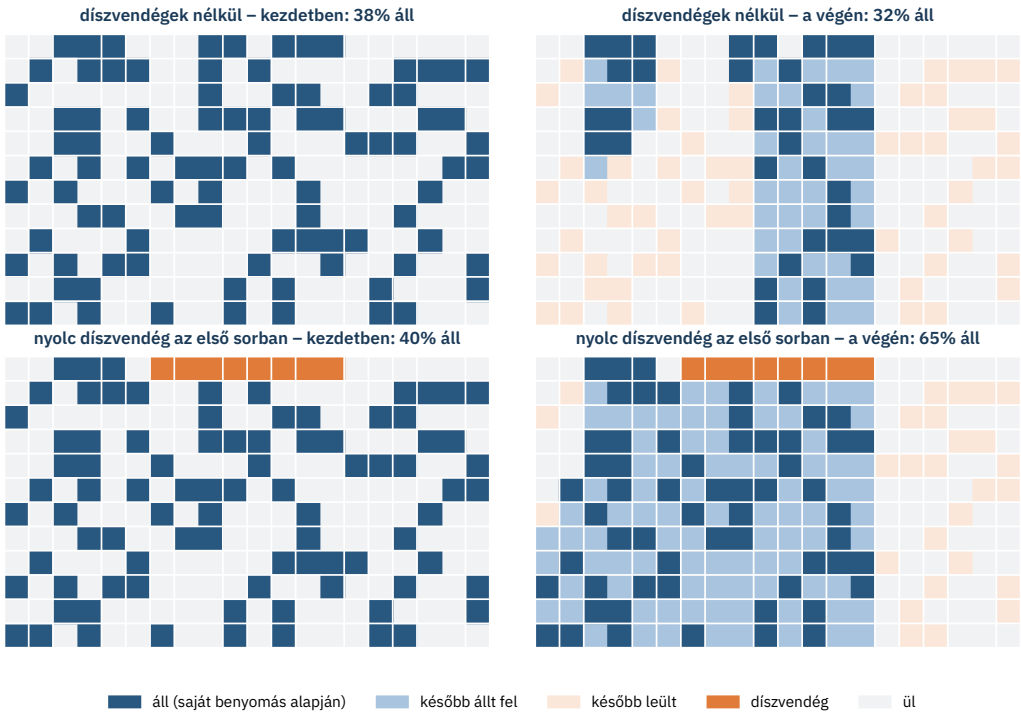
Kik döntik el, hogy feláll-e a közönség?

Panni egy bemutató végén lelkesen tapsol, de ülve marad: az előadás jó volt, nem kiemelkedő. Az első sor közepén néhányan felállnak, aztán egyre többen a mögöttük ülők közül; fél perc múlva Panni is áll. Hazafelé a villamoson azon gondolkodik, hogy tulajdonképpen mikor döntött így, és vajon egy másik estén, ugyanettől az előadástól is felállt volna-e.
A lényeg: A társas kaszkád nemcsak a küszöbökön, hanem azon is múlik, ki kit lát. Akit sokan látnak, annak a döntése aránytalanul sokat számít; ugyanaz az előadás a nézők elhelyezkedésétől függően kaphat álló ovációt vagy maradhat langyos.
Kérdés: Mi befolyásolja jobban, hogy kialakul-e álló ováció: az előadás minősége vagy az, hogy kik ülnek elöl?
Szemléltető, kitalált helyzet · K37 · Próbáld ki: h21-terjedes

John Miller és Scott Page **álló ováció** modellje a küszöbmodellt térbe helyezi (Miller és Page 2004). Minden néző saját benyomást szerez az előadásról (a minőség plusz egyéni zaj), és feláll, ha ez egy küszöböt meghalad. Ezután mindenki körülnéz: ha az általa látott nézők többsége áll, ő is feláll, ha többségük ül, leül. A nézők az előttük ülők egy kúp alakú csoportját látják, így a modell két jelenséget is láthatóvá tesz. Az egyik az információ aszimmetriája: az elöl ülők senkit sem látnak, őket viszont mindenki látja, ezért a döntésük aránytalanul sokat számít. A másik, hogy a végeredmény nemcsak az előadás minőségén, hanem a nézők elhelyezkedésén és a láthatóság szerkezetén is múlik.

Egy 12 soros, soronként 20 fős nézőtéren a nézők benyomása a 0,55-ös minőség körül 0,15 szórással ingadozik, és aki 0,6 fölötti benyomást szerez, azonnal feláll; ez a nézők 36%-a. Ha mindenki a legfeljebb négy sorral előtte ülők többségét követi, negyven véletlen közönség átlagában a végén 32% áll: az ováció elhal. Ha viszont az első sor közepén nyolc díszvendég azonnal feláll – a közönség mindössze 4%-a –, a végén átlagosan 66% áll (21.3. ábra). Ugyanaz az előadás, ugyanazok a nézők, csak a láthatóság szerkezete más.

A modell egy módszertani csapdára is figyelmeztet, amelyet Page az **azonosítási problémának** nevez (Page 2018): ha az adatokban az egymás mellett ülők együtt állnak fel, ez lehet társas hatás (egymást követik), de lehet **szelekció** is (a lelkes rajongók eleve együtt ültek). A két mechanizmus ugyanazt a mintázatot adja, de más beavatkozást kíván; elválasztásukhoz kísérlet vagy időben rendezett, egyéni szintű adat kell (18.5. szakasz). A CASE07-ben ez azt jelenti, hogy ha egy-egy csapatban mindenki használja a platformot, nem biztos, hogy egymást győzték meg: lehet, hogy a digitálisan nyitottabb kollégák eleve egy csapatba kerültek.



21.3. ábra. Az álló ováció modellje egy 12 × 20-as nézőtéren (fent a színpad). Bal oldalon a nézők saját benyomás alapján hozott első döntése, jobb oldalon a végállapot, miután mindenki az előtte látottak többségét követte. Felső sor: díszvendégek nélkül; alsó sor: ugyanaz a közönség, de az első sor közepén nyolc díszvendég azonnal feláll.

Próbáld ki: álló ováció

Előbb tippeld meg, mi számít többet: a minőség vagy az, hogy kik ülnek elöl. Ezután indíts tapsot különböző minőségek, küszöbök és látótávolságok mellett, ültess díszvendégeket az első sorba, és futtass negyven véletlen közönséget egyszerre: az alkalmazás összeveti a kezdeti és a végső állók arányát.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h21-terjedes.html#K37

Az álló ováció modellje

Minden néző a legfeljebb `mely` sorral előtte ülők kúp alakú csoportját látja (soronként egy-egy széksorral szélesebben), és a többséghez igazodik. A kód negyven véletlen közönségen hasonlítja össze a díszvendégek nélküli és a díszvendégekkel induló estét.

```
import numpy as np

def ovacio(q, vip=0, sorok=12, oszl=20, sd=0.15, kuszob=0.6,
           mely=4, mag=0):
    """Álló ováció; a 0. sor van a színpadnál. A kezdeti és a
    végső állók arányát adja vissza."""
    rng = np.random.default_rng(mag)
    benyomas = q + sd * rng.standard_normal((sorok, oszl))
    all_ = benyomas > kuszob
    if vip:                           # díszvendégek az első sorban
        k = (oszl - vip) // 2
        all_[0, k:k + vip] = True
    kezdo = all_.mean()
    for _ in range(50):
        uj = all_.copy()
        for r in range(1, sorok):
            for c in range(oszl):
                # látott nézők: legfeljebb `mely` sorral előrébb,
                # soronként eggyel szélesebb kúpban
                latott = [all_[rr, cc]
                          for rr in range(max(0, r - mely), r)
                          for cc in range(oszl)
                          if abs(cc - c) <= r - rr]
                arany = np.mean(latott)
                if arany > 0.5:
                    uj[r, c] = True
                elif arany < 0.5:
                    uj[r, c] = False
        if (uj == all_).all():
            break
        all_ = uj
    return kezdo, all_.mean()

for vip in [0, 8]:
    e = np.array([ovacio(0.55, vip, mag=m) for m in range(40)])
    print(f"{vip} díszvendég: kezdetben {e[:, 0].mean():.0%}, "
          f"a végén {e[:, 1].mean():.0%} áll")
```

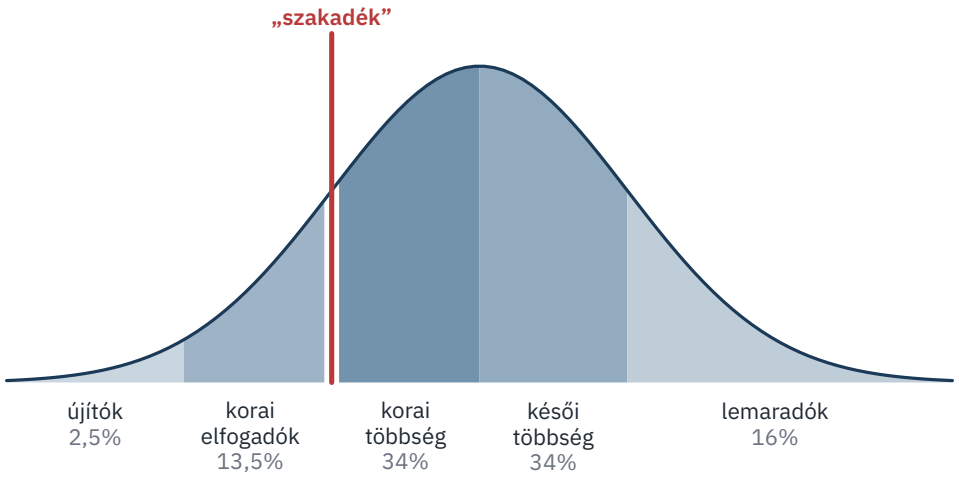
A futás eredménye: díszvendégek nélkül a nézők 36%-a áll fel elsőre, a végén 32% áll; nyolc díszvendéggel kezdetben 38%, a végén 66%.

21.4. A szakadékmodell és a célcsoportok

Miért akad el a jól induló termék?

A szolgáltatást a lelkes korai felhasználók imádják. A szélesebb kör mégsem csatlakozik, mert ők bevált, kiszámítható megoldást keresnek, nem újdonságot.
A lényeg: Az elfogadói csoportok eltérő igényeket támasztanak, és a korai sikert nem lehet automatikusan kiterjeszteni a többségre.
Kérdés: Mire lenne szüksége a kiszámíthatóságot kereső többségnek a te szolgáltatásodnál?
Szemléltető, kitalált helyzet · D40a · Próbáld ki: h21-terjedes

Everett Rogers diffúziós elmélete az elfogadókat öt csoportra osztja aszerint, mikor csatlakoznak: újítók, korai elfogadók, korai többség, késői többség és lemaradók (21.4. ábra) (Rogers 2003). A csoportok aránya Rogers eredeti, a normális eloszlás szórásaihoz kötött felosztásából ered (2,5%, 13,5%, 34%, 34%, 16%). Geoffrey Moore üzleti könyve szerint a technológiai termékeknél a korai elfogadók és a korai többség között egy „szakadék” (*chasm*) van: a két csoport más miatt vásárol (újdonság, illetve kiszámítható, bevált megoldás), ezért a korai siker nem viszi át automatikusan a terméket a többséghez (Moore 1991).



21.4. ábra. Az elfogadói csoportok Rogers szerint és a Moore-féle „szakadék” a korai elfogadók és a korai többség között.

Fontos megkülönböztetni a két keret jellegét. Rogers csoportjai egy *leíró* kategorizálás, amelynek arányai konvenciót követnek; Moore szakadéka egy *üzleti keret*, amely tapasztalati megfigyelésekre épül, de nem formális modell.

A Bass-modell viszont *mechanizmust* ír le, amelyből a görbe levezethető. A három nem helyettesíti egymást: a Bass-modell az ütemet, a csoportkeret a célcsoportok eltérő igényeit, a szakadékmodell a stratégiai átmenet nehézségét segít végiggondolni.

Próbáld ki: elfogadói csoportok

Állíts be csoportonként eltérő igényeket (újdonság, ár, referencia, kiszámíthatóság), és figyeld meg, milyen feltétellel lép át a terjedés a korai elfogadóktól a korai többséghez.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h21-terjedes.html#D40a

21.5. Pólya-urna, megerősítés és bezáródás

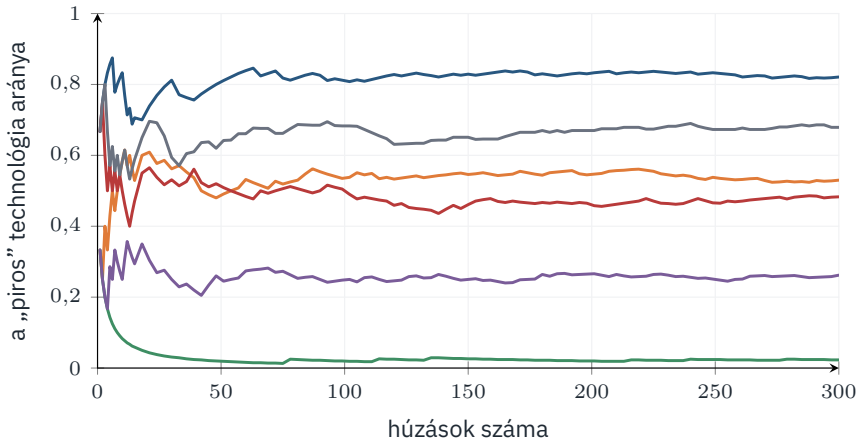
Az eddigi modellekben a végeredmény nagyrészt a paraméterektől függött. Az **útfüggőség** (*path dependence*) azt jelenti, hogy a végeredményt a korai, esetleges események is meghatározzák. Ennek legegyszerűbb modellje a **Pólya-urna** (Eggenberger és Pólya 1923): egy urnában egy piros és egy kék golyó van. Minden lépésben véletlenszerűen húzunk egyet, és visszatesszük egy azonos színű golyóval együtt. A népszerű szín így egyre valószínűbb lesz: ez a **megerősítés**.

A Pólya-urna egyik meglepő tulajdonsága, hogy a piros golyók aránya hosszú távon egy határértékhez tart, de *ez a határérték minden futásban más*, és a 0 és 1 között egyenletes eloszlású (21.5. ábra). A korai húzások döntik el, hol stabilizálódik az arány. W. Brian Arthur ezzel a gondolattal magyarázta a technológiai **bezáródást** (*lock-in*): ha egy technológia használóinak száma növeli a technológia vonzerejét (hálózati hatás, tanulási előny), a korai, esetleges előny tartós dominanciához vezethet, akkor is, ha a másik technológia hosszú távon jobb lett volna (Arthur 1989).

A döntéshozó számára az útfüggőség két tanulságot hordoz. Egyrészt a korai beavatkozások értéke aránytalanul nagy: egy bevezetés első heteiben elért kis előny később nehezen behozható. Másrészt egy kedvező kimenetel nem feltétlenül bizonyítja a stratégia helyességét; lehet, hogy egy szerencsés korai sorozat eredménye. Ez a 3.5. szakasz kimenetelalapú torzításának dinamikus változata.

Egy S alakú görbe önmagában nem azonosítja az okot

Egy S alakú elfogadási görbe sokféle mechanizmusból kijöhet: külső hatásból és utánzásból (Bass), küszöbkaszkádból, vagy egyszerűen abból, hogy az egyéni bevezetési időpontok normális eloszlásúak. Ha csak a görbét látjuk, nem tudjuk, melyik mechanizmus működik, és így azt sem, melyik beavatkozás gyorsítana. A mechanizmust kísérlettel vagy egyéni szintű adatokkal kell



21.5. ábra. Hat Pólya-urna-futás ugyanazzal a kezdőállapottal. A piros arány minden futásban stabilizálódik, de mindegyikben máshol: a korai, véletlen húzások döntenek.

azonosítani. Ugyanígy a determinisztikus és a sztochasztikus modell eredményét is külön kell kezelni: egy sztochasztikus modell egyetlen futása nem a modell előrejelzése.

21.6. Bevezetési stratégia és korai jelzőszámok

A terjedési modellek egy bevezetési stratégiát nem írnak elő, de segítenek megfogalmazni azt, és kijelölik, mit kell mérni. A CASE07-ben három kérdést kell tisztázni. *Melyik mechanizmus a meghatározó?* Ha az utánzás, az ajánlási program és a közösségi csomópontok megnyerése a fontos; ha a külső hatás, a közvetlen megkeresés. *Hol van a küszöbök eloszlásában rés?* Ha a korai többség magas küszöbű, egy kísérleti csoport (például egy nagyobb cég egy osztálya) bevonása átsegíthet a résen. *Mennyire erős a megerősítés?* Ha erős, a korai lépések kritikusak, és érdemes a bevezetés elejére koncentrálni az erőforrásokat.

A **korai jelzőszámok** azok a mérhető mennyiségek, amelyek a kritikus feltevést ellenőrzik: a meghívásból érkezett új felhasználók aránya (az utánzás erőssége), a második hónapban is aktív felhasználók aránya (a lemorzsolódás), a csatlakozás ideje a kollégák csatlakozásához képest (a küszöbök eloszlása). A legerősebb bizonyítékot egy **kísérlet** adja: ha két, hasonló céget véletlenszerűen két különböző bevezetési módra osztunk, a különbség már a mechanizmusról is mond valamit.

Átviteli példa: technológiai bezáródás és alternatív bevezetési sorrendek

Egy egyetemen két oktatásszervezési rendszer közül választanak. Az egyiket néhány kar már használja, ezért több oktató ismeri, és több segédanyag készült hozzá. A másik funkcionálisan jobb, de kevesebben ismerik. A Pólya-urna logikája szerint a korai előny önmagát erősíti: ha az első évben az ismertebb rendszert vezetik be szélesebb körben, a váltás később egyre drágább lesz. A döntésnél ezért nemcsak a mai tulajdonságokat, hanem a bezáródás várható költségét és a váltás lehetőségét is mérlegelni kell.

Összefoglalás

- A fordulópont egy paraméter kis változására bekövetkező rezsimváltás; nem azonos a folytonos, gyors növekedéssel.
- A perkolációnak éles küszöbe van, amely alatt a terjedés helyi, fölötte átfogó.
- A Bass-modell a külső hatás és az utánzás kombinációjából S alakú elfogadási görbét ad; a két paraméter más beavatkozást sugall. A SIS-modellben a terjedés és a felhagyás aránya dönti el, fennmarad-e a használat; a SIR-modellben az $R_0 > 1$ küszöb dönti el, kitör-e a járvány, és a nyájimmunitás küszöbe $1 - 1/R_0$.
- A küszöbmodellben a küszöbök eloszlása, nem az átlaga dönti el a kaszkádot; egy kis változás fordulópontot okozhat.
- Az álló ováció modelljében a láthatóság szerkezete is számít: a sokak által látott kevesek döntése a kaszkád kimenetelét is megfordíthatja. Az együtt mozgó szomszédok mintázata társas hatásból és szelekcióból is eredhet.
- Rogers csoportjai leíró kategorizálás, Moore szakadéka üzleti keret, a Bass-modell mechanizmus; a hármat külön kell kezelni.
- A Pólya-urna megerősítés révén útfüggőséghez és bezáródáshoz vezet: a korai, véletlen események tartósan meghatározzák a végeredményt.
- Egy S alakú görbe nem azonosítja az okot; a mechanizmust kísérlettel és egyéni szintű jelzőszámokkal kell ellenőrizni.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség egy fordulópont és egy exponenciális növekedés gyorsuló szakasza között?
2. Számold ki a Bass-modell csúcsidőpontját $p = 0{,}02$, $q = 0{,}5$ esetén!
3. A Granovetter-példában miért áll meg a kaszkád, ha egyetlen ember küszöbe 1 helyett 2?
4. Mit jelent, hogy a Pólya-urnában a határérték minden futásban más? Milyen döntési tanulsága van?
5. Egy csapat a szolgáltatás S alakú elfogadási görbéjéből arra következtet, hogy a szájhagyomány hajtja a terjedést. Mit vetnél ellen?
6. Egy fertőző betegségnél $\beta = 0{,}3$ naponta, és a betegek átlagosan 5 napig fertőzőek. Mekkora R_0, és a népesség hány százalékát kellene beoltani a nyájimmunitáshoz?

7. Egy cégnél azt látják, hogy az új eszközt egy-egy csapaton belül vagy mindenki, vagy senki sem használja. Miért nem bizonyítja ez önmagában, hogy a kollégák egymást győzik meg?

Megoldás.

1. A fordulópontnál egy paraméter kis változása a rendszert egy másik rezsimbe viszi (például helyi helyett átfogó terjedés); az exponenciális növekedés gyorsuló szakasza folytonos, előre jelezhető változás, rezsimváltás nélkül.
2. $t^* = \ln(0{,}5/0{,}02)/(0{,}02 + 0{,}5) = \ln 25/0{,}52 = 3{,}219/0{,}52 \approx 6{,}2$.
3. Mert az első (0-s küszöbű) ember csatlakozása után senki sem csatlakozik, akinek a küszöbe 1, hiszen ilyen ember már nincs; a 2-es küszöbűek két csatlakozott embert várnának.
4. A piros golyók aránya minden futásban egy határértékhez tart, de a határérték a korai, véletlen húzásoktól függ, és futásonként más. A döntési tanulság: a korai lépések értéke aránytalanul nagy, és egy kedvező kimenetel szerencsés korai sorozat eredménye is lehet.
5. Egy S alakú görbe sokféle mechanizmusból kijöhet (külső hatás, küszöbkaszkád, normális eloszlású bevezetési időpontok). A szájhagyomány szerepét egyéni szintű adatokkal (meghívásból érkezők aránya) vagy kísérlettel kell igazolni.
6. $\gamma = 1/5 = 0{,}2$, így $R_0 = 0{,}3/0{,}2 = 1{,}5$; a nyájimmunitáshoz $1 - 1/1{,}5 \approx 33\%$-os védettség kell.
7. Mert a mintázatot szelekció is okozhatja: a hasonló beállítottságú (például digitálisan nyitott) kollégák eleve egy csapatba kerülhettek. A társas hatás és a szelekció elválasztásához kísérlet vagy időben rendezett, egyéni szintű adat kell (ki mikor kezdte használni, kinek a csatlakozása után).

Továbbolvasás

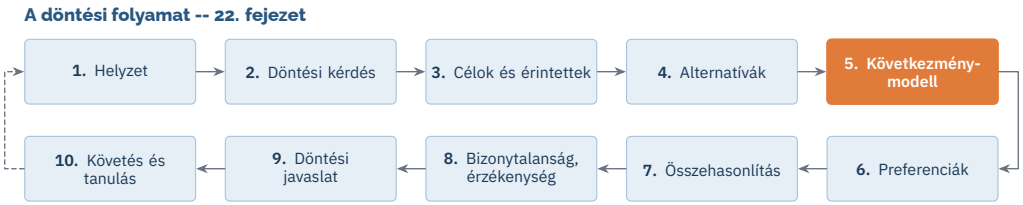
- Rogers, E. M. (2003): *Diffusion of Innovations* – az elfogadói csoportok és az innovációk terjedése (Rogers 2003).
- Bass, F. M. (1969) – a diffúziós modell (Bass 1969).
- Granovetter, M. (1978): Threshold models of collective behavior (Granovetter 1978).
- Miller, J. H., Page, S. E. (2004): The standing ovation problem – társas hatás térbeli láthatósággal (Miller és Page 2004).
- Kermack, W. O., McKendrick, A. G. (1927) – a SIR-modell és a járványküszöb (Kermack és McKendrick 1927).
- Arthur, W. B. (1989) – megerősítés és technológiai bezáródás (Arthur 1989).
- Page, S. E. (2018): *The Model Thinker* – fordulópontok, perkoláció és útfüggőség (Page 2018).

Gyakorlat

A Döntési műhely 21. műhelyében a terjedési alkalmazással (H21) a perkolációt, a SIS-modellt, a küszöbkaszkádot, a Pólya-urnát és az álló ováció modelljét próbálhatod ki, ismételt futásokkal. Az N21 notebook a Bass-modellt és a Pólya-urnát szimulálja; a determinisztikus és a sztochasztikus eredmény külön jelölést kap, és azonos paraméterek mellett több futás is látható.

22.

Hálózatok, aggregáció és emergens következmények



Honnan keletkeznek az információs szigetek?

Noémi új munkatársként azt veszi észre, hogy mindenki csak a szomszéd asztalnál ülőkkel egyeztet. Senki sem akar szervezeti silókat, mégis elkülönülő információs szigetek alakultak ki, és a jó ötletek ritkán jutnak át egyikből a másikba.
A lényeg: A helyi kapcsolatok egyszerű szabályaiból olyan közös minta is kialakulhat, amelyet senki sem tervezett.
Kérdés: Melyik két csoport közé építenél új kapcsolatot, és miért éppen oda?
Szemléltető, kitalált helyzet · F22 · Próbáld ki: h22-halozat

Egy szervezet, egy piac vagy egy közösség viselkedése nem egyszerűen a benne lévő egyének viselkedésének összege. Az egyének kapcsolatokon keresztül hatnak egymásra, és a kapcsolatok szerkezete gyakran többet számít, mint az egyének tulajdonságai. Ez a fejezet a hálózatok alapfogalmait és a helyi szabályokból kialakuló rendszerszintű mintákat, az **emergens** jelenségeket mutatja be. Ugyanaz a helyi szabály két különböző kapcsolati hálón egészen más eredményt adhat; és olyan közös minta is kialakulhat, amelyet egyetlen résztvevő sem akart (Newman 2018; Page 2018).

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- felrajzolni egy kis hálózatot, és kiszámítani a fokszámot, az úthosszt és két központisági mértéket;
- megmagyarázni a kicsi világ jelenséget és a gyenge kapcsolatok szerepét;
- felismerni a preferenciális kapcsolódás és a koncentráció összefüggését;
- bemutatni egy olyan rendszermintát (Schelling-modell, sejtautomata), amely nem következik közvetlenül az egyéni szándékokból;
- az Életjáték, az elemi sejtautomaták és a fraktálok példáján megmutatni, hogyan jönnek létre egyszerű helyi szabályokból komplex, önhasonló mintázatok, és mit jelent ez az előrejelezhetőségre;
- kapcsolati és tudástérképet készíteni, és ebből hálózati beavatkozást javasolni;
- megnevezni az aggregáció korlátait és a szimulációs szemléltetés határait.

A fejezet a gráfok alapfogalmaival kezd, majd a kicsi világ jelenséget és a gyenge kapcsolatokat tárgyalja. A harmadik szakasz a preferenciális kapcsolódást és a hosszú farok modelljét, a negyedik a helyi szabályokból kialakuló mintákat, az ötödik az Életjátékot, az elemi sejtautomatákat és a fraktálokat mutatja be. A hatodik szakasz a kapcsolati és a tudásáramlási térképekkel foglalkozik, az utolsó a hálózati beavatkozásokkal és az aggregáció korlátaival.

CASE06 – Együttműködő szereplők információhálózata

Egy kistérség településeinek vízügyi felelősei, gazdálkodói és civil szervezetei közösen használnak egy víztartályt. Az információ (a vízszint, a tervezett kivételek, a szárazsági előrejelzés) a szereplők közötti kapcsolatokon terjed. A koordinátor azt keresi, hogyan juthat el az információ gyorsan mindenkihez, és hol van a hálózatnak gyenge pontja. A számértékek szemléltetők.

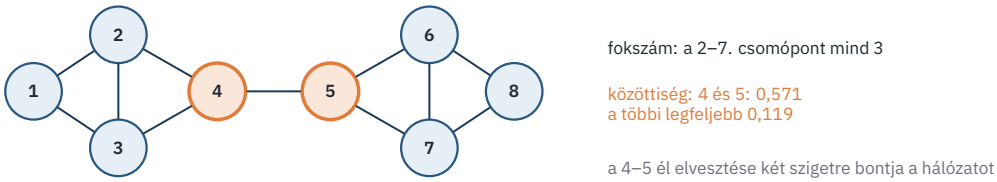
22.1. Gráf, fokszám, út és központiság

Ki köti össze a két csoportot?

Egy hálózatban mindenkinek ugyanannyi kapcsolata van. Mégis két ember kiemelkedik: rajtuk keresztül fut minden információ, amely a két csoport között áramlik.
A lényeg: A kapcsolatok száma és a hálózatban betöltött szerep két különböző dolog; a központiságot többféleképpen kell mérni.
Kérdés: Kit hívnál meg először egy egyeztetésre, ha a két csoportot össze akarnád kötni?
Szemléltető, kitalált helyzet · K19 · Próbáld ki: h22-halozat

A **hálózat** (gráf) csomópontokból és a közöttük lévő élekből áll. A csomópontok lehetnek emberek, szervezetek vagy települések, az élek kapcsolatok, információáramlás vagy kereskedelem. Néhány alapmérték (Newman 2018):

- a **fokszám** egy csomópont kapcsolatainak száma;
- az **úthossz** két csomópont között a legrövidebb összekötő út éleinek száma; az **átlagos úthossz** (L) ennek átlaga minden csomópontpárra;
- a **csoportosulási együttható** (C) azt méri, egy csomópont szomszédai milyen arányban kapcsolódnak egymáshoz is („a barátaim barátai egymásnak is barátai”);
- a **közöttiségi központiság** (*betweenness*) azt méri, a csomópontpárok közötti legrövidebb utak mekkora része halad át egy adott csomóponton.



22.1. ábra. Egy kis hálózat két háromszöges csoporttal és egy híddal. A 2–7. csomópont fokszáma azonos, de a 4. és az 5. közöttisége sokszorosa a többiének: rajtuk keresztül fut a csoportok közötti összes legrövidebb út.

A 22.1. ábra hálózatában a 2–7. csomópont mind három kapcsolattal rendelkezik: fokszám szerint egyformák. A közöttiség azonban egészen mást mutat: a 4. és az 5. csomópont 0,571-es értéke sokszorosa a többiének (legfeljebb 0,119), mert minden, a két csoport közötti legrövidebb út rajtuk halad át. Ők a hálózat hídjai, és egyben a gyenge pontjai is: ha a 4–5 kapcsolat megszűnik, a hálózat két szigetre esik. A központiság mértékének megválasztása tehát a kérdéstől függ: a fokszám a helyi befolyást, a közöttiség a közvetítő szerepet méri.

Próbáld ki: hálózati és ágensműhely

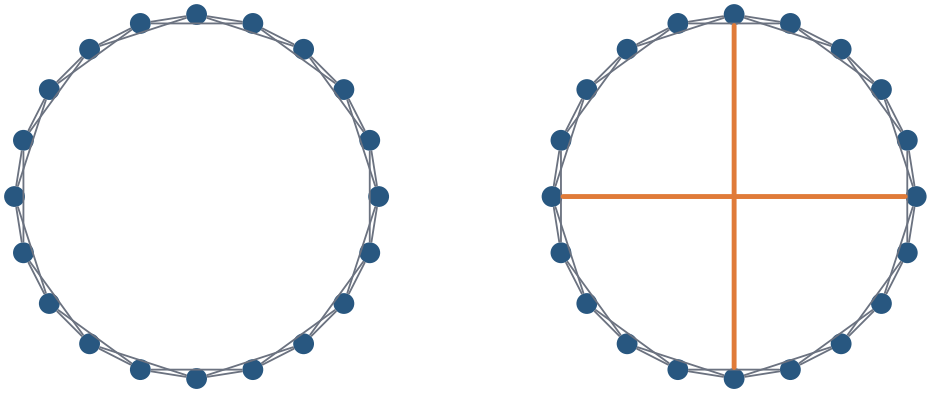
Előbb tippeld meg, melyik csomópontnak legnagyobb a közöttisége. Ezután adj hozzá és törölj kapcsolatokat, és figyeld a mutatók változását. A Schelling- és a sejtautomata-nézetben a helyi szabályokat és a frissítési sorrendet is változtathatod.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h22-halozat.html#K19

22.2. Kicsi világ és gyenge kapcsolatok

Hány lépésre vagy bárkitől?

A munkatársak mind csak a közvetlen szomszédaikkal beszélnek, ezért egy hír lassan jut el az épület másik végébe. Két kolléga véletlenül egy közös projektbe kerül, és a hírek hirtelen sokkal gyorsabban terjednek.
A lényeg: Néhány távoli kapcsolat drámaian lerövidítheti az átlagos utat egy egyébként helyi hálózatban.
Kérdés: Hol lenne az a két ember a szervezetedben, akiket érdemes lenne összekötni?
Szemléltető, kitalált helyzet · D35 · Próbáld ki: h22-halozat

Stanley Milgram híres kísérletében a résztvevőknek egy levelet kellett eljuttatniuk egy ismeretlen célszemélyhez, csak személyes ismerősökön keresztül; a célba ért levelek átlagosan körülbelül hat lépésben értek oda (Milgram 1967; Travers és Milgram 1969). Innen ered a „hat lépés távolság” kifejezés. Duncan Watts és Steven Strogatz megmutatta, hogy ehhez nem kell véletlenszerű hálózat: egy szabályos, helyi kapcsolatokból álló gyűrűben néhány véletlen, távoli kapcsolat elég ahhoz, hogy az átlagos úthossz drámaian csökkenjen, miközben a csoportosulás magas marad. Ezt nevezték **kicsi világ** (*small world*) hálózatnak (Watts és Strogatz 1998).



szabályos gyűrű: $L = 2{,}90$, $C = 0{,}50$ — két távoli kapcsolattal: $L = 2{,}35$, $C = 0{,}46$

22.2. ábra. Egy szabályos gyűrű (minden csomópont a két-két legközelebbi szomszédjával kapcsolódik) és ugyanez két távoli kapcsolattal. Az átlagos úthossz 2,90-ről 2,35-re csökken, a csoportosulás alig változik.

A 22.2. ábra húszcsomópontos gyűrűjében két távoli kapcsolat az átlagos úthosszt 2,90-ről 2,35-re, mintegy 19%-kal csökkenti, a csoportosulási együttható pedig csak 0,50-ről 0,46-ra. Mark Granovetter már korábban

rámutatott a **gyenge kapcsolatok** erejére: az új információ (például egy álláslehetőség) gyakran nem a szoros baráti körből, hanem a távolabbi ismerősöktől érkezik, mert ők más körökbe látnak bele (Granovetter 1973).

A rövid átlagos úthossz nem jelent gyors, mindenkihez eljutó kommunikációt

Az átlagos úthossz azt mondja meg, milyen közel *lehetne* az információ mindenkihez, ha mindenki továbbadná. A valóságban az információ elakadhat, torzulhat, és a kapcsolatok nem egyformán aktívak. Egy kicsi világ hálózatban is lehet lassú a terjedés, ha a hídszerepű emberek túlterheltek vagy nem érdekeltek a továbbadásban.

Próbáld ki: kicsi világ

Indulj egy szabályos gyűrűből, és adj hozzá egyenként távoli kapcsolatokat. Figyeld meg, hogyan változik az átlagos úthossz és a csoportosulás, és hány új kapcsolat kell az úthossz felezéséhez.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h22-halozat.html#D35

22.3. Preferenciális kapcsolódás és koncentráció

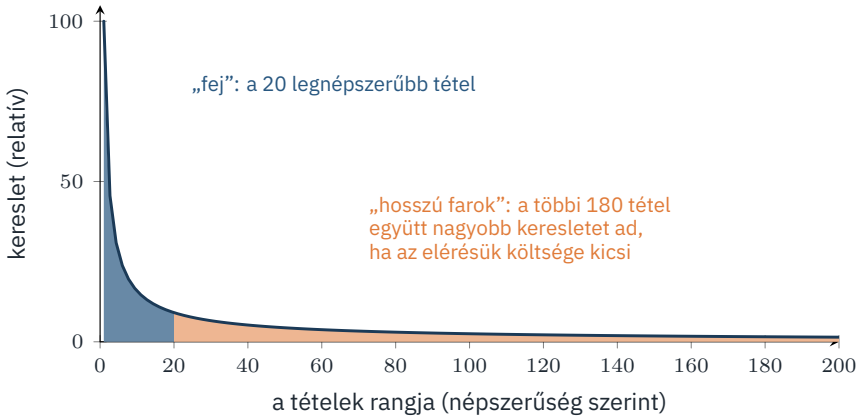
Sok valódi hálózatban a fokszámok nagyon egyenetlenek: néhány csomópontnak rengeteg kapcsolata van, a legtöbbnek kevés. Albert-László Barabási és Réka Albert modellje szerint ez a **preferenciális kapcsolódásból** ered: az új csomópontok nagyobb eséllyel kapcsolódnak a már sok kapcsolattal rendelkezőkhöz („a gazdag még gazdagabb lesz”) (Barabási és Albert 1999). A mechanizmus a 21.5. szakasz Pólya-urnájának hálózati rokona, és erősen koncentrált, gyakran hatványfüggvényhez hasonló fokszám-eloszlást ad.

22.3.1. A hosszú farok

Sok kicsi többet ér, mint néhány nagy?

Egy online könyvesbolt eladásainak nagy része a legnépszerűbb könyvekből jön. A sok, egyenként ritkán keresett könyv együtt mégis jelentős forgalmat ad, ha a raktározásuk és a megtalálásuk szinte semmibe sem kerül.
A lényeg: Egy koncentrált eloszlás „farka” is jelentős lehet, ha a kis tételek elérésének költsége kicsi.
Kérdés: Melyik kis tételek összessége jelentős a te tevékenységedben?
Szemléltető, kitalált helyzet · D37 · Próbáld ki: h22-halozat

Chris Anderson a **hosszú farok** (*long tail*) kifejezéssel írta le, hogy az online kereskedelemben a ritkán keresett termékek összessége jelentős keresletet adhat, mert a polc nélküli bolt alacsony költséggel tudja kínálni őket (Anderson 2006). Brynjolfsson, Hu és Smith becslése szerint az online könyvkereskedelemben a hagyományos boltokban nem kapható könyvek jelentős fogyasztói többletet teremtettek (Brynjolfsson és mtsai. 2003). A 22.3. ábra szemléltető eloszlásában a 200 tételből a 20 legnépszerűbb a kereslet 47%-át, a többi 180 a 53%-át adja.



22.3. ábra. Egy szemléltető, koncentrált kereslet-eloszlás. A 20 legnépszerűbb tétel („fej") a kereslet 47%-át, a többi 180 tétel („farok") az 53%-át adja.

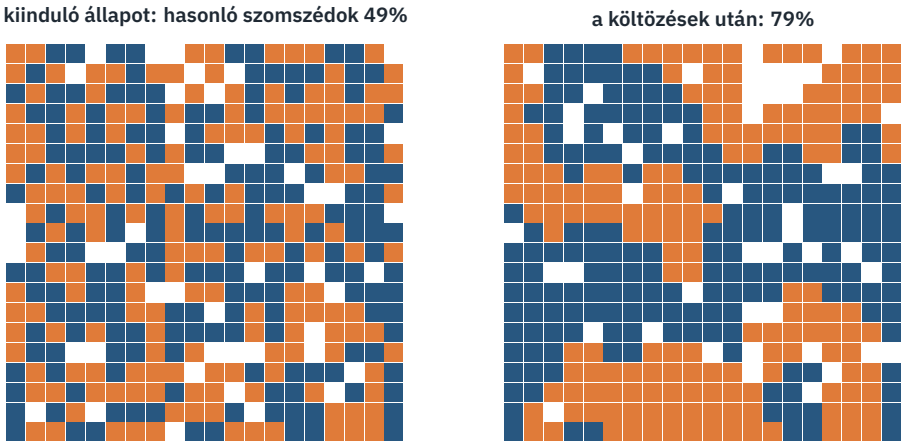
A hosszú farok és a Pareto-elv (5.5. szakasz) ugyanannak az eloszlásnak két nézőpontja. A Pareto-elv a fejre figyelmeztet („néhány tétel adja az eredmény nagy részét"), a hosszú farok a farokra („a sok kicsi együtt sokat ér"). Hogy melyik a fontosabb, az a kis tételek elérésének költségétől függ. Ha minden tétel kezelése azonos fix költséggel jár, a farok veszteséges lehet; ha a kezelés szinte ingyenes, a farok értékes. A portfólióválasztásnál (13. fejezet) ugyanezt láttuk: a kis projektek (P5) gyakran éppen a keret kitöltésében hasznosak.

Próbáld ki: hosszú farok

Változtasd az eloszlás koncentrációját és a tételenkénti kiszolgálási költséget. Az alkalmazás kiszámítja a fej és a farok hozzájárulását és megtérülését, és megmutatja, hol fordul át a farok veszteségessé.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h22-halozat.html#D37

22.4. Helyi szabályok: a Schelling-modell és a sejtautomaták

Thomas Schelling 1971-es modellje az emergencia talán leghíresebb példája (Schelling 1971). Egy rácson kétféle szereplő él, néhány üres hellyel. Minden szereplő akkor elégedett, ha a szomszédai legalább egy bizonyos hányada hozzá hasonló; ha nem elégedett, egy véletlenszerű üres helyre költözik. Schelling meglepő felismerése az volt, hogy már enyhe preferencia (például legalább a szomszédok harmada legyen hasonló) is erős elkülönüléshez vezet (22.4. ábra). A szimulációnkban a hasonló szomszédok átlagos aránya a kiinduló 49%-ról 80%-ra nő, pedig senki sem kívánt 33%-nál többet.



22.4. ábra. A Schelling-modell egy 20 × 20-as rácson, 10% üres hellyel és 1/3-os elégedettségi küszöbbel. A hasonló szomszédok aránya 49%-ról 80%-ra nő.

A **sejtautomaták** még egyszerűbb helyi szabályokból mutatnak bonyolult mintákat: John Conway Életjátékában és Stephen Wolfram egydimenziós automatáiban néhány szomszéd állapota alapján működő szabályok is a szabályostól a kaotikusig sokféle viselkedést adnak (Gardner 1970; Wolfram 2002). Ezeket a 22.5. szakasz mutatja be részletesen.

A modellek tanulsága a döntéshozó számára: **a helyi szabály és a rendszerszintű kimenet között nem mindig van egyszerű kapcsolat**. Egy szervezetben a helyi, ésszerű döntések (mindenki a hozzá közel állókkal egyeztet) olyan közös mintát hozhatnak létre (silók), amelyet senki sem akart. A beavatkozást ezért a szerkezetre kell irányítani, nem az egyének szándékára.

A szimuláció szemléltetés, nem empirikus bizonyítás

A Schelling-modell megmutatja, hogy enyhe egyéni preferenciák *elvileg* erős elkülönüléshez vezethetnek. Azt nem bizonyítja, hogy egy konkrét városban vagy szervezetben ez a mechanizmus működik; ehhez empirikus vizsgálat kell. A szimuláció eredménye a részletektől is függ: a frissítés sorrendjétől (egyszerre vagy egymás után lépnek-e a szereplők), a szomszédság definíciójától és a rács széleinek kezelésétől. Ezeket mindig dokumentálni kell.

22.5. Életjáték, elemi sejtautomaták és fraktálok

Elindult a füzetben!

Luca informatikus hallgató egy esős vasárnap délután kockás füzetben próbálja ki az Életjáték szabályait, amelyekről előző nap hallott. Öt sejtből álló kis alakzatot rajzol, és lépésről lépésre, ceruzával számolja ki a következő állapotot. A negyedik lépés után meglepődve látja, hogy az alakzat ugyanolyan, mint az elején, csak egy kockával arrébb került: „elindult”. Pedig a szabályok csak a szomszédokat számolják, mozgásról egy szó sincs bennük.

A lényeg: Egyszerű, helyi és determinisztikus szabályokból mozgó, növekvő vagy önmagát ismétlő mintázatok emelkedhetnek ki. A rendszerszintű viselkedés nem olvasható ki közvetlenül a szabályokból, gyakran csak szimulációval ismerhető meg.

Kérdés: Hány lépés után veszi fel újra a „sikló” az eredeti alakját, és merre mozdul el közben?

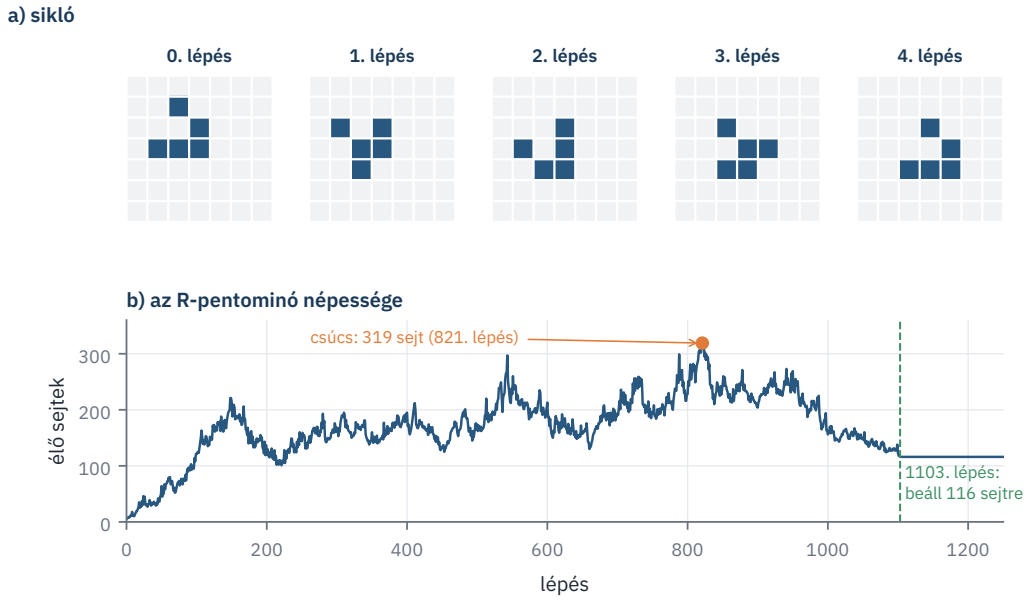
Szemléltető, kitalált helyzet · K38 · Próbáld ki: h22-halozat

A **sejtautomata** a helyi szabályokból kialakuló mintázatok legtisztább modellje: egy rács minden cellája véges sok állapot egyikében van, és minden lépésben a saját és a szomszédai állapota alapján, mindenhol ugyanazzal a szabállyal frissül. A gondolat Neumann Jánostól ered, aki az 1940-es években önmagukat reprodukáló gépek elméleti modelljeként vezette be (Neumann 1966). A legismertebb sejtautomata John Conway 1970-es **Életjátéka** (*Game of Life*): egy négyzetrácson minden sejt élő vagy halott, és a következő lépés a nyolc szomszéd alapján dől el (Gardner 1970):

- egy halott sejt életre kel, ha pontosan három élő szomszédja van;
- egy élő sejt életben marad, ha két vagy három élő szomszédja van;
- minden más esetben a sejt meghal, illetve halott marad.

A három szabályból meglepően gazdag világ születik (22.5. ábra). Vannak **csendéletek**, amelyek nem változnak (például a 2 × 2-es blokk), **oszcillátorok**, amelyek periodikusan ismétlődnek (a három sejtből álló villogó), és **siklók**, amelyek négy lépésenként ugyanazt az alakot veszik fel, de közben átlósan egy cellával arrébb kerülnek – ez a kártya kérdésére adott válasz. Bill Gosper még

1970-ben olyan alakzatot talált, amely harminc lépésenként egy új siklót bocsát ki (siklóágyú), így egy véges kezdőállapotból korlátlanul nő a népesség. Az öt sejtből álló **R-pentominó** 1103 lépésen át változik: népessége a 821. lépésben 319 sejttel tetőzik, és csak ezután áll be 116 élő sejtre.

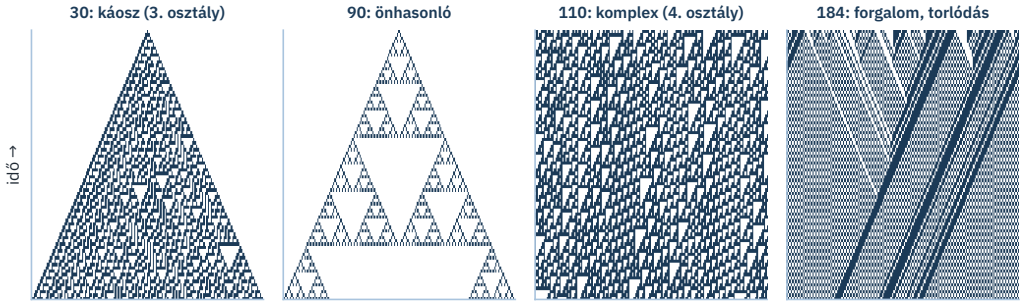


22.5. ábra. Az Életjáték két jellegzetes viselkedése. a) A sikló négy lépés után ugyanazt az alakot veszi fel, átlósan egy cellával eltolva. b) Az öt sejtből induló R-pentominó népessége: több mint ezer lépésnyi szabálytalan fejlődés után áll be.

Az Életjáték legmélyebb tulajdonsága, hogy **univerzális számítógép**: alkalmas kezdőállapottal bármilyen algoritmus végrehajtható benne (Berlekamp és mtsai. 1982). Ebből az is következik, hogy nincs általános rövidítés a jövőjének előrejelzésére: arra a kérdésre, hogy egy kezdőállapot valaha kihal-e, nem létezik minden esetben működő eljárás, a viselkedést sokszor csak lépésről lépésre szimulálva ismerhetjük meg. Stephen Wolfram ezt a tulajdonságot **számítási visszavezethetetlenségnek** nevezi (Wolfram 2002).

Wolfram az **elemi sejtautomatákat** vizsgálta: egy egydimenziós sorban minden cella 0 vagy 1, és a következő állapota a saját és a két szomszédja állapotától függ (Wolfram 2002). A három cella $2^3 = 8$ lehetséges állapotához egy-egy új állapotot rendelve $2^8 = 256$ szabály adódik, amelyeket a nyolc kimenetből képzett bináris szám nevez meg; a 30-as szabály például a 00011110 kimenetsor. Wolfram a szabályokat négy osztályba sorolta (Wolfram 1984). Az első osztályban szinte minden kezdőállapotból egyforma végállapot alakul ki, a másodikban stabil vagy periodikus szerkezetek, a harmadikban kaotikus, véletlenszerűnek látszó mintázat, a negyedikben pedig egymással kölcsönható, helyhez kötött és vándorló szerkezetek: ez a komplexitás a rend és a káosz határán.

A 22.6. ábra négy jellegzetes szabályt mutat. A 30-as szabály egyetlen sejtből kaotikus mintázatot hoz létre, amelyet véletlenszám-előállításra is használtak. A 90-es szabály egyetlen sejtből a Sierpiński-háromszöget rajzolja: a mintázat önhasonló, és minden $(2^k - 1)$-edik sorában pontosan 2^k élő sejt van. A 110-es szabály a negyedik osztályba tartozik; Matthew Cook bebizonyította, hogy az Életjátékhoz hasonlóan univerzális számításra képes (Cook 2004). A 184-es szabály a közúti forgalom legegyszerűbb modellje: minden „autó” akkor lép előre, ha előtte üres a hely, és ha az autók sűrűsége meghaladja a felet, visszafelé haladó torlódási hullámok alakulnak ki. Ennek valószínűségi kiterjesztése, a Nagel–Schreckenberg-modell a látszólag ok nélkül kialakuló dugók klasszikus magyarázata (Nagel és Schreckenberg 1992).



22.6. ábra. Négy elemi sejtautomata téridő-ábrája; az idő lefelé halad. A 30-as szabály egyetlen sejtből kaotikus, a 90-es önhasonló (Sierpiński-háromszög) mintázatot hoz létre; a 110-es szabályban véletlen kezdőállapotból kölcsönható, vándorló szerkezetek, a 184-esben visszafelé haladó torlódási hullámok jelennek meg.

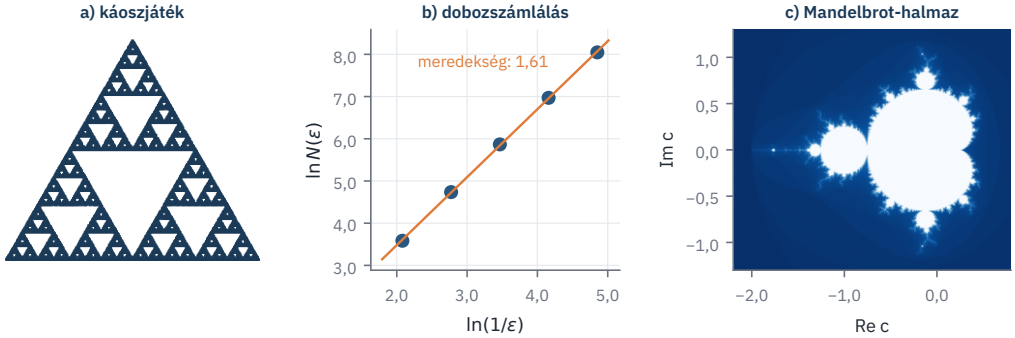
Az önhasonló mintázatokat Benoît Mandelbrot nevezte **fraktáloknak** (Mandelbrot 1982). A fraktál részei kicsiben az egészre hasonlítanak, ezért nem jellemezhetők a megszokott egész dimenzióval. Ha egy alakzat N darab, r-szeresére kicsinyített másolatából áll, **hasonlósági dimenziója**

$$D = \frac{\log N}{\log(1/r)}. \tag{22.1}$$

A Sierpiński-háromszög három, felére kicsinyített másolatból áll, így $D = \log 3 / \log 2 \approx 1{,}585$: több, mint egy vonal, de kevesebb, mint egy felület. A dimenzió adatokból **dobozszámlálással** is becsülhető: megszámoljuk, hány ε oldalú négyzet kell az alakzat lefedéséhez, és kihasználjuk, hogy $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$. Mandelbrot híres kérdése, hogy milyen hosszú Nagy-Britannia partvonala, éppen erre mutatott rá: a mért hossz a mérőpálca hosszától függ, mert a part minden léptékben újabb öblöket és kiszögelléseket mutat (Mandelbrot 1967).

A fraktálok véletlen eljárással is előállíthatók. A **káoszjátékban** egy háromszög csúcsai közül véletlenszerűen választunk egyet, és a jelenlegi pontból félúton lépünk felé; a pontfelhő néhány ezer lépés után a Sierpiński-háromszöget

rajzolja ki (Barnsley 1988). A **Mandelbrot-halmaz** azoknak a c komplex számoknak a halmaza, amelyekre a $z \mapsto z^2 + c$ leképezés a nulláról indulva korlátos marad (22.7. ábra). A halmaz valós tengelyre eső része a 19.9. szakasz logisztikus leképezésével rokon: a valós tengely mentén ugyanaz a periódus-kettőződési kaszkád jelenik meg, ugyanazokkal a Feigenbaum-arányokkal.



22.7. ábra. Fraktálok. a) A káoszjáték 60 000 pontja: véletlen lépésekből szabályos Sierpiński-háromszög. b) Dobozszámlálás: a lefedő négyzetek száma és a négyzetméret logaritmusa között egyenes kapcsolat van, a meredekség (1,61) a fraktáldimenzió becslése (elméleti értéke 1,585). c) A Mandelbrot-halmaz; a színárnyalat azt mutatja, hány lépés után lép ki a pálya a 2 sugarú körből.

A döntéshozó számára három tanulság adódik. Először: egyszerű helyi szabályokból gazdag, előre nehezen látható mintázatok emelkedhetnek ki; ha egy szervezetben vagy egy piacon meglepő minta jelenik meg, nem feltétlenül kell mögötte bonyolult okot vagy tervezőt keresni. Másodszor: egyes rendszerek viselkedését csak szimulációval ismerhetjük meg, ezért az ágensalapú modellek és a szimuláció nem a pontos előrejelzés, hanem a lehetséges kimenetek feltárásának eszközei. Harmadszor: a fraktálszerkezet léptékfüggő mérést jelent; egy fraktálszerű jelenségnél (partvonal, hálózat, erősen ingadozó idősor) a mért mennyiség a felbontástól függ, ezért mindig meg kell adni, milyen léptékben mérünk.

Próbáld ki: az Életjáték

Előbb tippeld meg, hány lépés után ismétlődik a sikló alakja. Ezután válassz kezdőalakzatot (sikló, villogó, siklóágyú, R-pentominó vagy véletlen), rajzolj saját mintát kattintással, és indítsd el az animációt; a grafikon a népesség alakulását mutatja.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h22-halozat.html#K38

Próbáld ki: elemi sejtautomaták és fraktálok

Válassz Wolfram-szabályt, és figyeld, melyik osztályba tartozik; játszd le a káoszjátékot különböző sokszögekkel és lépésarányokkal, és becsüld meg a kirajzolódó alakzat dimenzióját; nagyíts bele a Mandelbrot-halmaz határába. Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h22-halozat.html#K39

Az Életjáték: sikló és R-pentominó

A szomszédok számát a rács nyolc irányba eltolt másolatainak összege adja (`np.roll`); a rács széle körbeér, ezért elég nagy rácsot választunk, hogy a távolodó siklók ne érjenek vissza.

```
import numpy as np

def lepes(G):
    """Az Életjáték egy lépése (körbeérő szélű rácson)."""
    N = sum(np.roll(np.roll(G, i, 0), j, 1)
            for i in (-1, 0, 1) for j in (-1, 0, 1)
            if (i, j) != (0, 0))
    return ((N == 3) | ((G == 1) & (N == 2))).astype(np.uint8)

# Sikló: négy lépés után ugyanaz az alakzat, átlósan eltolva
G = np.zeros((10, 10), np.uint8)
for r, c in [(0, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)]:
    G[r, c] = 1
H = G.copy()
for _ in range(4):
    H = lepes(H)
print("4 lépés után eltolt sikló:",
      np.array_equal(H, np.roll(np.roll(G, 1, 0), 1, 1)))

# R-pentominó: öt sejtből több mint ezer lépésnyi fejlődés
n = 900
G = np.zeros((n, n), np.uint8)
for r, c in [(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 1)]:
    G[n // 2 + r, n // 2 + c] = 1
nepesseg = [int(G.sum())]
for t in range(1200):
    G = lepes(G)
    nepesseg.append(int(G.sum()))
nep = np.array(nepesseg)
utolso = np.nonzero(np.diff(nep))[0].max() + 1
print(f"legnagyobb népesség: {nep.max()} "
      f"a {nep.argmax()}. lépésben")
print(f"a népesség utoljára a {utolso}. lépésben változik; "
      f"végső népesség: {nep[-1]}")
```

A futás eredménye: a sikló négy lépés után eltolva visszatér; az R-pentominó népessége a 821. lépésben 319-cel tetőzik, utoljára az 1103. lépésben változik, a végső népesség 116.

Elemi sejtautomaták

A szabály számának bináris jegyei adják meg a nyolc szomszédsági esethez tartozó új állapotot; az eset sorszáma a három cella bináris értéke (bal · 4 + közép · 2 + jobb).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def elemi(szabaly, szelesseg=201, lepesek=100, veletlen=False):
    """Wolfram-féle elemi sejtautomata téridő-ábrája."""
    tabla = np.array([(szabaly >> k) & 1 for k in range(8)])
    if veletlen:
        x = np.random.default_rng(1).integers(0, 2, szelesseg)
    else:
        x = np.zeros(szelesseg, int)
        x[szelesseg // 2] = 1       # egyetlen élő sejt középen
    sorok = [x]
    for _ in range(lepesek - 1):
        bal, jobb = np.roll(x, 1), np.roll(x, -1)
        x = tabla[4 * bal + 2 * x + jobb]
        sorok.append(x)
    return np.array(sorok)

fig, axs = plt.subplots(1, 4, figsize=(12, 3.2))
for ax, (sz, vel) in zip(axs, [(30, False), (90, False),
                               (110, True), (184, True)]):
    ax.imshow(elemi(sz, veletlen=vel), cmap="Blues",
              interpolation="nearest")
    ax.set_title(f"{sz}-es szabály"); ax.axis("off")
plt.show()

# 90-es szabály: a (2^k - 1)-edik sorban 2^k élő sejt van
D = elemi(90, szelesseg=257, lepesek=129)
print([int(D[2**k - 1].sum()) for k in range(8)])
```

A futás eredménye a négy téridő-ábra és a 90-es szabály sejtszámai: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.

Káoszjáték, dobozszámlálás és Mandelbrot-halmaz

A dobozszámlálásnál a pontokat ε oldalú négyzetekbe soroljuk, megszámoljuk a nem üres négyzeteket, és a log-log egyenes meredekségéből becsüljük a dimenziót.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Káoszjáték: véletlen lépésekből szabályos fraktál
rng = np.random.default_rng(0)
csucs = np.array([[0, 0], [1, 0], [0.5, np.sqrt(3) / 2]])
p = np.array([0.3, 0.3])
pontok = np.empty((60_000, 2))
for i in range(len(pontok)):
    p = (p + csucs[rng.integers(3)]) / 2   # félúton egy csúcshoz
    pontok[i] = p

# Dobozszámlálás: N(eps) ~ eps^(-D)
meretek = np.array([1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128])
db = [len(np.unique(np.floor(pontok[100:] / e), axis=0))
      for e in meretek]
D = -np.polyfit(np.log(meretek), np.log(db), 1)[0]
print(f"dobozszámlálással becsült dimenzió: {D:.3f} "
      f"(elmélet: log 3 / log 2 = {np.log(3) / np.log(2):.3f})")

# Mandelbrot-halmaz: c, amelyre z -> z^2 + c korlátos marad
x, y = np.meshgrid(np.linspace(-2.2, 0.8, 600),
                   np.linspace(-1.3, 1.3, 520))
c = x + 1j * y
z = np.zeros_like(c)
lepes = np.zeros(c.shape, int)
for k in range(80):
    belul = np.abs(z) <= 2
    z[belul] = z[belul] ** 2 + c[belul]
    lepes[belul] += 1

fig, (a1, a2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 4.2))
a1.scatter(*pontok[100:].T, s=0.1, color="navy")
a1.set_aspect("equal"); a1.axis("off")
a2.imshow(lepes, cmap="Blues_r", extent=(-2.2, 0.8, -1.3, 1.3))
a2.set_xlabel("Re c"); a2.set_ylabel("Im c")
plt.show()
```

A futás eredménye: a dobozszámlálással becsült dimenzió 1,610, az elméleti érték 1,585; mellette a két ábra.

22.6. Kapcsolati térkép és tudásáramlás

A hálózati gondolkodás a döntéshozó saját kapcsolataira is alkalmazható. A *The Decision Book* két egyszerű keretet kínál erre (Krogerus és Tschäppeler 2011).

22.6.1. Az ajánlások családfája

Honnan jönnek az ügyfeleid?

Egy tanácsadó végiggondolja, hogyan találták meg őt a megbízói. Kiderül, hogy a mostani ügyfelek többsége egyetlen korábbi megbízó ajánlásával érkezett, közvetve vagy közvetlenül.
A lényeg: Az ajánlási kapcsolatok eredetfája megmutatja, mennyire függ a tevékenységed néhány közvetítőtől.
Kérdés: Ki az a közvetítő, akin a legtöbb kapcsolatod múlik?
Szemléltető, kitalált helyzet · D07 · Próbáld ki: h22-halozat

A **családfamodell** azt javasolja, hogy rajzoljuk fel, kitől származnak az ügyfeleink, ötleteink vagy kapcsolataink, mintha egy családfát rajzolnánk (Krogerus és Tschäppeler 2011). A fa megmutatja a **koncentrációt**: ha a kapcsolatok nagy része egyetlen közvetítőtől ered, a tevékenység sérülékeny, mert ennek a közvetítőnek a kiesése sok későbbi kapcsolatot is elvág. Ez a közöttiségi központiság személyes léptékű változata.

Próbáld ki: ajánlási eredetfa

Adj hozzá ajánlási kapcsolatokat a fához, és figyeld meg, mekkora hányad múlik egyetlen közvetítőn. Az alkalmazás kiemeli a legnagyobb koncentrációt.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h22-halozat.html#D07

22.6.2. Kapcsolati célábra

Kivel tartod a kapcsolatot, és milyen gyakran?

Végignézed a naptáradat: a hét nagy részében ugyanazzal a néhány emberrel egyeztetsz. Azokkal, akik új nézőpontot hoznának, fél éve nem beszéltél.
A lényeg: A kapcsolatok típusa és gyakorisága egy egyszerű térképen láthatóvá teszi, hol szűkül be a hálózatod.
Kérdés: Melyik kapcsolatodat erősítenéd, hogy új információhoz juss?
Szemléltető, kitalált helyzet · D28 · Próbáld ki: h22-halozat

A **kapcsolati célábra** (*network target*) koncentrikus körökben helyezi el a kapcsolatainkat aszerint, milyen gyakran tartjuk velük a kapcsolatot, és kategóriákba sorolja őket (szakmai, személyes, tanácsadó) (Krogerus és Tschäppeler 2011). A gyenge kapcsolatok elmélete (Granovetter 1973) szerint a külső körök kapcsolatai az új információ forrásai; ha ezek elhalványulnak, a

hálózatunk beszűkül. A célábra egy reflektív eszköz, amely egy konkrét lépést javasol: melyik kapcsolatot érdemes tudatosan erősíteni.

Próbáld ki: kapcsolati célábra

Helyezd el a kapcsolataidat kategória és gyakoriság szerint. Az alkalmazás újrarajzolja a célábrát, és megmutatja, melyik kategóriában vagy körben ritkult meg a hálózatod.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h22-halozat.html#D28

22.7. Hálózati beavatkozás és aggregációs korlátok

A hálózati elemzés beavatkozási javaslatokhoz vezet. A CASE06-ban a koordinátor három lehetőséget mérlegel. **Híd építése:** egy új kapcsolat két, egymástól elkülönült csoport között (például a gazdálkodók és a civil szervezetek között) csökkenti az úthosszt, és megszünteti a hálózat egyetlen hídtól való függését. **A hidak tehermentesítése:** a nagy közöttiségű szereplők túlterheltek lehetnek; egy második összekötő csatorna (közös üzenőfelület) csökkenti a sérülékenységet. **A helyi szabály megváltoztatása:** ha a szereplők csak a közvetlen szomszédaiknak adják tovább az információt, egy egyszerű szabály („a szárazsági riasztást mindenki két, nem szomszédos szereplőnek is továbbítja”) a teljes hálózat szerkezetét megváltoztathatja anélkül, hogy új kapcsolatokat kellene létrehozni.

Az aggregációnak is vannak korlátai. Egy átlagos mutató (átlagos fokszám, átlagos úthossz) elrejtheti a szerkezet fontos részleteit: két hálózatnak lehet azonos az átlagos fokszáma, mégis az egyik összefüggő, a másik két részre esik. Ugyanígy az egyéni tulajdonságok átlaga sem jelzi előre a csoport viselkedését, ahogy a 21.3. szakasz küszöbmodellje mutatta. A döntéshez a szerkezetet magát kell megvizsgálni.

Átviteli példa: Schelling és az Életjáték külön műhelyben

A Döntési műhely 22. műhelye két külön előbeállítást kínál. A Schelling-modellben az elégedettségi küszöböt és a frissítési sorrendet változtathatod, és megfigyelheted, milyen küszöbnél fordul át a rendszer gyenge keveredésből erős elkülönülésbe. Az Életjátékban néhány egyszerű kezdőalakzat sorsát követheted. Mindkét példa azt mutatja, hogy a lokális szabály és a kimenet kapcsolatát csak a szabály *és* a szerkezet együttes vizsgálatával lehet megérteni.

Összefoglalás

- A hálózat csomópontokból és élekből áll; a fokszám a helyi kapcsolatokat, a közöttiség a közvetítő szerepet méri, és a kettő eltérhet.

- Néhány távoli kapcsolat egy helyi hálózatban drámaian csökkenti az átlagos úthosszt (kicsi világ); a gyenge kapcsolatok az új információ forrásai.
- A preferenciális kapcsolódás koncentrált fokszám-eloszlást ad; a hosszú farok a sok kis tétel együttes jelentőségére figyelmeztet, ha az elérésük olcsó.
- A Schelling-modell és a sejtautomaták szerint a helyi szabályokból olyan rendszerszintű minta is kialakulhat, amelyet senki sem akart; a szimuláció szemléltetés, nem empirikus bizonyítás.
- Az Életjáték és a 110-es elemi szabály univerzális számításra képes, ezért viselkedésük általában csak szimulációval ismerhető meg. A fraktálok önhasonlók, nem egész dimenziójúak, és rajtuk a mért mennyiség a mérés léptékétől függ.
- A családfa és a kapcsolati célábra a személyes hálózat koncentrációját és beszűkülését teszi láthatóvá.
- A hálózati beavatkozás a szerkezetre irányul: hidak építése, a hidak tehermentesítése vagy a helyi szabály megváltoztatása; az átlagos mutatók elrejthetik a szerkezet lényegét.

Önellenőrzés

1. Mi a különbség a fokszám és a közöttiségi központiság között?
2. Miért csökkenti néhány távoli kapcsolat az átlagos úthosszt sokkal jobban, mint a csoportosulást?
3. A hosszú farok és a Pareto-elv ugyanannak az eloszlásnak két nézőpontja. Mitől függ, melyik fontosabb egy döntésben?
4. A Schelling-modellben mindenki csak a szomszédai harmadának hasonlóságát kívánja, a végeredmény mégis 80%. Mit tanít ez az egyéni szándékok és a rendszerszintű kimenet kapcsolatáról?
5. Két hálózat átlagos fokszáma azonos. Következik-e ebből, hogy az információ ugyanolyan gyorsan terjed bennük?
6. Az Életjátékban egy halott sejtnek három élő szomszédja van, egy élő sejtnek négy. Mi lesz velük a következő lépésben?
7. Egy alakzat négy, harmadára kicsinyített másolatából áll (Koch-görbe). Mekkora a hasonlósági dimenziója?
8. Miért nem lehet az Életjáték minden kezdőállapotáról szimuláció nélkül megmondani, hogy kihal-e?

Megoldás.

1. A fokszám a közvetlen kapcsolatok száma; a közöttiség azt méri, a legrövidebb utak mekkora része halad át a csomóponton, vagyis a közvetítő szerepet.
2. Mert egy távoli kapcsolat sok csomópontpár útját rövidíti le egyszerre (minden olyan párét, amely a kapcsolat két végének közelében van), a csoportosulást viszont csak a két végpont helyi szerkezetében változtatja meg.
3. A kis tételek elérésének költségétől: ha minden tétel kezelése jelentős fix költséggel jár, a fej a fontosabb; ha a kezelés szinte ingyenes, a farok együttes értéke jelentős lehet.
4. Hogy a rendszerszintű kimenet nem következik közvetlenül az egyéni szándékokból: enyhe egyéni preferenciák a kölcsönhatások révén erős közös mintát hozhatnak létre. A beavatkozást ezért a szerkezetre és a szabályokra kell irányítani.

5. Nem. Az átlagos fokszám elrejti a szerkezetet: az egyik hálózat lehet összefüggő és kicsi világ jellegű, a másik két, egymástól elszigetelt részre eshet.
6. A halott sejt életre kel (pontosan három élő szomszéd), az élő sejt meghal (négy szomszéd: túlnépesedés).
7. $D = \log 4 / \log 3 \approx 1{,}262$.
8. Mert az Életjáték univerzális számítógép: a kihalás kérdése a megállási problémával rokon, ezért nincs olyan általános eljárás, amely minden kezdőállapotra véges idő alatt helyes választ adna.

Továbbolvasás

- Newman, M. (2018): *Networks* – a hálózatelmélet átfogó tankönyve (Newman 2018).
- Watts, D. J., Strogatz, S. H. (1998) – a kicsi világ hálózatok (Watts és Strogatz 1998).
- Granovetter, M. S. (1973): The strength of weak ties (Granovetter 1973).
- Barabási, A.-L., Albert, R. (1999) – a preferenciális kapcsolódás (Barabási és Albert 1999).
- Schelling, T. C. (1971): Dynamic models of segregation (Schelling 1971).
- Gardner, M. (1970); Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K. (1982) – az Életjáték és univerzalitása (Gardner 1970; Berlekamp és mtsai. 1982).
- Wolfram, S. (1984; 2002); Cook, M. (2004) – az elemi sejtautomaták osztályai és a 110-es szabály univerzalitása (Wolfram 1984, 2002; Cook 2004).
- Mandelbrot, B. B. (1982): *The Fractal Geometry of Nature*; Barnsley, M. (1988): *Fractals Everywhere* – fraktálok és fraktáldimenzió (Mandelbrot 1982; Barnsley 1988).

Gyakorlat

A Döntési műhely 22. műhelyében a hálózati alkalmazással (H22) a központisági mértékeket, a kicsi világot, a hosszú farkat, a Schelling-modellt, az Életjátékot, az elemi sejtautomatákat és a fraktálokat próbálhatod ki, és egy új kapcsolatot javasolhatsz a CASE06 hálózatába. Az N22 notebook a hálózatot a szomszédsági táblából építi fel, és dokumentálja a frissítés sorrendjét és a peremfeltételt.

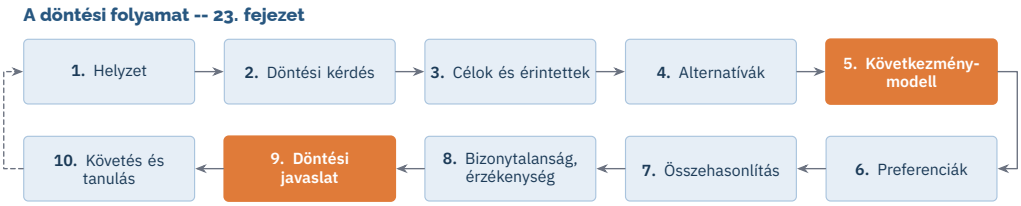
VI. rész – Más szereplők, együttműködés és tanulás



Pannon Egyetem
University of Pannonia

23.

Stratégiai kölcsönhatások



Mi történik, ha a másik is gondolkodik?

Botond kis civil szervezete két pályázat közül csak az egyikre tud alaposan felkészülni, és tudja, hogy a szomszéd város egyesülete ugyanezt mérlegeli. Ha mindketten a nagyobbat célozzák, osztozniuk kell rajta, a kisebb pedig gazdátlan marad.

A lényeg: Ha a kimenet a másik fél döntésétől is függ, a saját döntést a másik várható válaszával együtt kell elemezni.

Kérdés: Melyik pályázatra készülnél, ha tudnád, hogy a versenytárs ugyanezt a kérdést teszi fel magának?

Szemléltető, kitalált helyzet · F23 · Próbáld ki: h23-strategia

Az eddigi fejezetekben a döntéshozó egy „természettel” állt szemben: a bizonytalan körülmények nem reagáltak a döntésére. Sok helyzetben azonban a kimenet más gondolkodó szereplők döntésétől is függ, akik maguk is a mi várható lépéseinket mérlegelik. Ezekkel a helyzetekkel a **játékelmélet** foglalkozik (Neumann és Morgenstern 1944; Osborne 2004). A fejezet a stratégiai kölcsönhatás alapfogalmait mutatja be: a kifizetési táblázatot, a legjobb választ, a Nash-egyensúlyt, a koordinációs játékokat, a többiek gondolkodási mélységének szerepét, a kevert stratégiát, az erőforrás-elosztás Blotto-játékát és a lépések sorrendjének szerepét.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- egy stratégiai helyzetet szereplőkkel, stratégiákkal és kifizetésekkel leírni;
- megkeresni a legjobb válaszokat és a tiszta Nash-egyensúlyokat egy kétszereplős játékban;
- megkülönböztetni a koordinációs és az antikoordinációs játékokat, és értelmezni a kultúrát koordinációs egyensúlyként;
- a szépségverseny-játékon megmutatni, hogyan tér el a tényleges stratégiai gondolkodás a Nash-egyensúlytól (k-szintű gondolkodás, versenyfutás a mélypont felé);
- kiszámítani egy egyszerű kevert egyensúlyt, és értelmezni a közömbösségi feltételt;
- megmagyarázni, miért nincs a Blotto-játékban legjobb tiszta erőforrás-elosztás, és mit jelent ez a gyengébb fél számára;
- visszagöngyölítéssel megoldani egy egyszerű sorrendi játékot, és megítélni egy fenyegetés hihetőségét;
- megnevezni a játékelméleti modell feltevéseit és korlátait.

A fejezet egy kétszereplős pályázati versennyel indul, amelyet a CASE03 portfóliójából bontunk ki. A második szakasz a Nash-egyensúlyt és a koordinációs játékokat, a harmadik a szépségverseny-játékot és a korlátozott stratégiai gondolkodást, a negyedik a kevert stratégiákat tárgyalja. Az ötödik szakasz a Blotto-játék, a hatodik a sorrendi játékok és az elköteleződés témája. Az utolsó szakasz a modell feltevéseit és határait foglalja össze; az együttműködés és az ismételt játékok kérdése a 24. fejezetre marad.

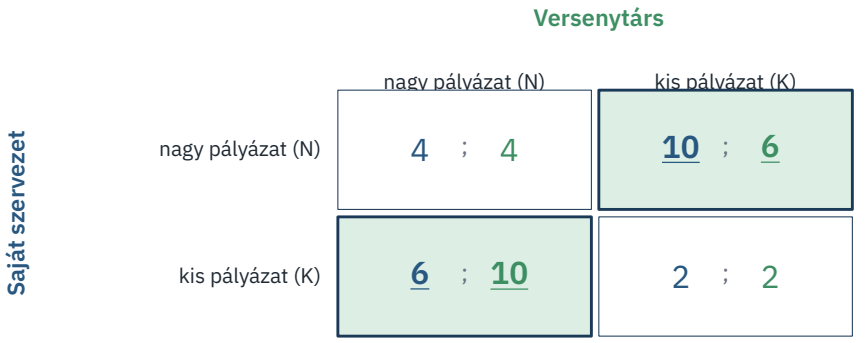
23.1. A stratégiai helyzet leírása

Egy **játékot** három elem határoz meg: a **szereplők** (játékosok), a szereplők **stratégiái** (a lehetséges cselekvési tervek) és a **kifizetések**, amelyek minden stratégiakombinációhoz megadják, mennyit ér a kimenet az egyes szereplőknek. A kifizetés lehet pénz, de lehet a 14.5. szakaszban bevezetett hasznosság is. A kétszereplős, véges stratégiájú játékot **kifizetési táblázattal** írjuk le: a sorok az egyik, az oszlopok a másik szereplő stratégiái, a cellákban a két kifizetés áll.

CASE03 – Két szervezet ugyanazokra a pályázatokra

A 13. fejezet szervezete a portfóliója mellett egy külső forrásra is pályázni akar. Két kiírás van: egy nagy (10 millió Ft) és egy kis (6 millió Ft) keretű. Egy versenytárs szervezet is erre a két kiírásra készül, és mindkét fél csak egy pályázatot tud jó minőségben megírni. Ha a két szervezet ugyanazt választja, a bíráló a keretet megosztja köztük, és mindkettőnek 1 millió Ft többletköltsége keletkezik az erősebb konzorcium megszervezése miatt. A számok szemléltetők.

A helyzet kifizetési táblázata a 23.1. ábrán látható. Ha mindketten a nagy pályázatot választják, mindkettő $10/2 - 1 = 4$ millió Ft-ot kap; ha mindketten a kicsit, $6/2 - 1 = 2$-t. Ha különböző pályázatot választanak, mindkettő a teljes keretet kapja.



Az első szám a saját szervezet, a második a versenytárs kifizetése (millió Ft). Aláhúzás: legjobb válasz a másik választására. Zöld cella: tiszta Nash-egyensúly – ott egyik fél sem jár jobban, ha egyedül választást vált.

23.1. ábra. A pályázati verseny kifizetési táblázata. Két tiszta Nash-egyensúly van: a két szervezet „szétválik”, és mindegyik más pályázatot céloz.

A **domináns stratégia** olyan stratégia, amely a másik fél bármely választására legalább olyan jó, mint bármely más stratégia. Ha van ilyen, a döntés egyszerű. A pályázati versenyben azonban nincs: ha a versenytárs a nagyot választja, nekünk a kicsi jobb ($6 > 4$), ha a kicsit, nekünk a nagy ($10 > 2$). A helyes döntés tehát a másik fél várható döntésétől függ, és ez a stratégiai helyzet lényege.

23.2. Legjobb válasz és Nash-egyensúly

Nash-egyensúly

Egy stratégiakombináció **Nash-egyensúly**, ha benne minden szereplő stratégiája **legjobb válasz** a többiek stratégiájára, vagyis egyik szereplő sem tudja a saját kifizetését növelni úgy, hogy egyedül változtat a stratégiáján (Nash 1950).

Az egyensúly megkeresésének egyszerű eljárása a legjobb válaszok megjelölése. A 23.1. ábrán aláhúzás jelzi, melyik választás a legjobb a másik fél adott választására. Ahol mindkét szám alá van húzva, ott tiszta Nash-egyensúly van. A pályázati versenyben két ilyen cella van: (nagy; kis) és (kis; nagy). Mindkettőben a két szervezet „szétválik”, és együttesen 16 millió Ft-ot nyernek, szemben a (nagy; nagy) kimenet 8 millió Ft-jával.

A Nash-egyensúly nem jelenti, hogy a kimenet a lehető legjobb a résztvevőknek; csak azt, hogy egyoldalú eltérés nem kifizetődő. Ha egy játéknak több egyensúlya van, a modell önmagában nem mondja meg, melyik valósul meg. Thomas Schelling erre vezette be a **fókuszpont** fogalmát: a szereplők gyakran olyan megoldásban egyeznek meg kimondatlanul, amely valamilyen okból kitűnik, például a korábbi gyakorlat, egy hagyomány vagy egy nyilvános bejelentés miatt (Schelling 1960). A pályázati versenyben egy korai, nyilvános szándéknyilatkozat („mi a nagy kiírásra készülünk") ilyen fókuszpontot teremthet.

23.2.1. Koordinációs játékok és kultúra

A pályázati verseny **antikoordinációs** játék: mindkét félnek az a jó, ha *mást* választanak. A **koordinációs játékokban** fordítva: az a jó, ha *ugyanazt* választják. Melyik oldalon közlekedünk, melyik szoftvert vagy fájlformátumot használjuk, milyen nyelven és milyen formában tartjuk a megbeszéléseket. Ezeknek is több egyensúlyuk van, és gyakran egyik sem jobb a másiknál; az összehangolás a lényeg. Egy kialakult egyensúlyból egyedül akkor sem érdemes kilépni, ha egy másik egyensúly összességében jobb lenne (például egy elavult, de mindenki által használt rendszer helyett): ez a 21.5. szakasz bezáródásának stratégiai oldala.

A sok kérdésben egyszerre kialakuló koordinációs egyensúlyokat **kultúrának** is nevezhetjük: egy közösség tagjai számos, egymástól független kérdésben hasonló választ adnak, mert ugyanazokkal a szereplőkkel kell összehangolódniuk. Robert Axelrod modelljében a szereplők egy rácson élnek, és több kulturális jellemzővel rendelkeznek, mindegyiket több lehetséges értékkel. Két szomszéd annál nagyobb eséllyel lép kölcsönhatásba, minél több jellemzőjük egyezik, és kölcsönhatáskor az egyik átveszi a másik egy eltérő jellemzőjét (Axelrod 1997). A helyi hasonulás meglepő módon tartós globális sokféleséghez vezet: belsőleg egységes, egymástól élesen elváló régiók alakulnak ki, amelyek között már semmilyen kölcsönhatás nincs, mert egyetlen közös jellemzőjük sem maradt. A szimulációk szerint az elkülönülő régiók száma csökken, ha több a jellemző, és nő, ha jellemzőnként több a lehetséges érték. A szervezeti silók (22.4. szakasz) és a csapatkultúrák (26. fejezet) hasonló logikát követhetnek: a gyakori helyi egyeztetés egységesít, a közös pontok elvesztése elválaszt.

> **A Nash-egyensúly nem jóslat**
>
> Az egyensúly egy stabil állapot leírása, amelyből senkinek sem éri meg egyedül kilépni. Hogy a szereplők el is jutnak-e oda, az a tanulástól, a kommunikációtól, a korábbi tapasztalattól és attól függ, mennyire racionálisak és mennyire tudják a másik kifizetését. Kísérletekben a résztvevők gyakran eltérnek az egyensúlytól, különösen az első játszmákban.

23.3. Hány lépést gondolunk előre? A szépségverseny-játék

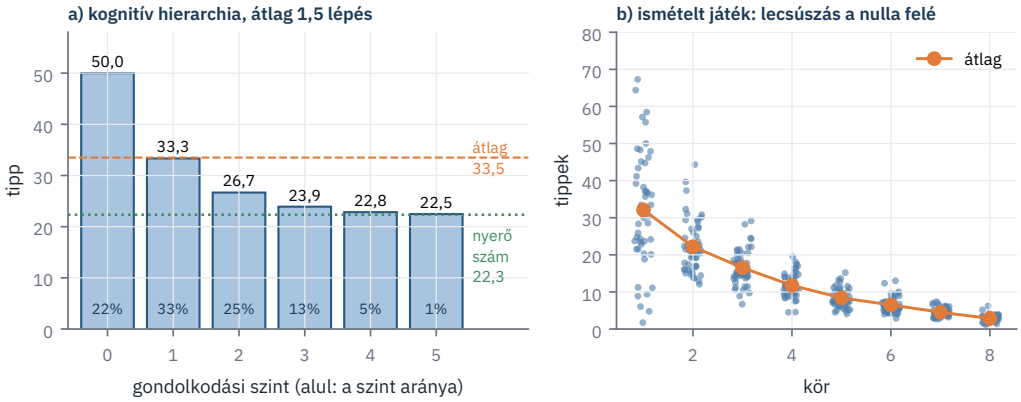
Mennyi az átlag kétharmada?

Eszter a doktori iskola év végi összejövetelén játékot szervez. Mindenki felír egy cetlire egy 0 és 100 közötti számot, és az nyer egy doboz bonbont, akinek a száma a legközelebb van az összes szám átlagának kétharmadához. A közgazdász Gábor gondolkodás nélkül nullát ír, mondván, „ez az egyensúly”. A matematikus Kata hosszan számolgat, a többiek nevetgélve tippelnek. Eszter kíváncsi, ki nyer majd.
A lényeg: Stratégiai helyzetben nem az a kérdés, mi a logikailag helyes válasz, hanem az, milyen mélyen gondolkodnak a többiek. Aki túl kevés lépést gondol előre, ugyanúgy veszít, mint aki túl sokat.
Kérdés: Milyen számot írnál fel, és szerinted mennyi lesz a nyerő szám?
Szemléltető, kitalált helyzet · K40 · Próbáld ki: h23-strategia

John Maynard Keynes 1936-ban a tőzsdei befektetőket egy újságbeli szépségverseny résztvevőihez hasonlította, ahol az nyer, aki azokat az arcokat választja, amelyeket a legtöbben választanak. Ilyenkor nem az számít, kit tartunk mi szépnek, hanem az, hogy szerintünk mit gondolnak a többiek arról, mit gondolnak a többiek (Keynes 1936). A gondolat legegyszerűbb formalizálása a **p-szépségverseny** (*p-beauty contest*): mindenki választ egy számot 0 és 100 között, és az nyer, akinek a száma a legközelebb van az összes szám átlagának p-szereséhez, például kétharmadához (Nagel 1995).

A játék egyetlen Nash-egyensúlya, hogy mindenki 0-t választ. Az érvelés lépésről lépésre halad: az átlag legfeljebb 100, így 67-nél nagyobb számot értelmetlen választani; ha ezt mindenki tudja, az átlag legfeljebb 67, így 44 fölé sem érdemes menni, és így tovább, a dominált stratégiák ismételt elhagyásával egészen 0-ig. Kísérletekben azonban szinte senki sem választ 0-t az első körben. Rosemarie Nagel kísérleteiben a tippek az $50 \cdot 2/3 \approx 33$ és az $50 \cdot (2/3)^2 \approx 22$ érték körül sűrűsödtek: a résztvevők egy-két lépést gondoltak előre (Nagel 1995).

Ezt a viselkedést a **k-szintű gondolkodás** (*level-k*) modellje írja le. A 0. szintű játékos véletlenszerűen választ (átlagosan 50-et), az 1. szintű a 0. szintűekre ad legjobb választ (33,3), a 2. szintű az 1. szintűekre (22,2), és így tovább. Colin Camerer, Teck-Hua Ho és Juin-Kuan Chong **kognitív hierarchia** modelljében minden szint az alacsonyabb szintek keverékére válaszol, a szintek pedig Poisson-eloszlásúak; sokféle játék adataira átlagosan másfél lépésnyi gondolkodás illeszkedik (Camerer és mtsai. 2004). Másfél lépés átlagos mélység mellett a modell szerint az átlag 33,5, a nyerő szám kb. 22 (23.2. ábra). A tanulság nem az, hogy az emberek irracionálisak, hanem hogy a legjobb döntés a *többiek tényleges* gondolkodási mélységétől függ: Gábor a nullával biztosan veszít egy olyan társaságban, ahol az átlag 30 körül van.



23.2. ábra. A kétharmados szépségverseny. a) A gondolkodási szintek tippjei és a kognitív hierarchia modell szerinti átlag (másfél lépés átlagos mélység mellett). b) Ismételt játékban, ha mindenki az előző kör átlagához igazodik, a tippek körről körre a nulla felé csúsznak.

Ha a játékot ugyanaz a csoport többször megismétli, és mindenki az előző kör eredményéhez igazodik, a tippek körről körre csökkennek, és a nulla felé tartanak; Nagel négykörös kísérleteiben jól látszott ez a lecsúszás (Nagel 1995). Page ezt a mintázatot **versenyfutásnak a mélypont felé** (*race to the bottom*) nevezi (Page, é. n.). Árversenyek, egymásra licitáló kedvezmények, a határidők vagy a minőségi követelmények fokozatos lazítása követhet hasonló logikát, ahol mindenki a többiek várható lépésénél egy kicsivel „jobbat” akar ajánlani. A döntéshozó számára a modell két kérdést tesz fel: hány lépést gondolnak előre a versenytársaim, és meddig tart a lecsúszás, mielőtt valamilyen korlát (költség, szabály, hírnév) megállítja?

Próbáld ki: a szépségverseny-játék

Előbb tippeld meg a nyerő számot. Ezután állítsd be a szorzót és a gondolkodási mélységet, játssz le több kört, és figyeld, milyen gyorsan csúsznak a tippek a nulla felé; nézd meg azt is, mi történik, ha a szorzó 1-nél nagyobb.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h23-strategia.html#K40

Kognitív hierarchia és versenyfutás a mélypont felé

A kód a kognitív hierarchia modell szerinti tippeket és átlagot számolja, majd egy ötvenfős csoport öt körét szimulálja, amelyben mindenki az előző kör átlagának kétharmadát tippeli, kis egyéni eltéréssel.

```python
import numpy as np
from math import exp, factorial

def kognitiv_hierarchia(tau, p=2/3, K=12):
    """Poisson-eloszlású gondolkodási szintek: a k-adik szint
    a nála alacsonyabb szintek keverékére ad legjobb választ."""
    f = np.array([exp(-tau) * tau**k / factorial(k)
                  for k in range(K)])
    f /= f.sum()
    tipp = [50.0]                          # 0. szint: átlagosan 50
    for k in range(1, K):
        w = f[:k] / f[:k].sum()
        tipp.append(p * np.dot(w, tipp))  # legjobb válasz
    tipp = np.array(tipp)
    return tipp, np.dot(f, tipp)

tipp, atlag = kognitiv_hierarchia(1.5)
print("szintenkénti tippek:", np.round(tipp[:5], 1))
print(f"átlag {atlag:.1f}, nyerő szám {2 / 3 * atlag:.1f}")

# Ismételt játék: mindenki az előző kör átlagának 2/3-át tippeli,
# kis egyéni eltéréssel -> versenyfutás a nulla felé
rng = np.random.default_rng(4)
tippek = np.clip(rng.normal(atlag, 15, 50), 0, 100)
for kor in range(1, 6):
    cel = 2 / 3 * tippek.mean()
    print(f"{kor}. kör: átlag {tippek.mean():5.1f}, "
          f"nyerő szám {cel:5.1f}")
    tippek = np.clip(cel * rng.lognormal(0, 0.3, 50), 0, 100)
```

A futás eredménye: a szintek tippjei 50; 33,3; 26,7; 23,9; 22,8, az átlag 33,5, a nyerő szám 22,3. Az ismételt játékban az átlag öt kör alatt 32,1-ről 8,4-re csökken.

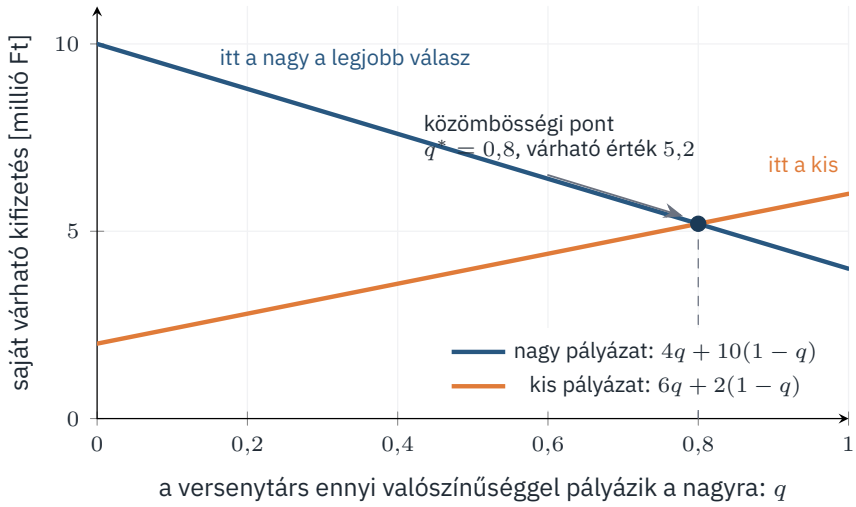
23.4. Kevert stratégia és közömbösség

Ha a két szervezet nem tud egyeztetni, és egyik egyensúly sem tűnik ki, mindkettő bizonytalan a másik választásában. Ilyenkor a **kevert stratégia** fogalma segít: a szereplő valószínűségekkel választ a stratégiái között. A kevert egyensúlyban minden szereplő úgy választja a saját valószínűségeit, hogy a **másik fél közömbös** legyen a stratégiái között; különben a másik egyértelműen a jobbikat választaná.

Jelölje q annak valószínűségét, hogy a versenytárs a nagy pályázatot választja. A saját várható kifizetésünk a nagy pályázattal $4q + 10(1-q)$, a kicsivel $6q + 2(1-q)$. A kettő akkor egyenlő, ha

$$4q + 10(1-q) = 6q + 2(1-q) \quad \Longrightarrow \quad q^{*} = 0{,}8.$$

A 23.3. ábra ezt mutatja: ha a versenytárs 80%-nál kisebb valószínűséggel célozza a nagyot, nekünk a nagy a legjobb válasz, ha nagyobbal, akkor a kicsi. A szimmetrikus kevert egyensúlyban mindkét szervezet 0,8 valószínűséggel pályázik a nagyra, és a várható kifizetésük 5,2 millió Ft.



23.3. ábra. A saját várható kifizetés a versenytárs választásának valószínűsége függvényében. A két egyenes a $q^* = 0{,}8$ pontban metszi egymást.

A kevert egyensúly tanulságos következménye, hogy a két szervezet az esetek 68%-ában ugyanazt a pályázatot választja ($0{,}8^2 + 0{,}2^2 = 0{,}68$), és mindketten rosszabbul járnak, mint bármelyik tiszta egyensúlyban. A koordináció hiánya tehát költséges; ez indokolja, hogy a gyakorlatban a szereplők jelzésekkel, előzetes egyeztetéssel vagy munkamegosztással próbálják elkerülni az ütközést.

Mit jelent a véletlenszerű választás egy szervezet számára?

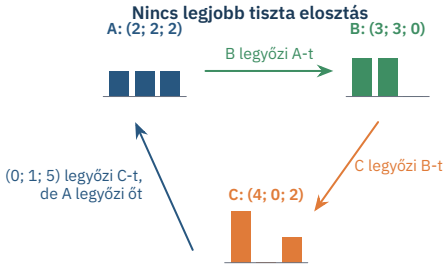
Egy szervezet ritkán dob fel érmét. A kevert stratégia értelmezése inkább az, hogy a versenytárs **nem tudja előre megjósolni** a döntésünket; vagy hogy egy sok hasonló szervezetből álló sokaságban a szervezetek 80%-a választja a nagy pályázatot. A modell azt mondja meg, mekkora ez az arány, amelynél már senkinek sem éri meg változtatni.

23.5. Erőforrások elosztása: a Blotto-játék

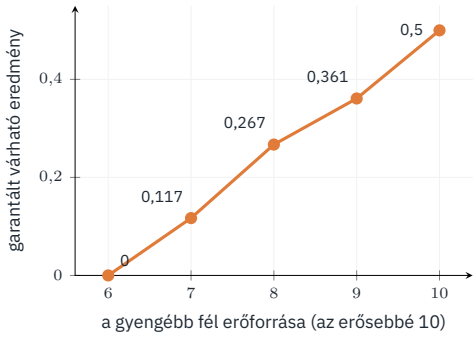
Hová tedd az erőforrásaidat, ha a másik is választ?

Két szervezet három piaci szegmensben verseng, és mindkettő ugyanannyi értékesítőt tud elosztani köztük. Egy szegmenst az nyer meg, aki több embert küld oda, és az nyer, aki több szegmenst megszerez.
A lényeg: Erőforrás-elosztási versenyben nincs legjobb tiszta elosztás; a kiszámíthatóság hátrány, a gyengébb félnek koncentrálnia kell.
Kérdés: Ha kevesebb erőforrásod van, melyik frontot adnád fel tudatosan?
Szemléltető, kitalált helyzet · K20 · Próbáld ki: h23-strategia

A **Blotto-játékot** Émile Borel fogalmazta meg 1921-ben (Borel 1921). Két szereplő véges erőforrást oszt el több front (piac, szegmens, választókerület) között; egy frontot az nyer, aki oda többet tett, és a játékot az nyeri, aki több frontot megszerez. A játék az erőforrás-allokáció stratégiai változata: a 13. fejezet portfóliójában a projektek értéke rögzített volt, itt viszont attól függ, mennyit tesz ugyanoda a versenytárs.



Három front, 6–6 egység; az nyer, aki több fronton van fölényben. Minden kiszámítható elosztásra van legyőző válasz.



Nyerés 1, döntetlen 0,5. A 7 és 8 egységes fél optimális kevert stratégiája mindig felad egy frontot.

23.4. ábra. Bal: a Blotto-játékban minden tiszta elosztásra van legyőző válasz (A → B → C → (0; 1; 5) → A), ezért nincs legjobb tiszta elosztás. Jobb: három fronton a gyengébb fél garantált várható eredménye az erőforrás-arány függvényében (nyerés 1, döntetlen 0,5).

A 23.4. ábra bal oldala a játék legfontosabb tulajdonságát mutatja: **a nyerés nem tranzitív**. Három front és 6–6 egység esetén az egyenletes (2; 2; 2) elosztást legyőzi a (3; 3; 0), azt a (4; 0; 2), azt a (0; 1; 5), amelyet viszont az egyenletes elosztás győz le. Minden kiszámítható elosztásnak van ellenszere, ezért az egyensúly csak kevert stratégiával érhető el. A lineáris programozással (A. függelék) kiszámított egyik egyensúlyban mindkét fél egyenlő valószínűséggel választja a (4; 2; 0), a (0; 4; 2) és a (2; 0; 4) elosztást; az egyenletes elosztás nem

szerepel benne. (Az egyensúlyi kevert stratégia nem egyértelmű, de a játék értéke igen: szimmetrikus esetben 0.)

Az ábra jobb oldala egy aszimmetrikus változatot mutat: az erősebb félnek 10 egysége van, a gyengébbnek 6–10. Ha a gyengébbnek legfeljebb 6 egysége van, mindig veszít. 7 egységgel a garantált várható eredménye 0,117, 8-cal 0,267, 9-cel 0,361. Az optimális stratégiája 7 és 8 egységnél minden esetben **felad egy frontot**, és a maradék kettőre koncentrál. Brian Roberson a folytonos változatra általánosan levezette az egyensúlyi stratégiákat, és megmutatta, hogy a gyengébb fél a frontok egy részének véletlenszerű feladásával és a többire való koncentrálással tud esélyes maradni (Roberson 2006). A játéknak azóta szövetségi és sokfrontos kiterjesztései is vannak (Kovenock és Roberson 2012).

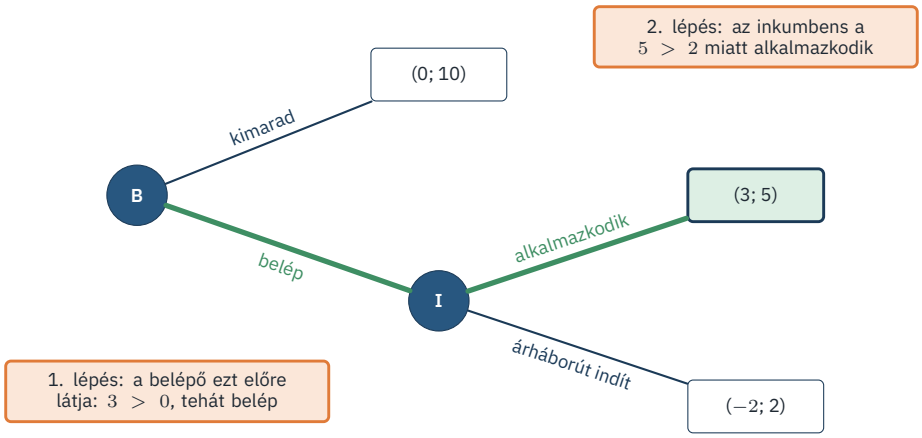
> **Próbáld ki: stratégiai műhely**
>
> A pályázati nézetben változtasd a két keretet és az ütközés költségét, és figyeld, hogyan mozog a közömbösségi pont. A Blotto-nézetben előbb tippeld meg, melyik elosztás a legerősebb, majd játssz a gép ellen: az alkalmazás megmutatja, melyik elosztásod győzhető le, és kiszámítja a kevert egyensúlyt.
> Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h23-strategia.html#K20

23.6. Sorrend és elköteleződés

Sok helyzetben a szereplők nem egyszerre, hanem egymás után lépnek, és a későbbi szereplő látja a korábbi döntését. Az ilyen **sorrendi játékot** játékfával írjuk le, és a 14.4. szakaszban megismert **visszagöngyölítéssel** oldjuk meg: az utolsó döntéstől visszafelé haladva minden döntési pontban kiválasztjuk a döntéshozó számára legjobb lépést.

A 23.5. ábrán egy új szolgáltató (a belépő) azt mérlegeli, belépjen-e egy piacra, ahol egy szervezet (az inkumbens) már működik. Az inkumbens árháborúval fenyeget. Ha azonban a belépő már belépett, az inkumbensnek az alkalmazkodás jobb ($5 > 2$), ezért a fenyegetés **nem hihető**: a belépő ezt előre látja, és belép. A visszagöngyölítéssel kapott megoldás a **részjáték-tökéletes egyensúly**; Reinhard Selten ezzel a fogalommal szűrte ki azokat a Nash-egyensúlyokat, amelyek hiteltelen fenyegetésekre épülnek (Selten 1975).

A tanulság a döntéshozó számára az **elköteleződés** szerepe (Schelling 1960). Az inkumbens akkor tudná elriasztani a belépőt, ha a fenyegetését hihetővé tenné: például ha előre beruházna olyan kapacitásba, amely mellett az árháború már valóban jobb lenne neki, mint az alkalmazkodás. Paradox módon a saját választási lehetőségeink szűkítése javíthatja a helyzetünket, mert megváltoztatja a másik fél várakozásait. A pályázati versenyben a korai, nyilvános szándéknyilatkozat ugyanezt a szerepet tölti be.



B: belépő, I: inkumbens (piacon lévő szervezet). Kifizetés: (belépő; inkumbens), millió Ft.
A zöld út a visszagöngyölítés eredménye: az árháborúval való fenyegetés nem hihető.

23.5. ábra. Belépési játék. Az inkumbens alkalmazkodni fog, ha a belépő már a piacon van, ezért az árháborúval való fenyegetés nem hihető, és a belépő belép.

Az elköteleződés csak akkor működik, ha a másik fél érzékeli és hiszi

Egy belső döntés, amelyről a versenytárs nem tud, nem változtat a viselkedésén. Az elköteleződésnek láthatónak, költségesnek és nehezen visszafordíthatónak kell lennie. Egy olcsón visszavonható bejelentés nem hiteles jelzés.

23.7. A játékelméleti modell feltevései és határai

A játékelméleti modellek erős feltevésekre épülnek, és ezeket minden alkalmazásnál meg kell vizsgálni (Osborne 2004; Page 2018):

- **ismert szereplők és stratégiák:** a valóságban nem mindig tudjuk, kik a versenytársak, és milyen lehetőségeik vannak;
- **ismert kifizetések:** a másik fél céljait és értékeit gyakran csak becsülni tudjuk; ha a kifizetések bizonytalanok, a modell érzékenységvizsgálatot igényel (16. fejezet);
- **racionalitás és a racionalitás közös tudása:** mindenki a saját kifizetését maximalizálja, és ezt a többiekről is feltételezi; a valóságban a korlátozott racionalitás (3.1. szakasz) és a tanulás gyakran fontosabb;
- **egyszeri játék:** ha ugyanazok a szereplők ismételten találkoznak, a jövőbeli kapcsolat megváltoztatja az ösztönzőket; ezzel a 24. fejezet foglalkozik.

A modell értéke ezért ritkán a pontos előrejelzés. Sokkal inkább abban áll, hogy rákényszerít a másik fél nézőpontjának végiggondolására: mit akar, mit tud rólunk, és mit tenne a mi lehetséges lépéseinkre.

Összefoglalás

- A stratégiai helyzetet szereplők, stratégiák és kifizetések írják le; kétszereplős esetben kifizetési táblázattal.
- A Nash-egyensúlyban minden stratégia legjobb válasz a többiekére; több egyensúly esetén a fókuszpontok és a kommunikáció döntik el a kimenetet.
- A koordinációs játékokban az összehangolás a lényeg; a kultúra sok kérdésben kialakult koordinációs egyensúly, és a helyi hasonulás tartós globális sokféleséghez vezethet.
- A szépségverseny-játékban az egyensúly 0, de az emberek átlagosan egy-két lépést gondolnak előre; a legjobb döntés a többiek tényleges gondolkodási mélységétől függ, ismétléskor pedig a tippek a mélypont felé csúsznak.
- A kevert egyensúlyban a valószínűségek a másik felet közömbössé teszik; a koordináció hiánya gyakori ütközéshez és veszteséghez vezet (a példában 68%).
- A Blotto-játékban nincs legjobb tiszta elosztás; a gyengébb fél optimálisan felad frontokat, és a többire koncentrál.
- A sorrendi játékot visszagöngyölítéssel oldjuk meg; a hiteltelen fenyegetés nem hat, a látható és költséges elköteleződés igen.
- A modell feltevései (ismert kifizetések, racionalitás, egyszeri játék) ritkán teljesülnek pontosan; a modell fő haszna a másik fél nézőpontjának végiggondolása.

Önellenőrzés

1. Miért nincs domináns stratégia a pályázati versenyben?
2. Mi a különbség a Nash-egyensúly és a résztvevők számára legjobb kimenet között?
3. A versenytárs 60% valószínűséggel pályázik a nagyra. Melyik pályázat a legjobb válasz, és mennyi a várható kifizetésünk?
4. Miért előnytelen a Blotto-játékban az egyenletes, „mindenhová egyformán” elosztás?
5. Mitől válik hihetővé egy fenyegetés egy sorrendi játékban?
6. A szépségverseny-játékban a szorzó $p = 1/2$. Mit tippel egy 2. szintű gondolkodó, és mi a Nash-egyensúly?
7. Miért nem érdemes egyedül áttérni egy jobb, de még senki által nem használt szoftverre egy olyan csapatban, ahol mindenki ugyanazt az elavult rendszert használja?

Megoldás.

1. Mert a legjobb választás a másik fél döntésétől függ: a versenytárs nagy pályázatára a kicsi, a kicsire a nagy a legjobb válasz.
2. A Nash-egyensúlyban egyik szereplőnek sem éri meg egyedül eltérni, de a kimenet lehet rosszabb, mint egy másik, összehangolt kimenet. A pályázati versenyben

a kevert egyensúly várható értéke (5,2) mindkét fél számára rosszabb, mint bármelyik tiszta egyensúly.

3. $q = 0{,}6 < 0{,}8$, ezért a nagy pályázat: $4 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 0{,}4 = 6{,}4$ millió Ft (a kicsivel $6 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}4 = 4{,}4$ lenne).
4. Mert kiszámítható: egy olyan elosztás, amely két frontra koncentrál, és a harmadikat feladja, mindig legyőzi.
5. Attól, hogy a fenyegetés végrehajtása abban a helyzetben, amikor sorra kerül, a fenyegető érdeke is legyen; ezt egy előzetes, látható és költséges elköteleződés (például kapacitásberuházás) teremtheti meg.
6. A 0. szint átlagosan 50-et, az 1. szint $50/2 = 25$-öt, a 2. szint $25/2 = 12{,}5$-öt tippel. A Nash-egyensúly most is 0.
7. Mert koordinációs játékról van szó: a rendszer értéke attól is függ, hányan használják ugyanazt. Egyoldalú áttérés esetén az átállónak kell vállalnia az összehangolás költségét (fájlcsere, közös munka), ezért a jobb egyensúlyba csak közös, összehangolt váltással lehet átlépni.

Továbbolvasás

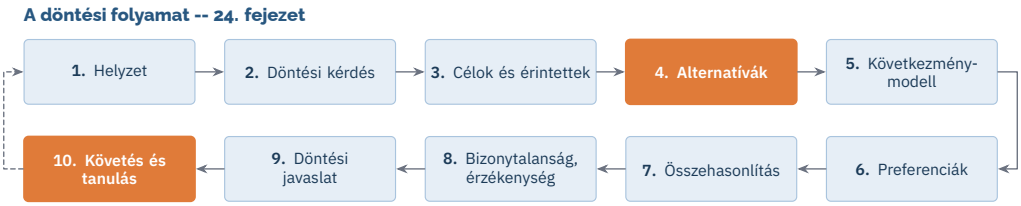
- Osborne, M. J. (2004): *An Introduction to Game Theory* – a játékelmélet bevezető tankönyve (Osborne 2004).
- Nash, J. F. (1950): Equilibrium points in n-person games (Nash 1950).
- Schelling, T. C. (1960): *The Strategy of Conflict* – fókuszpontok és elköteleződés (Schelling 1960).
- Axelrod, R. (1997): The dissemination of culture – helyi hasonulás és globális sokféleség (Axelrod 1997).
- Keynes, J. M. (1936); Nagel, R. (1995); Camerer, C. F., Ho, T.-H., Chong, J.-K. (2004) – a szépségverseny-játék és a kognitív hierarchia (Keynes 1936; Nagel 1995; Camerer és mtsai. 2004).
- Roberson, B. (2006): The Colonel Blotto game (Roberson 2006).
- Selten, R. (1975) – a részjáték-tökéletes egyensúly (Selten 1975).

Gyakorlat

A Döntési műhely 23. műhelyében a stratégiai alkalmazással (H23) a pályázati versenyt, a Blotto-játékot és a szépségverseny-játékot próbálhatod ki, és megkeresheted a közömbösségi pontot más keretek mellett is. Az N23 notebook lineáris programozással számítja ki a Blotto-játék kevert egyensúlyát, és ellenőrzi a fejezet számait.

24.

Együttműködés, közös erőforrás és mechanizmustervezés



Mikor működik a közös megállapodás?

A Fenyő utcai kiskertek közös esővíztartályából eleinte mindenki annyit vesz ki, amennyit szeretne. Aztán jön egy száraz július, és mire Ilona néni sorra kerülne, kiürül a tartály. A jó szándék mellé mérés és elosztási szabály is kell.

A lényeg: Az együttműködés tartósságát a mérés, a hozzáférés és a résztvevőket érő következmények is alakítják.

Kérdés: Milyen szabályt vezetnél be, és hogyan ellenőriznéd a hatását a közös készletre?

Szemléltető, kitalált helyzet · F24 · Próbáld ki: h24-kozos-eroforras

Az előző fejezet versengő szereplőket vizsgált. Sok fontos helyzetben azonban a szereplők együtt jobban járnának, mégsem működnek együtt, mert az egyéni érdek mást diktál. Ez a fejezet azt vizsgálja, mikor és miért válik el az egyéni és a közös érdek, és milyen mechanizmusok (ismétlődés, hírnév, szabályok, intézmények) teszik vállalhatóvá az együttműködést. A **mechanizmustervezés** a játékelmélet „fordított” kérdését teszi fel: milyen szabályokat alkossunk, hogy a szereplők saját érdekükből is a közösen kívánatos kimenetet válasszák (Osborne 2004; Page 2018).

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- felismerni az externáliát egy döntési helyzetben, és megkülönböztetni az egyéni döntések egyensúlyát a közösségi optimumtól;
- egy díj, egy kvóta vagy egy megállapodás hatását egy externáliával terhelt helyzetben értékelni;
- felismerni a fogolydilemma szerkezetét, és ellenőrizni a feltételeit;
- megmagyarázni, hogyan tarthatja fenn az ismétlődés, a hírnév és a hálózati szerkezet az együttműködést;
- egy közös erőforrás készletmérlegét felírni, és különválasztani a készletet és a használók hasznát;
- felismerni a rejtett cselekvés és a rejtett információ problémáját;
- megmagyarázni a második áras aukció ösztönzési tulajdonságát;
- egy intézményi szabályt a részvételi, finanszírozási és ösztönzési feltételek szerint értékelni, és megmutatni egy lehetséges kijátszását.

A fejezet az externália fogalmával indul, amely a fejezet minden további helyzetének közös gyökere. Ezután a fogolydilemmát, majd az ismétlődés és a hálózat szerepét tárgyalja. A negyedik szakasz a CASE06 közös víztartályán mutatja be a közjószág- és közöserőforrás-problémát. Az ötödik szakasz a rejtett cselekvésről és a rejtett információról, a hatodik az aukciókról szól. Az utolsó szakasz az intézményi beavatkozás feltételeit foglalja össze.

24.1. Externáliák: amikor mások döntése a mi helyzetünket is alakítja

Bejöjjek ma az irodába?

Bence egy százfős fejlesztőcég irodavezetője. Mióta szabadon választható az otthoni munka, a kollégák reggelente maguk döntik el, bejönnek-e. Az irodai nap akkor jó, ha bent vannak azok, akikkel egyeztetni lehet; ha viszont túl sokan jönnek, nincs szabad tárgyaló, zajos a nyitott tér, és sorban kell állni a kávéért. Egyes napokon szinte mindenki bejön, és mindenki bosszankodik; máskor alig néhányan, és ők is egyedül ülnek. Bence azon gondolkodik, beavatkozzon-e, és hogyan.

A lényeg: Ha a döntésem mások helyzetét is megváltoztatja, de ezt senki sem veszi figyelembe, az egyéni döntések összessége eltér attól, ami a közösségnek a legjobb. Ez az externália, és ugyanaz a helyzet túlhasználatot és koordinációs kudarcot is okozhat.

Kérdés: Ha mindenki a saját szempontjai szerint dönt, többen vagy kevesebben lesznek bent, mint amennyi a csapatnak összességében a legjobb?

Szemléltető, kitalált helyzet · K41 · Próbáld ki: h24-kozos-eroforras

Egy döntés **externáliát** (külső hatást) okoz, ha a következményei olyanokat is érintenek, akik a döntésben nem vettek részt, és a döntéshozó ezt nem veszi figyelembe (Pigou 1920). Az externália lehet **negatív** (zsúfoltság, zaj, szennyezés, egy közös erőforrás túlhasználata) vagy **pozitív** (a tudás továbbadása, a védőoltás, egy jó hangulatú csapat, a hálózati hatás). A közgazdaságtan alapvető állítása szerint versenyző piacon az egyéni döntések hatékony kimenetet adnak, de csak akkor, ha minden következményt a döntéshozó fizet meg, illetve élvez. Az externália éppen ezt a feltételt sérti: a negatív hatással járó tevékenységből túl sok, a pozitívból túl kevés lesz.

> **Externália és közösségi optimum**
>
> Ha egy szereplő döntése mások kifizetését is változtatja, az egyéni döntésnél a **magánhatárhaszon** egyenlő a magánhatárköltséggel, a közösségi optimumban viszont a másokra gyakorolt hatással együtt számolt **társadalmi** határhaszon és határköltség. A kettő különbsége a **külső határhatás**. Ha ezt egy díj vagy támogatás pontosan pótolja (**Pigou-díj**), az egyéni döntések a közösségi optimumot adják.

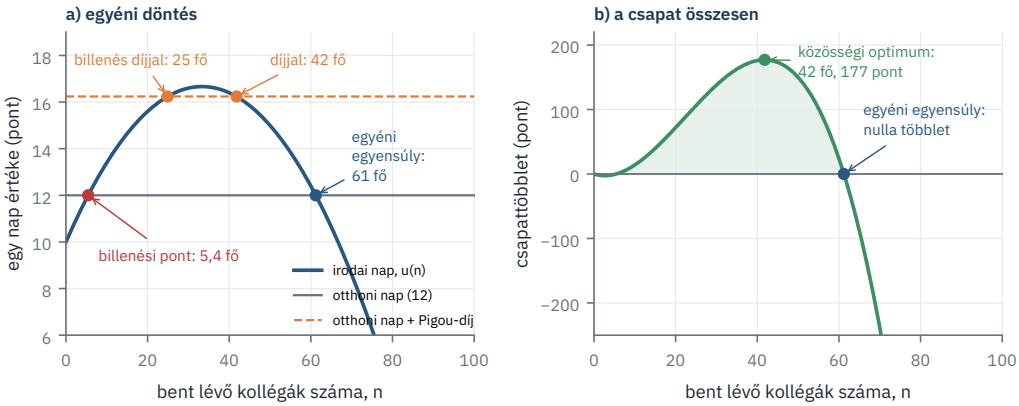
Írjuk le Bence csapatát egy egyszerű modellel. Ha egy napon n kolléga van bent, egy irodai nap értéke mindenkinek

$$u(n) = 10 + 0{,}4\,n - 0{,}006\,n^2 \tag{24.1}$$

pont (a közös munka eleinte növeli, a zsúfoltság később csökkenti), az otthoni nap értéke 12 pont. Mindenki akkor jön be, ha az irodai nap többet ér neki az otthoninál, és senki sem számol azzal, hogyan változtatja meg a jelenléte a többiek napját (24.1. ábra).

Az egyéni döntések egyensúlya ott van, ahol az irodai nap értéke éppen az otthoniéval egyenlő: $u(n) = 12$, ami a görbe csökkenő ágán kb. 61 kolléga. Ennél többen nem jönnek, mert a következő belépőnek már az otthoni nap lenne jobb; kevesebben sem, mert akkor bejönni érné meg. A meglepő az, hogy ebben az egyensúlyban a bejárók napja *pontosan annyit ér*, mint az otthon maradóké: az iroda minden előnye elvész a zsúfoltságban. A csapat összesített többlete az otthoni naphoz képest $n\,\big(u(n) - 12\big)$, ami $n^* \approx 42$ főnél a legnagyobb, 177 pont. Az egyéni döntések tehát túl sok bejárót és nulla többletet adnak, mert az utolsóként belépő nem számol azzal, hogy mindenki más napját egy kicsit rontja: ez a negatív externália.

Az alsó tartományban az externália pozitív: amíg kevesen vannak bent, minden új belépő *javítja* a többiek napját. Ebből egy második jelenség következik. Kb. 5,4 fő alatt az irodai nap kevesebbet ér az otthoninál, így ha egy reggel nagyon kevesen jönnek be, másnap még kevesebben jönnek, és az iroda kiürül. A 0 fős, „halott iroda” is egyensúly, a két egyensúlyt a kb. 5,4 fős **billenési pont** választja el (21. fejezet). Ugyanaz a modell tehát koordinációs kudarcot (senki sem jön be, pedig együtt jó lenne) és túlhasználatot (túl sokan jönnek be) is leír.



24.1. ábra. A bejárás döntése externáliával. a) Az irodai nap értéke a bent lévők számának függvényében: az egyéni döntések egyensúlya ott van, ahol a görbe a csökkenő ágon metszi az otthoni nap értékét (61 fő); az 5,4 fős billenési pont alatt az iroda kiürül. A Pigou-díj a vízszintes vonalat emeli meg. b) A csapat összesített többlete az otthoni naphoz képest: a legnagyobb 42 főnél, az egyéni egyensúlyban nulla.

Mit tehet Bence? Arthur Pigou klasszikus javaslata, hogy a külső hatást árazzuk be: ha a bejárás napi díja éppen akkora, mint amekkora kárt az utolsó belépő a többieknek okoz, az egyéni döntés a közösségi optimumot adja (Pigou 1920). A példában ez napi 4,24 pont (például egy asztalfoglalási díj formájában), és a díjjal az egyensúly valóban 42 fő. A díjnak azonban ára van: az irodai nap értékét mindenkinek csökkenti, és a billenési pontot 5,4-ről kb. 25 főre emeli, így ha a bevezetéskor kevesen járnak be, az iroda kiürülhet. Egy **foglalási rendszer** (legfeljebb 42 asztal, beosztással) díj nélkül éri el ugyanazt a létszámot, és a billenési pontot sem emeli; cserébe adminisztrációval jár, és rugalmatlanabb. Ronald Coase arra hívta fel a figyelmet, hogy ha az érintettek alacsony költséggel meg tudnak állapodni, az externáliát maguk is rendezhetik (például csapatonként rögzített irodai napokkal), és a szabályozó feladata gyakran éppen ennek a megállapodásnak a megkönnyítése (Coase 1960).

W. Brian Arthur El Farol-problémája ugyanezt a helyzetet egy santa fe-i bárral írja le: mindenki akkor megy el csütörtök este, ha arra számít, hogy nem lesz túl tele (Arthur 1994). Ha mindenki ugyanazt a jóslatot követi, a jóslat önmagát cáfolja meg (ha mindenki kevés vendéget vár, sokan mennek el), ezért a látogatottság az egyensúly körül ingadozik; ezt Bence is látja, és az alkalmazásban is kipróbálható. A fejezet további helyzetei – a fogolydilemma, a közjószág és a közös erőforrás – ugyanennek a szerkezetnek további arcai: mindegyikben az egyéni döntés hatásainak egy része másokat ér.

Próbáld ki: externália az irodában

Előbb tippeld meg, hányan lesznek bent, ha mindenki a saját szempontjai szerint dönt. Ezután indítsd el a napokat, változtasd az otthoni nap értékét, a közös munka és a zsúfoltság erősségét, és próbálj ki napi díjat vagy foglalási kvótát; figyeld, mikor ürül ki az iroda.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h24-kozos-eroforras.html#K41

Externália: egyéni egyensúly, közösségi optimum és Pigou-díj

Az egyensúlyokat és az optimumot finom rácson keressük; a Pigou-díj az optimumban az utolsó belépő által a többieknek okozott kár: $-n^{*}\,u'(n^{*})$.

```
import numpy as np

N, otthon = 100, 12.0          # létszám, az otthoni nap értéke

def iroda(n):
    """Egy irodai nap értéke n bent lévő kolléga mellett:
    eleinte nő (közös munka), aztán csökken (zsúfoltság)."""
    return 10 + 0.4 * n - 0.006 * n**2

def metszes(dij, felso):
    """Az iroda(n) - dij = otthon egyenlet gyöke a csúcs
    utáni (felso=True) vagy előtti ágon."""
    n = np.linspace(0, N, 100_001)
    ag = n > 0.4 / 0.012 if felso else n < 0.4 / 0.012
    return n[ag][np.argmin(abs(iroda(n[ag]) - dij - otthon))]

n = np.linspace(0, N, 100_001)
tobblet = n * (iroda(n) - otthon)          # a csapat többlete
n_opt = n[np.argmax(tobblet)]
print(f"egyéni egyensúly: {metszes(0, True):.0f} fő, "
      f"billenési pont: {metszes(0, False):.1f} fő")
print(f"közösségi optimum: {n_opt:.0f} fő, "
      f"többlet {tobblet.max():.0f} pont")

dij = -n_opt * (0.4 - 0.012 * n_opt)       # Pigou-díj
print(f"Pigou-díj: {dij:.2f} pont/nap; egyensúly vele "
      f"{metszes(dij, True):.0f} fő, billenési pont "
      f"{metszes(dij, False):.1f} fő")
```

A futás eredménye: az egyéni egyensúly 61 fő, a billenési pont 5,4 fő; a közösségi optimum 42 fő, 177 pont többlettel. A Pigou-díj 4,24 pont naponta; vele az egyensúly 42 fő, de a billenési pont 24,9 főre emelkedik.

24.2. Fogolydilemma és közös cselekvés

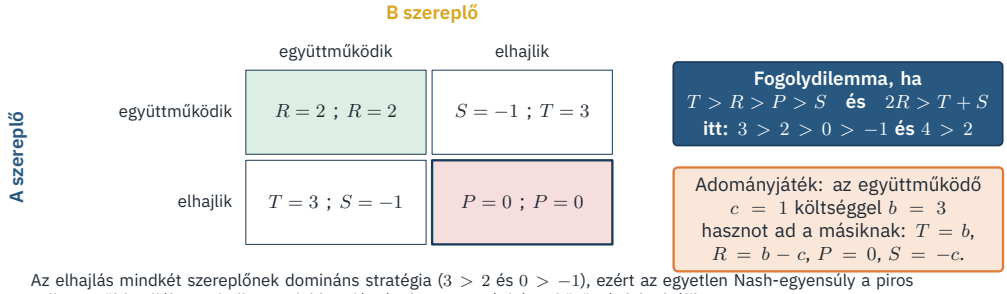
Miért nem működnek együtt, ha mindkettőnek jobb lenne?

Két osztály közösen fejleszthetne egy adatbázist, amelyből mindkettő profitálna. Mindkettő arra vár, hogy a másik tegye bele a munkát; végül egyik sem kezdi el.
A lényeg: Ha az egyéni érdek az elhajlás felé húz, a közösen jobb kimenet magától nem jön létre.
Kérdés: Mi változtatná meg a két osztály ösztönzőit?
Szemléltető, kitalált helyzet · D43 · Próbáld ki: h24-kozos-eroforras

A **fogolydilemmában** két szereplő egymástól függetlenül dönt arról, együttműködik-e vagy elhajlik (Krogerus és Tschäppeler 2011; Axelrod 1984). A kifizetéseket hagyományosan négy betűvel jelöljük: R a kölcsönös együttműködés jutalma, T az egyoldalú elhajlás „kísértése”, S a becsapott együttműködő kifizetése, P a kölcsönös elhajlás „büntetése”. A helyzet akkor fogolydilemma, ha

$$T > R > P > S \qquad \text{és} \qquad 2R > T + S.$$

A második feltétel azt biztosítja, hogy a kölcsönös együttműködés együttesen is jobb legyen, mint a felváltott elhajlás.



Az elhajlás mindkét szereplőnek domináns stratégia ($3 > 2$ és $0 > -1$), ezért az egyetlen Nash-egyensúly a piros cella. A zöld cellában mindketten jobban járnának – az egyéni és a közös érdek elválik.

24.2. ábra. A fogolydilemma adományjáték formájában. Az elhajlás mindkét szereplőnek domináns stratégia, ezért az egyensúly a kölcsönös elhajlás, pedig a kölcsönös együttműködés mindkettőnek jobb.

A 24.2. ábra az **adományjáték** formáját mutatja: az együttműködő $c = 1$ költséggel $b = 3$ hasznot juttat a másiknak. Ekkor $T = 3$, $R = 2$, $P = 0$, $S = -1$, és mindkét feltétel teljesül. A másik fél bármely választására az elhajlás jobb ($3 > 2$ és $0 > -1$), tehát az elhajlás domináns stratégia, és az egyetlen Nash-egyensúly a kölcsönös elhajlás. Ez a fogolydilemma lényege: **az egyénileg ésszerű döntések együttesen rossz kimenetet adnak**.

Az egyensúly, a hatékonyság és az igazságosság külön szempont

A kölcsönös elhajlás Nash-egyensúly, de nem **Pareto-hatékony**: van olyan kimenet (a kölcsönös együttműködés), amely mindenkinek jobb. Egy kimenet lehet hatékony, mégis igazságtalan (ha az egyik fél viseli az összes költséget), és egy szabály lehet igazságos, mégis finanszírozhatatlan. A négy szempontot – egyensúly, hatékonyság, igazságosság, költségfedezet – mindig külön kell vizsgálni.

24.3. Ismétlődés, hírnév és hálózati hatás

Ha ugyanazok a szereplők ismételten találkoznak, a jövőbeli kapcsolat megváltoztatja az ösztönzőket. Robert Axelrod számítógépes versenyein a legegyszerűbb stratégia, a **„szemet szemért”** (*tit for tat*: kezdetben együttműködik, utána azt teszi, amit a másik az előző körben) bizonyult a legsikeresebbnek: barátságos, megtorló, megbocsátó és könnyen érthető (Axelrod 1984).

Az ismétlődés hatása egyszerű feltétellel írható le. Jelölje δ annak valószínűségét, hogy a kapcsolat a következő körben is folytatódik (vagy a jövő diszkonttényezőjét). Ha a másik fél a „szemet szemért” vagy a „kíméletlen” (*grim trigger*: egyetlen elhajlás után örökre elhajlik) stratégiát követi, az együttműködés akkor tartható fenn, ha a jövőbeli veszteség meghaladja az egyszeri nyereséget:

$$\delta \geq \frac{T - R}{T - P}.$$

Az adományjátékban ez $\delta \geq (3-2)/(3-0) = 1/3$, ami a $\delta \geq c/b$ feltétellel azonos. Martin Nowak összefoglalása szerint az együttműködés kialakulásának öt egyszerű mechanizmusa van: rokonsági szelekció, közvetlen viszonosság (ismétlődés), közvetett viszonosság (hírnév), hálózati viszonosság és csoportszelekció; mindegyikhez egy-egy b/c-küszöb tartozik (Nowak 2006).

A **hálózati viszonosság** azt jelenti, hogy ha a szereplők csak a hálózati szomszédaikkal játszanak, az együttműködők csoportjai megvédhetik egymást. Ohtsuki és szerzőtársai szerint gyenge szelekció és „halál–születés” frissítési szabály mellett az együttműködés akkor terjed, ha $b/c > k$, ahol k az átlagos szomszédszám (Ohtsuki és mtsai. 2006). Az adományjáték $b/c = 3$ értékénél ez négy szomszéd mellett nem teljesül, két szomszéd mellett igen.

A hálózati küszöb a frissítési szabállyal együtt érvényes

A $b/c > k$ szabály meghatározott feltevések mellett vezethető le: gyenge szelekció, nagy hálózat és a „halál–születés” típusú frissítés. Más frissítési szabálynál (például ha a szereplők egyszerűen a legsikeresebb szomszédot

utánozzák) a küszöb más, és bizonyos szabályoknál a hálózat egyáltalán nem segíti az együttműködést. A küszöböt ezért mindig a frissítési szabállyal együtt kell megadni, a szimulációban pedig dokumentálni kell.

Próbáld ki: fogolydilemma és ismétlődés

Állítsd be a négy kifizetést, és az alkalmazás jelzi, teljesülnek-e a fogolydilemma feltételei. Ezután változtasd a folytatás valószínűségét, és játssz a „szemet szemért” és a „mindig elhajlik” stratégia ellen. A hálózati nézetben a szomszédszámot és a b/c arányt módosíthatod.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h24-kozos-eroforras.html#D43

24.4. Közjószág és közös erőforrás

Ki fizeti meg a közös szivattyút?

Öt gazdálkodó egy közös tartályból öntöz. Amíg van víz, mindenki annyit vesz ki, amennyit szeretne; száraz nyáron a tartály kiürül, és mindenki lajtos kocsiból kénytelen vizet venni.
A lényeg: Egy közös erőforrásnál a készlet mérlegét és a használók hasznát külön kell követni, mert az egyéni haszon a közös készlet rovására nőhet.
Kérdés: Milyen szabály tartaná a tartályt száraz időben is használható szinten, és ki tudná kijátszani?
Szemléltető, kitalált helyzet · K21 · Próbáld ki: h24-kozos-eroforras

A közgazdaságtan két jószágtulajdonság alapján különböztet meg közös problémákat. A **közjószág** (*public good*) fogyasztásából senki sem zárható ki, és az egyik fogyasztó nem csökkenti a másikét (például egy árvízvédelmi gát). A **közös erőforrás** (*common-pool resource*) használatából nehéz kizárni bárkit, de a használat csökkenti a többiek számára elérhető mennyiséget (például egy víztartály, egy halászterület). Garrett Hardin „a közlegelő tragédiájának” nevezte azt a helyzetet, amikor a szabad hozzáférés az erőforrás kimerüléséhez vezet (Hardin 1968).

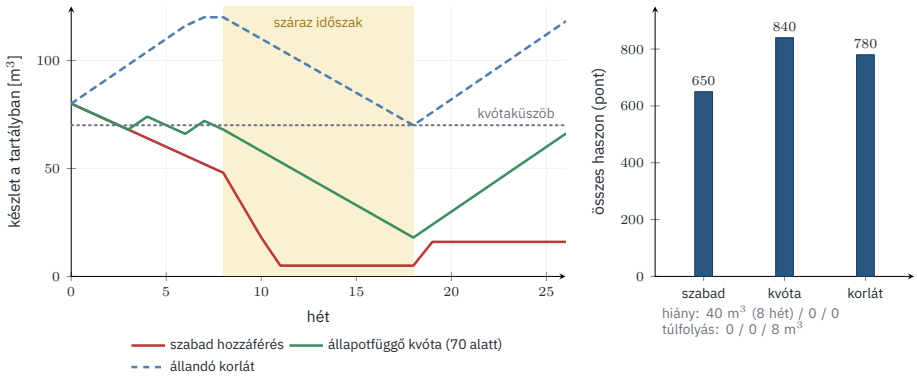
A **közjószág-játékban** n szereplő mindegyike e egységet tehet egy közös alapba; az alapot r-rel megszorozzák, és egyenlően szétosztják. Öt szereplő, $e = 10$ és $r = 2$ esetén minden befizetett egység csak $r/n = 0{,}4$ egységet hoz vissza a befizetőnek, ezért az egyéni érdek a potyázás. Ha mindenki befizet, mindenki 20-at kap; ha senki, mindenki megtartja a 10-et; ha egy szereplő potyázik, a többiek befizetnek, ő 26-ot kap. A kísérletekben a résztvevők kezdetben a keretük 40–60%-át fizetik be, de ez az ismétlések során csökken, hacsak nincs lehetőség a potyázók büntetésére (Ledyard 1995; Fehr és Gächter 2000).

CASE06 – Közös víztartály

Öt gazdálkodó egy 120 m³-es esővíztartályt használ; induláskor 80 m³ víz van benne. A heti beáramlás 16 m³, a 9–18. héten (száraz időszak) csak 5 m³. Minden gazdálkodónak heti 2 m³ alapigénye van (egységenként 3 pont értékkel), és további 2 m³-t is szívesen felhasználna (egységenként 1 pont). A hiányzó alapigényt lajtos kocsival kell pótolni, ami egységenként 4 pont többletköltség. A számok szemléltetők.

A tartály **készletmérlege**: a heti készlet a korábbi készlet, plusz a beáramlás, mínusz a kivétel, mínusz a túlfolyás (ha a tartály tele van). A szimuláció minden szabálynál ellenőrzi, hogy a mérleg bezárul: a 26 hét után a kezdő készlet és a beáramlás összege pontosan egyenlő a kivétel, a túlfolyás és a záró készlet összegével. Három szabályt hasonlítunk össze (24.3. ábra):

- **szabad hozzáférés:** mindenki heti 4 m³-t vesz ki, amíg van víz;
- **állapotfüggő kvóta:** ha a készlet 70 m³ alá csökken, mindenki csak az alapigényét veheti ki;
- **állandó korlát:** mindig csak az alapigény vehető ki.



24.3. ábra. A víztartály készlete a három szabály mellett (bal) és a használók összes haszna (jobb). A szabad hozzáférésnél a tartály a száraz időszakban kiürül; az állapotfüggő kvóta adja a legnagyobb közös hasznot.

Szabad hozzáférésnél a tartály a száraz időszak közepére kiürül: 8 héten át összesen 40 m³ alapigény marad fedezetlen, és a közös haszon 650 pont. Az állandó korlát elkerüli a hiányt, de túl óvatos: a nedves időszakban 8 m³ víz túlfolyik, a felhasználható többlet kárba vész, a haszon 780 pont. Az **állapotfüggő kvóta** a legjobb: nincs hiány, a készlet legalacsonyabb szintje 18 m³, a közös haszon 840 pont. A szabály a visszacsatolás elvét követi (19.4. szakasz): a használat a készlet állapotától függ.

A szabály azonban kijátszható. Ha egyetlen gazdálkodó a kvóta idején is heti 4 m³-t vesz ki, a saját haszna 168-ról 185,2 pontra nő, a többieké viszont 151,2 pontra csökken, mert a száraz időszak végén 3 héten át hiány lép fel, amelynek

költségét mindenki viseli. A közös haszon 840-ről 790-re esik. Az egyéni ösztönző tehát a szabály megszegése felé húz: a szabály csak akkor tartható, ha a kivétel **mérhető**, és a szabályszegésnek **következménye** van.

Elinor Ostrom terepkutatásai megmutatták, hogy a közösségek sok esetben külső szabályozás nélkül is fenntartható módon kezelik a közös erőforrásokat, ha bizonyos intézményi feltételek teljesülnek (Ostrom 1990). Ostrom tervezési elvei között szerepel az erőforrás és a jogosultak világos határa, a helyi viszonyokhoz illeszkedő szabályok, az érintettek részvétele a szabályalkotásban, a használat megfigyelése, a fokozatos szankciók, az olcsó vitarendezés, és az, hogy a külső hatóság elismerje a közösség önszerveződési jogát.

> **Próbáld ki: közös víztartály**
>
> Válaszd ki a használati szabályt, és állítsd a kvótaküszöböt, a beáramlást és a csalók számát. Az alkalmazás külön mutatja a készletet, a készletmérleg ellenőrzését, a közös hasznot és az egyes használók hasznát. A közjószág-nézetben a szorzót és a büntetés lehetőségét módosíthatod.
> Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h24-kozos-eroforras.html#K21

24.5. Rejtett cselekvés és rejtett információ

Az együttműködés másik akadálya az **aszimmetrikus információ**: az egyik fél többet tud, mint a másik (Page 2018). Két típusa van.

A **rejtett cselekvés** (*moral hazard*) akkor lép fel, ha a megbízó nem látja, mennyi erőfeszítést tesz a megbízott, csak az eredményt, amely a véletlentől is függ. Ha a megbízott fix díjat kap, nincs ösztönzője az erőfeszítésre; ha teljesen az eredménytől függ a díjazása, ő viseli a véletlen kockázatát. Bengt Holmström megmutatta, hogy az optimális szerződés a kettő között egyensúlyoz, és minden olyan jelet felhasznál, amely az erőfeszítésről informatív (Holmström 1979). A víztartálynál a vízórák ilyen jelek: nélkülük a kvóta betartása nem ellenőrizhető.

A **rejtett információ** (*adverse selection*) akkor lép fel, ha az egyik fél a szerződés előtt tud valamit, amit a másik nem. George Akerlof „citrompiac” modelljében a használtautó-vásárló nem tudja megkülönböztetni a jó és a rossz autókat, ezért csak az átlagos minőségnek megfelelő árat hajlandó fizetni. Ez az ár a jó autók tulajdonosainak túl alacsony, ezért kivonulnak a piacról, és végül csak a rossz autók maradnak (Akerlof 1970). Garancia, minősítés és szakértői vizsgálat csökkentheti a problémát.

24.6. Aukciók és ösztönzés-kompatibilitás

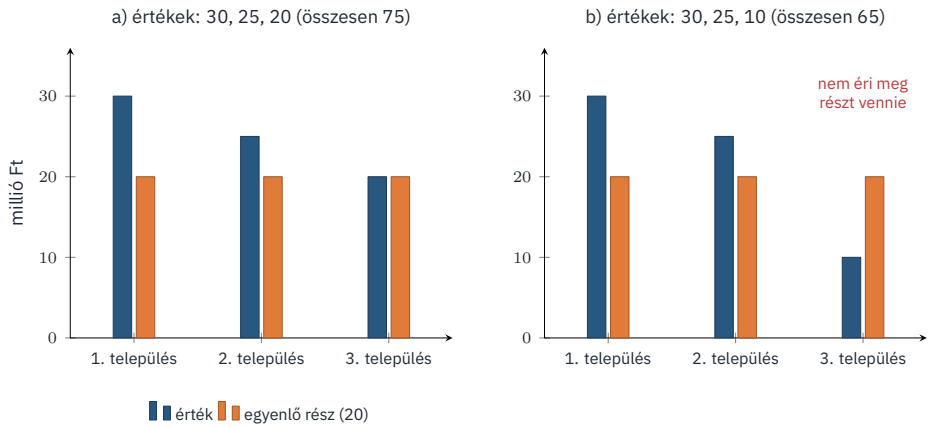
Egy jól megtervezett mechanizmus **ösztönzés-kompatibilis**: a résztvevőknek saját érdekük az igazmondás. William Vickrey **második áras zárt aukciójában** mindenki egyetlen zárt ajánlatot tesz, a legmagasabb ajánlattevő nyer, de a második legmagasabb ajánlatot fizeti (Vickrey 1961). Ebben az aukcióban a saját értékünk szerinti ajánlat **domináns stratégia**: ha alacsonyabbat ajánlunk, elveszíthetjük az aukciót olyan áron, amelyen még megérte volna nyerni; ha magasabbat, nyerhetünk olyan áron, amely már nem éri meg. Ha például három település 70, 55 és 40 millió Ft-ra értékeli egy vízjogi engedélyt, és őszintén ajánlanak, az első nyer, és 55 millió Ft-ot fizet; a nyeresége 15 millió Ft.

A Vickrey-elv általánosítása a Vickrey–Clarke–Groves-mechanizmus, amely közös projektekre is ösztönzés-kompatibilis döntést ad (Clarke 1971; Groves 1973). Ennek ára van: a mechanizmus általában nem fedezi pontosan a költségeket. Myerson és Satterthwaite tétele szerint kétoldalú kereskedelemben nincs olyan mechanizmus, amely egyszerre hatékony, ösztönzés-kompatibilis, önkéntes részvételű és költségfedező (Myerson és Satterthwaite 1983). A mechanizmustervezés ezért kompromisszumok között választ.

24.7. Intézményi beavatkozás, részvétel és finanszírozhatóság

Egy közös beruházás – például egy új szivattyú a tartályhoz – akkor **hatékony**, ha az érintettek értékeinek összege meghaladja a költségét. A megvalósításhoz azonban két további feltétel is kell: a **részvételi feltétel** (mindenkinek megéri részt venni, vagyis a rá eső költség nem nagyobb az értékénél) és a **finanszírozási feltétel** (a befizetések fedezik a költséget).

A 24.4. ábra a) esetében a három település értéke 30, 25 és 20 millió Ft, összesen 75 millió Ft; az egyenlő, 20 millió Ft-os rész mindenkinek megéri. A b) esetben a 3. település értéke csak 10 millió Ft, a projekt még mindig hatékony (65 > 60), de az egyenlő megosztásnál a 3. település kilép, és a maradék kettő nem tudja egyedül finanszírozni. Ha a költséget a bejelentett érték arányában osztják meg (27,7; 23,1; 9,2 millió Ft), a részvételi feltétel teljesül – de ekkor mindenkinek érdeke **alulbecsülni** a saját értékét, hogy kevesebbet fizessen. Ez a szabály lehetséges kijátszása, és ezért nincs egyszerű, minden feltételt teljesítő megoldás.



Közös szivattyú: költsége 60 millió Ft. Mindkét esetben hatékony megépíteni (az értékek összege meghaladja a költséget), de egyenlő költségmegosztásnál a b) esetben a 3. település kilép, és a projekt nem finanszírozható.

24.4. ábra. Közös szivattyú 60 millió Ft-ért három település számára. Mindkét esetben hatékony a beruházás, de egyenlő költségmegosztásnál a b) esetben a 3. település nem vesz részt.

Átviteli példa: a közös kávégép

Egy irodában a munkatársak közös kávégépet vásárolnának. Az egyenlő befizetés azokat sújtja, akik ritkán isznak kávét; a fogyasztás szerinti díj mérést igényel; az önkéntes befizetés potyázáshoz vezet. A Döntési műhely 24. műhelyének haladó feladata a három szabályt a részvételi, a finanszírozási és az ösztönzési feltétel szerint hasonlítja össze, és egy második áras aukciót is kipróbál a gép elhelyezésének jogára.

Összefoglalás

- Az externália olyan következmény, amely a döntésben részt nem vevőket éri; negatív externáliánál az egyéni döntések túl sok, pozitívnál túl kevés tevékenységet adnak. Az irodai példában az egyéni egyensúly 61, a közösségi optimum 42 fő, és az egyensúlyban a többlet nulla.
- A Pigou-díj a külső határhatást árazza be; egy kvóta vagy az érintettek megállapodása (Coase) ugyanazt érheti el, eltérő mellékhatásokkal (például a billenési pont eltolódásával).
- A fogolydilemmában ($T > R > P > S$, $2R > T + S$) az elhajlás domináns stratégia, pedig a kölcsönös együttműködés mindenkinek jobb.
- Az ismétlődés ($\delta \geq (T - R)/(T - P)$), a hírnév és a hálózati szerkezet fenntarthatja az együttműködést; a hálózati küszöb a frissítési szabállyal együtt érvényes.

- A közös erőforrásnál a készletmérleget és a használók hasznát külön kell követni; a CASE06-ban az állapotfüggő kvóta adja a legnagyobb közös hasznot (840 pont), de egyetlen csaló egyénileg nyer vele, közösen veszít.
- A szabály akkor tartható, ha a használat mérhető, a szabályszegésnek következménye van, és az érintettek részt vesznek a szabályalkotásban.
- A rejtett cselekvés és a rejtett információ az ösztönzőket torzítja; a második áras aukció az igazmondást teszi domináns stratégiává.
- Egy intézményi szabályt az egyensúly, a hatékonyság, az igazságosság, a részvétel és a finanszírozhatóság szempontjából külön kell értékelni, és meg kell vizsgálni a lehetséges kijátszását.

Önellenőrzés

1. Ellenőrizd, hogy a $T=5, R=3, P=1, S=0$ kifizetések fogolydilemmát adnak-e.
2. Mekkora folytatási valószínűség kell az együttműködéshez az 1. kérdés kifizetéseivel?
3. Miért nem elég a CASE06-ban egy jó szabály kihirdetése?
4. Miért domináns stratégia a saját érték szerinti ajánlat a második áras aukcióban?
5. Mi a különbség a hatékonysági és a részvételi feltétel között egy közös beruházásnál?
6. Az irodai példában az otthoni nap értéke 12 helyett 14 pont. Hány fős lesz az egyéni egyensúly?
7. Miért lehet egy jó szándékú díj veszélyes, ha a bevezetésekor kevesen járnak be?

Megoldás.

1. Igen: $5>3>1>0$, és $2\cdot 3=6>5+0=5$.
2. $\delta \geq (5-3)/(5-1)=0{,}5$.
3. Mert az egyéni ösztönző a szabály megszegése felé húz: egy csaló a saját hasznát 168-ról 185,2 pontra növeli, miközben a közös haszon csökken. A szabályhoz mérés (vízóra) és következmény (fokozatos szankció) kell.
4. Mert az ajánlat csak azt dönti el, nyerünk-e, az árat a második ajánlat határozza meg. Alacsonyabb ajánlattal olyan aukciót veszíthetünk el, amelyet megérte volna megnyerni; magasabbal olyat nyerhetünk meg, amely már veszteséges.
5. A hatékonysági feltétel a közösségre vonatkozik (az értékek összege meghaladja a költséget), a részvételi feltétel minden egyes szereplőre (a rá eső költség nem nagyobb az értékénél). Egy hatékony projekt is meghiúsulhat, ha a részvételi feltétel valakinél nem teljesül.
6. $u(n)=14$, azaz $0{,}006n^2-0{,}4n+4=0$; a nagyobbik gyök $n=(0{,}4+\sqrt{0{,}16-0{,}096})/0{,}012\approx 54{,}4$, tehát kb. 54 fő.
7. Mert a díj a billenési pontot is megemeli (a példában 5,4-ről kb. 25 főre): ha a bejárók száma ez alatt van, az irodai nap a díjjal együtt kevesebbet ér az otthoninál, és az iroda kiürül. Ilyenkor a díjat magasabb létszámnál, fokozatosan érdemes bevezetni, vagy kvótával helyettesíteni.

Továbbolvasás

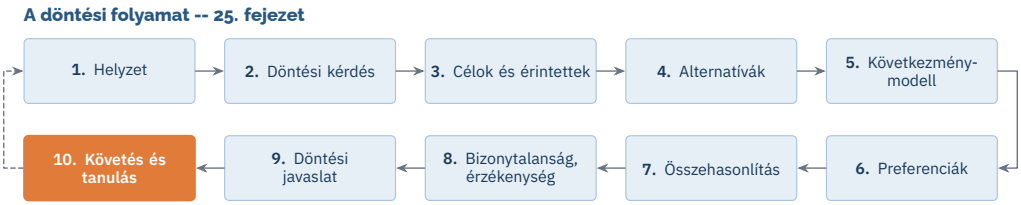
- Pigou, A. C. (1920): *The Economics of Welfare*; Coase, R. H. (1960): The problem of social cost – az externália és kezelésének két klasszikus megközelítése (Pigou 1920; Coase 1960).
- Arthur, W. B. (1994): Inductive reasoning and bounded rationality – az El Farol-probléma (Arthur 1994).
- Axelrod, R. (1984): *The Evolution of Cooperation* – az ismételt fogolydilemma (Axelrod 1984).
- Nowak, M. A. (2006): Five rules for the evolution of cooperation (Nowak 2006).
- Ostrom, E. (1990): *Governing the Commons* – a közös erőforrások intézményei (Ostrom 1990).
- Holmström, B. (1979) és Akerlof, G. (1970) – rejtett cselekvés és rejtett információ (Holmström 1979; Akerlof 1970).
- Vickrey, W. (1961) – a második áras aukció (Vickrey 1961).

Gyakorlat

A Döntési műhely 24. műhelyében a közös erőforrás alkalmazásával (H24) az irodai externáliát, a fogolydilemmát, az ismétlődést, a víztartály szabályait és a közös beruházás finanszírozását próbálhatod ki. Az E24 munkafüzet a víztartály heti készletmérlegét látható képletekkel számolja; az N24 notebook a szabályokat és egy csaló hatását szimulálja, és ellenőrzi, hogy a mérleg minden futásban bezárul.

25.

Tanulás, közös előrejelzés és többmodellű gondolkodás



Több becslésből jobb előrejelzés születik?

Gréta három tapasztalt kollégájától kér becslést a másnapi ügyfélszámra. Néha a hármuk átlaga meglepően pontos, máskor mindhárman ugyanabba az irányba tévednek, például amikor előző nap együtt kávéztak, és megbeszélték a dolgot.
A lényeg: Az átlagolás eredménye az egyéni hibák nagyságától és attól is függ, hogyan különböznek a becslések.
Kérdés: Mikor kérnél egymástól független becslést, és mikor szerveznél közös megbeszélést?
Szemléltető, kitalált helyzet · F25 · Próbáld ki: h25-tanulas

A döntéshozó nemcsak dönt, hanem tanul is: a tapasztalatból, mások sikeréből, saját hibáiból és mások becsléseiből. Ez a fejezet a tanulás néhány formális modelljét mutatja be. A **replikátordinamika** azt írja le, hogyan terjednek a sikeres szabályok utánzással. A **felfedezés és kiaknázás** dilemmája és a **kéthurkú tanulás** a szervezeti tanulás két kulcskérdése. A **diverzitás-azonosság** pontosan megmondja, mikor jobb a csoport becslése az egyénekénél. Végül a többmodellű gondolkodás azt a fejezeteken átívelő tanulságot fogalmazza meg, hogy egyetlen modell helyett gyakran modellek sokasága ad megbízhatóbb képet (Page 2018).

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- kiszámítani egy replikátorlépést, és értelmezni a diszkrét kiválasztási azonosságot;
- megmagyarázni, miért nem jelenhet meg utánzással egy kezdetben senki által nem követett stratégia;
- megkülönböztetni az egy- és a kéthurkú tanulást egy szervezeti hibánál;
- ellenőrizni a diverzitás-azonosságot egy kis példán, és megkülönböztetni a sokféleséget a pontosságtól;
- felismerni a korrelált hibák és a konformitás veszélyét a csoportos becslésben;
- modellportfóliót összeállítani, és indokolni a modellválasztást a feltevések alapján.

A fejezet a replikátordinamikával kezdődik, majd a felfedezés, a kiaknázás és a kéthurkú tanulás kérdésére tér át. A harmadik szakasz az egyéni tanulást, az időzített felidézést tárgyalja. A negyedik és az ötödik szakasz a közös előrejelzés matematikáját és buktatóit, az utolsó a többmodellű gondolkodást mutatja be.

25.1. Replikátordinamika: a sikeres szabályok terjedése

A **replikátordinamika** az evolúciós játékelmélet alapmodellje (Taylor és Jonker 1978; Hofbauer és Sigmund 1998). Egy sokaságban többféle stratégia (viselkedési szabály) él egymás mellett; a stratégiák aránya azzal arányosan nő, mennyivel sikeresebbek az átlagnál. A diszkrét idejű változat egy lépése:

$$p_i' = p_i \frac{f_i}{\bar{f}}, \qquad \bar{f} = \sum_j p_j f_j,$$

ahol p_i az i-edik stratégia aránya, f_i a sikeressége („fitnesze”), $\bar{f}$ az átlagos sikeresség. Szervezeti nyelven: a szervezetek vagy a munkatársak azokat a gyakorlatokat utánozzák, amelyek a környezetükben sikeresebbnek bizonyultak.

CASE07 – Bevezetési stratégiák utánzása

Egy ágazat szervezetei háromféle stratégiával vezetnek be új szolgáltatásokat: **A** gyors, teljes körű bevezetés; **B** fokozatos bevezetés; **C** kísérleti (pilot) bevezetés. Induláskor a szervezetek 50, 30 és 20%-a követi a három stratégiát. Negyedévente a szervezetek a sikeresebb stratégiák felé mozdulnak. Egy negyedik, **D** stratégiát (platformalapú bevezetés) induláskor senki sem követ. A sikerességi értékek szemléltetők.

Az első 12 negyedévben a sikerességek $f = (1{,}0;\ 1{,}3;\ 1{,}1)$. Az első lépésben az átlagos sikeresség $\bar{f} = 0{,}5 \cdot 1{,}0 + 0{,}3 \cdot 1{,}3 + 0{,}2 \cdot 1{,}1 = 1{,}11$, az új arányok

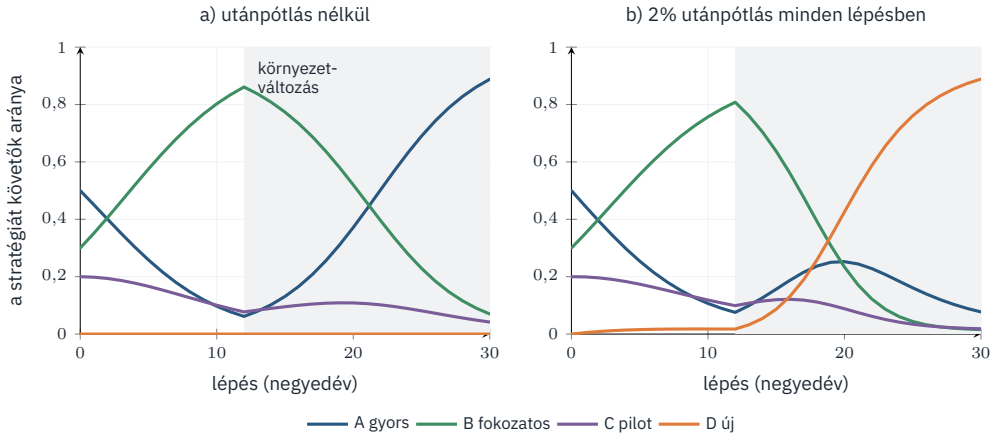
$$p' = \left(\frac{0{,}5 \cdot 1{,}0}{1{,}11};\ \frac{0{,}3 \cdot 1{,}3}{1{,}11};\ \frac{0{,}2 \cdot 1{,}1}{1{,}11} \right) = (0{,}4505;\ 0{,}3514;\ 0{,}1982).$$

Az átlagos sikeresség az új arányokkal 1,1252-re nő. A növekmény (0,01523) pontosan egyenlő a sikeresség szórásnégyzetének és átlagának hányadosával: $\mathrm{Var}_p(f)/\bar{f} = 0{,}0169/1{,}11 = 0{,}01523$. Ez a **diszkrét kiválasztási azonosság**: állandó sikerességi értékek mellett az átlagos sikeresség egy lépésben pontosan $\mathrm{Var}_p(f)/\bar{f}$-fel nő. Az összefüggés Ronald Fisher **természetes kiválasztódási alaptételének** egyszerű változata (Fisher 1930); az általános esetet a Price-egyenlet írja le, amelyben a sikeresség változása is szerepel (Price 1970).

> **A Fisher-tétel pontos feltételekkel érvényes**
>
> Az „átlagos sikeresség mindig nő” állítás csak akkor igaz, ha a sikerességi értékek nem változnak, és nem függnek a stratégiák arányától. Ha a környezet változik, vagy ha egy stratégia sikere attól függ, hányan követik (mint a 23. fejezet játékaiban), az átlagos sikeresség csökkenhet is. A tétel nem azt mondja, hogy az utánzás mindig javít, hanem hogy rögzített feltételek mellett a javulás mértéke a sokféleségtől függ.

> **Fisher tétele és a hat szigma: ellentmondás?**
>
> A Fisher-tétel szerint a javulás üteme a sokféleséggel arányos: minél nagyobb a sikeresség szórása, annál gyorsabban nő az átlag. A hat szigma (16.6. szakasz) viszont éppen a szórás csökkentésére törekszik. Page rámutat, hogy a két tanács nem mond ellent egymásnak, hanem más helyzetre vonatkozik (Page, é. n.). Ha a cél ismert és stabil (például egy csomagológép tömegtűrése), a szórás veszteség, és csökkentése javítja a teljesítményt. Ha a környezet változik, vagy még nem tudjuk, melyik megoldás a legjobb, a változatosság a tanulás nyersanyaga, és a túl korán kiirtott sokféleség a későbbi alkalmazkodást akadályozza. A 25.2. szakasz fogalmaival: a hat szigma a *kiaknázás*, a Fisher-tétel a *felfedezés* logikája (March 1991). Egy jól működő szervezet a kettőt szétválasztja: a bevált folyamatokat szabványosítja, a kísérleti területeken pedig szándékosan fenntartja a változatosságot.

A 25.1. ábra a 12. negyedév utáni környezetváltozást is mutatja: a sikerességek $f = (1{,}2;\ 0{,}9;\ 1{,}0;\ 1{,}5)$ lesznek. A B stratégia, amely a változás pillanatában a szervezetek 86%-át vonzotta, gyorsan visszaszorul. A legfontosabb tanulság azonban a D stratégiáról szól: bár a változás után ez a legsikeresebb, **utánpótlás nélkül sosem jelenik meg**, mert a nulla arány a replikátorlépésben nulla marad. A sokaság a meglévők közül a legjobbat (A) választja, és a szervezetek 89%-a ezt követi. Ha viszont minden lépésben a szervezetek 2%-a véletlenszerűen új stratégiát próbál ki (utánpótlás, „mutáció”), D a 30. negyedévre 89%-os arányt



25.1. ábra. Bevezetési stratégiák aránya replikátordinamikával. A 12. negyedévben a környezet megváltozik, és D lesz a legsikeresebb stratégia. Utánpótlás nélkül D sosem jelenik meg (a); 2%-os utánpótlással a 30. negyedévre a szervezetek 89%-a D-t követi (b).

ér el. **Az utánzás csak a már kipróbált lehetőségek között választ; az újhoz felfedezés kell.**

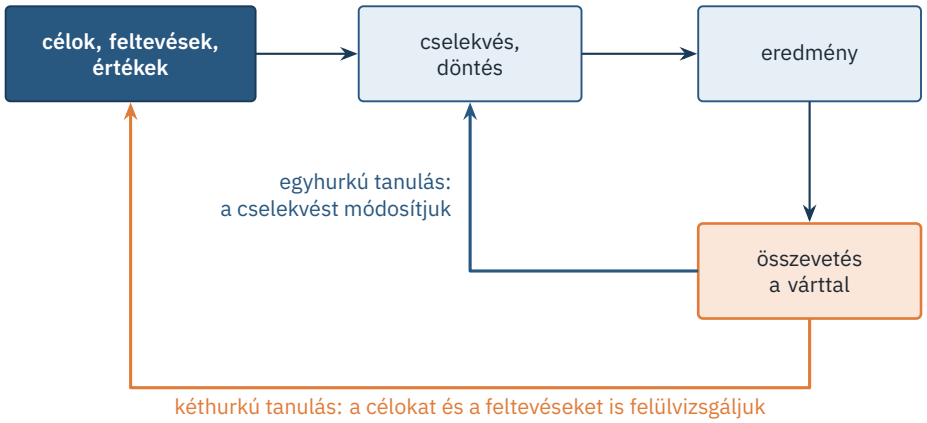
25.2. Felfedezés, kiaknázás és kéthurkú tanulás

James March a szervezeti tanulás alapdilemmájaként írta le a **felfedezés** (*exploration*: új lehetőségek keresése, kísérletezés) és a **kiaknázás** (*exploitation*: a meglévő tudás finomítása és hatékony alkalmazása) közötti feszültséget (March 1991). A kiaknázás hozama gyors és biztos, a felfedezésé lassú és bizonytalan; ezért a szervezetek hajlamosak túlságosan a kiaknázásra összpontosítani, és ez hosszú távon „sikercsapdához” vezet. A 25.1. ábra ugyanezt mutatja: az utánpótlás a felfedezés, amely nélkül a sokaság a meglévő legjobb megoldásba zárkózik.

A hibát javítod, vagy a célt is újragondolod?

Egy projekt rendre csúszik. A csapat minden alkalommal szorosabb ütemtervet készít, de a csúszás megmarad. Valaki végül megkérdezi: biztosan jó célt tűztünk ki?
A lényeg: A hiba javítása mellett a célokat és a mögöttes feltevéseket is érdemes felülvizsgálni.
Kérdés: Melyik ismétlődő problémád mögött állhat egy hibás feltevés?
Szemléltető, kitalált helyzet · D51 · Próbáld ki: h25-tanulas

Chris Argyris és Donald Schön megkülönböztetése szerint az **egyhurkú tanulás** a cselekvést módosítja a célok és a feltevések változatlanul hagyásával, a **kéthurkú tanulás** a célokat, a normákat és a mögöttes feltevéseket is felülvizsgálja (Argyris és Schön 1978; Krogerus és Tschäppeler 2011). A termosztát egyhurkú tanuló: a beállított hőmérséklethez igazítja a fűtést, de nem kérdezi meg, jó-e a beállított érték.



25.2. ábra. Egy- és kéthurkú tanulás. Az egyhurkú tanulás a cselekvést igazítja, a kéthurkú a célokat és a feltevéseket is felülvizsgálja.

A 25.2. ábra a két hurkot mutatja. A csúszó projektnél az egyhurkú válasz a szorosabb ütemterv; a kéthurkú kérdés az, hogy reális volt-e a cél, jól becsültük-e a munkaigényt, és jó-e a feladatok sorrendje. A kéthurkú tanuláshoz biztonságos légkör kell, amelyben a feltevések megkérdőjelezése nem számít támadásnak; erről a 26. fejezet szól. A döntési napló (1.5. szakasz) a kéthurkú tanulás eszköze: a rögzített feltevések utólag összevethetők a tapasztalattal.

Próbáld ki: egy- és kéthurkú tanulás

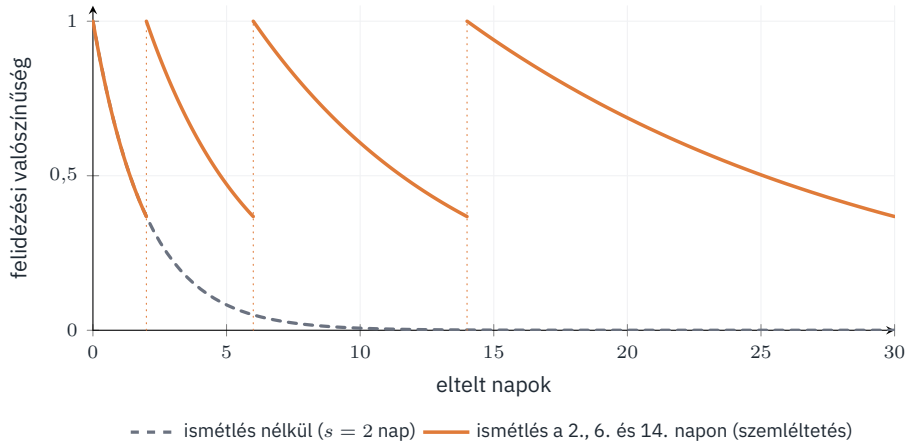
Válassz egy ismétlődő hibát, és döntsd el, hogy a cselekvést vagy a célt, illetve feltevést módosítod. Az alkalmazás egy egyszerű modellen mutatja meg, hogyan alakul a két válasz hatása több körön át.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h25-tanulas.html#D51

25.3. Időzített felidézés: egyéni tanulás

Mikor ismételd át, amit megtanultál?

Egy új szakterület fogalmait a vizsga előtti éjszakán tanulod meg. Egy hónap múlva szinte semmire sem emlékszel; a kollégád, aki néhány naponként átismételte őket, igen.
A lényeg: Az időben elosztott ismétlés tartósabb emlékezést ad, mint ugyanannyi idő egy tömbben.
Kérdés: Melyik tudásodat ismételnéd át rendszeresen, és milyen időközönként?
Szemléltető, kitalált helyzet · D21 · Próbáld ki: h25-tanulas

Hermann Ebbinghaus 1885-ös önkísérletei óta ismert, hogy a megtanult anyag felidézési valószínűsége az idővel gyorsan csökken (**felejtési görbe**), és hogy az ismétlés lassítja a felejtést (Ebbinghaus 1885); az eredményt modern replikáció is megerősítette (Murre és Dros 2015). A **térközös ismétlés** (*spacing effect*) a kognitív pszichológia egyik legjobban alátámasztott jelensége: az időben elosztott gyakorlás tartósabb emlékezést ad, mint ugyanannyi gyakorlás egy tömbben (Cepeda és mtsai. 2006). A *The Decision Book* a SuperMemo-modellt idézi, amely növekvő időközökkel ütemezi az ismétlést (Krogerus és Tschäppeler 2011; Wozniak és Gorzelańczyk 1994).



25.3. ábra. Szemléltető felejtési görbék. Minden ismétlés után a felejtés lassul (a felezési idő megduplázódik). A görbék a mechanizmust mutatják, nem általános optimális ütemtervet.

A 25.3. ábra egy egyszerű modellt mutat: a felidézési valószínűség $R(t) = e^{-t/s}$, ahol az s „stabilitás” minden ismétlés után megduplázódik. Az optimális ismétlési időköz a valóságban attól is függ, mennyi ideig kell megőrizni a tudást: Cepeda és szerzőtársai nagy kísérletében az optimális köz egyhetes

megőrzésnél a megőrzési idő körülbelül 20–40%-a, egyéves megőrzésnél csak 5–10%-a volt (Cepeda és mtsai. 2008).

A szemléltető ütemterv nem általános optimum

Az ábrán és a *The Decision Book* példájában szereplő ismétlési időpontok szemléltetők. Az optimális ütemezés függ az anyagtól, a tanulótól, a kívánt megőrzési időtől és a felidézés sikerességétől; konkrét ütemtervhez a tanulásra vonatkozó kutatási irodalmat kell követni.

Próbáld ki: időzített felidézés

Helyezd el az ismétlési időpontokat a felejtési görbén, és figyeld, hogyan változik a felidézési valószínűség egy választott vizsganapon. Az alkalmazás jelzi, hogy a modell feltevése (a stabilitás megduplázódása) szemléltetés.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h25-tanulas.html#D21

25.4. Közös előrejelzés és a diverzitás-azonosság

Mikor okosabb a csoport, mint a tagjai?

Egy vásáron közel nyolcszáz ember tippelte meg egy ökör súlyát. Egyik tipp sem volt pontos, a tippek mediánja azonban kevesebb mint egy százalékkal tért el a valódi értéktől.
A lényeg: A csoport becslése annál jobb, minél pontosabbak az egyének, és minél jobban különböznek egymástól a becsléseik.
Kérdés: Hogyan gyűjtenéd össze a csapatod becsléseit, hogy azok függetlenek maradjanak?
Szemléltető, kitalált helyzet · K22 · Próbáld ki: h25-tanulas

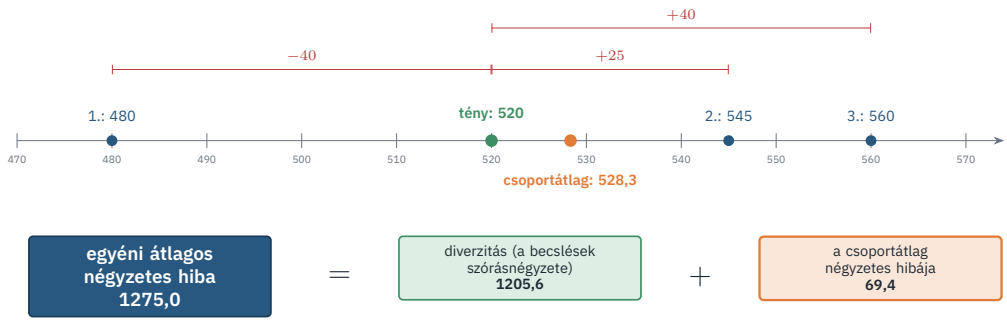
Francis Galton 1907-ben egy vásári versenyen elemezte 787 résztvevő tippjét egy ökör súlyáról; a tippek mediánja (1207 font) kevesebb mint 1%-kal tért el a valódi súlytól (1198 font) (Galton 1907). James Surowiecki „a tömegek bölcsessége” néven népszerűsítette a jelenséget (Surowiecki 2004). Hogy mikor működik, azt egy egyszerű, de pontos azonosság mondja meg.

Diverzitás-azonosság

Legyen $x_1, \dots, x_n$ az egyéni becslés, $\bar{x}$ az átlaguk és θ a valódi érték. Ekkor

$$\underbrace{(\bar{x}-\theta)^2}_{\text{a csoport hibája}} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}_{\text{átlagos egyéni hiba}} - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}_{\text{diverzitás}}.$$

> A csoportátlag négyzetes hibája egyenlő az átlagos egyéni négyzetes hiba és a becslések diverzitásának (szórásnégyzetének) különbségével (Page 2007; Hong és Page 2004; Krogh és Vedelsby 1995).



25.4. ábra. A diverzitás-azonosság a CASE04 példáján. Az egyéni hibák átlaga (1275,0) a diverzitás (1205,6) és a csoportátlag hibájának (69,4) összege.

A CASE04 szolgáltatási kapacitás esetében (18. fejezet) három előrejelző becsüli a másnapi ügyfélszámot: 480, 545 és 560; a tényleges érték 520 (25.4. ábra). Az egyéni négyzetes hibák átlaga $(40^2 + 25^2 + 40^2)/3 = 1275{,}0$. A becslések átlaga 528,3, ennek négyzetes hibája 69,4. A diverzitás 1205,6, és valóban $1275{,}0 = 1205{,}6 + 69{,}4$; a numerikus ellenőrzés eltérése 10^{-12} nagyságrendű, vagyis gépi pontosságú. A csoport tehát sokkal jobb, mint az átlagos tagja, mert a becslések jelentősen különböznek, és **ellentétes irányba tévednek**.

Az azonosság két következménye fontos. Először: a csoportátlag **soha nem rosszabb** az átlagos egyénnél (a diverzitás nem negatív). Másodszor: a csoport akkor jó, ha az egyének pontosak **és** különbözőek. A sokféleség önmagában nem elég, és a pontosság sem.

25.5. Korrelált hibák, konformitás és csoportvita

Ha az előrejelzők ugyanabba az irányba tévednek, a diverzitás kicsi, és az átlagolás alig segít. Ha a három becslés 540, 548 és 556, az átlagos egyéni hiba 826,7, a diverzitás csak 42,7, a csoportátlag hibája pedig 784,0: a csoport alig jobb az átlagos tagjánál. A korrelált hibák tipikus forrásai a közös adatforrás, a közös képzés és módszer, és a **társas befolyás**.

Lorenz és szerzőtársai kísérletében a résztvevők becsléseit akkor is rontotta, ha csak a többiek becsléséről kaptak információt: a becslések közeledtek egymáshoz, a diverzitás csökkent, a csoport pontossága nem javult, miközben a résztvevők magabiztossága nőtt (Lorenz és mtsai. 2011). Irving Janis a **csoportgondolkodás** (*groupthink*) jelenségét írta le: az összetartó csoportok

hajlamosak elnyomni az eltérő véleményeket, és túlbecsülni a saját döntéseik helyességét (Janis 1972).

A gyakorlati tanulság a becslések összegyűjtésének sorrendje. **Először független egyéni becslés**, csak utána megbeszélés. A megbeszélés értéke az, hogy az eltérő becslések mögötti információk és érvek a felszínre kerülnek; ha előbb beszélgetünk, és csak utána becslünk, a diverzitás elveszhet. Philip Tetlock előrejelzési versenyein a legjobb eredményt a független becslésekből induló, majd egymás érveit megismerő és a becslésüket frissítő csapatok érték el (Tetlock és Gardner 2015).

> **Próbáld ki: közös előrejelzés és replikátorlépés**
>
> Előbb add meg a saját becslésedet a másnapi ügyfélszámra, majd mozgasd a három előrejelző becslését és a tényleges értéket. Az alkalmazás folyamatosan ellenőrzi a diverzitás-azonosságot. A replikátornézetben a sikerességi értékeket, a környezetváltozás időpontját és az utánpótlás mértékét állíthatod.
> Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h25-tanulas.html#K22

25.6. Modellportfólió és feltevésalapú modellválasztás

A diverzitás-azonosság nemcsak emberi becslésekre igaz, hanem modellekre is. Ha ugyanarra a kérdésre több, eltérő feltevésekre épülő modellt alkalmazunk, és az eredményeiket összevetjük vagy átlagoljuk, a modellek eltérő hibái részben kioltják egymást. Ez a **többmodellű gondolkodás** alapgondolata (Page 2018). A könyv eddigi fejezetei ezt a gyakorlatot követték: a CASE02 járműválasztását additív értékmodellel, AHP-val, TOPSIS-szal, PROMETHEE-vel és ELECTRE-vel is elemeztük, és a 12. fejezetben az eredmények összevetése mutatta meg, mennyire robusztus a rangsor.

Egy modellportfólió összeállításának három szempontja van. **Feltevésbeli különbözőség:** a modellek különböző mechanizmusokat ragadjanak meg (például egy Markov-modell és egy rendszerdinamikai modell); a csak paramétereikben eltérő modellek hibái erősen korreláltak. **Pontosság:** minden modellnek a saját érvényességi tartományában megbízhatónak kell lennie. **Feltevésalapú választás:** ha a modellek eltérnek, nem átlagolni kell vakon, hanem megkérdezni, melyik modell feltevései illenek jobban a konkrét helyzethez; ez a kéthurkú tanulás modellszintű változata.

Összefoglalás

- A replikátordinamikában a stratégiák aránya a relatív sikerességükkel arányosan változik; állandó sikerességnél az átlagos sikeresség egy lépésben pontosan $\mathrm{Var}_p(f)/\bar{f}$-fel nő.
- A kezdetben senki által nem követett stratégia utánzással sosem jelenik meg: az újhoz felfedezés (utánpótlás) kell.
- A felfedezés és a kiaknázás közötti egyensúly a szervezeti tanulás alapkérdése; a kéthurkú tanulás a célokat és a feltevéseket is felülvizsgálja.
- Az időben elosztott ismétlés tartósabb tudást ad; a konkrét ütemterv a megőrzési céltól függ.
- A diverzitás-azonosság szerint a csoportátlag hibája az átlagos egyéni hiba és a diverzitás különbsége; a csoport akkor jó, ha a tagjai pontosak és különbözőek.
- A korrelált hibák és a társas befolyás csökkentik a diverzitást; először független becslés, utána megbeszélés.
- A modellportfólió feltevéseikben különböző, a saját tartományukban pontos modellekből áll; eltérésük a feltevések felülvizsgálatára ösztönöz.

Önellenőrzés

1. Számítsd ki egy replikátorlépést a $p = (0{,}6;\ 0{,}4)$ arányokkal és $f = (1{,}0;\ 1{,}5)$ sikerességekkel!
2. Miért nem jelenik meg a D stratégia utánpótlás nélkül, bár a legsikeresebb?
3. Mi a különbség az egyhurkú és a kéthurkú tanulás között egy ismétlődő csúszásnál?
4. Négy becslés: 90, 100, 110, 120; a valódi érték 100. Ellenőrizd a diverzitás-azonosságot!
5. Miért érdemes a becsléseket a megbeszélés előtt összegyűjteni?

Megoldás.

1. $\bar{f} = 0{,}6 + 0{,}6 = 1{,}2$; $p' = (0{,}6/1{,}2;\ 0{,}6/1{,}2) = (0{,}5;\ 0{,}5)$.
2. Mert a replikátorlépés az arányt a sikerességgel szorozza: a nulla arány nulla marad. A sokaság csak a már követett stratégiák között választ.
3. Az egyhurkú tanulás a cselekvést módosítja (szorosabb ütemterv), a kéthurkú a célt és a feltevéseket is felülvizsgálja (reális-e a cél, jó-e a munkaigény becslése).
4. Átlag 105, a csoport hibája $5^2 = 25$. Átlagos egyéni hiba $(100 + 0 + 100 + 400)/4 = 150$. Diverzitás $(225 + 25 + 25 + 225)/4 = 125$. Valóban $25 = 150 - 125$.
5. Mert a megbeszélés közelíti egymáshoz a becsléseket, csökkenti a diverzitást, és a csoportátlag hibája nőhet. A független becslések összegyűjtése után a megbeszélés az eltérések mögötti érveket hozza felszínre.

Továbbolvasás

- Page, S. E. (2018): *The Model Thinker* – többmodellű gondolkodás, replikátordinamika, diverzitás-azonosság (Page 2018).
- March, J. G. (1991): Exploration and exploitation in organizational learning (March 1991).

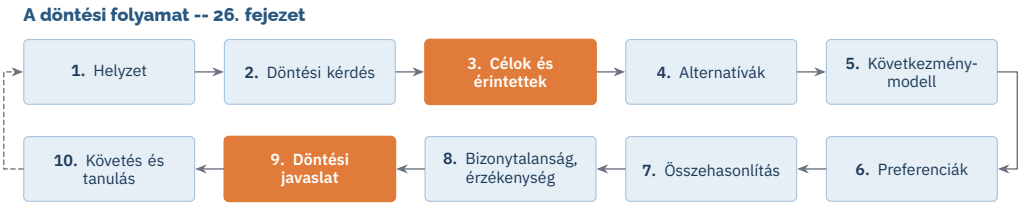
- Argyris, C., Schön, D. A. (1978): *Organizational Learning* – a kéthurkú tanulás (Argyris és Schön 1978).
- Cepeda, N. J. és mtsai (2006, 2008) – a térközös ismétlés (Cepeda és mtsai. 2006, 2008).
- Lorenz, J. és mtsai (2011): How social influence can undermine the wisdom of crowd effect (Lorenz és mtsai. 2011).

Gyakorlat

A Döntési műhely 25. műhelyében a tanulási alkalmazással (H25) a replikátordinamikát, a kéthurkú tanulást, az időzített felidézést és a diverzitás-azonosságot próbálhatod ki. Az E25 munkafüzet a diverzitás-azonosságot és egy replikátorlépést látható képletekkel számolja; az N25 notebook a replikátorpályákat környezetváltozással és utánpótlással szimulálja.

26.

Csapat, motiváció, konfliktus és vezetői döntés



Ugyanarra mondott igent a csapat?

Zsolt projektcsapatának minden tagja lelkesen bólint a közös célra az indító megbeszélésen. Két héttel később kiderül, hogy mindenki mást tart sürgősnek, és mindenki biztos benne, hogy ő érti jól a célt. A következő megbeszélésen Zsolt külön veszi sorra a döntési adatokat és a személyes elvárásokat.

A lényeg: A közös döntéshez az eltérő értelmezések, adatok és elvárások tisztázására is szükség van.

Kérdés: Melyik két kérdéssel kezdenéd a következő megbeszélést, mielőtt feladatokat osztanál?

Szemléltető, kitalált helyzet · F26 · Próbáld ki: h26-csapat

A könyv eddigi módszerei egy döntéshozót feltételeztek, vagy egy csoport véleményeit formális szabállyal összesítették (12. fejezet). A valóságban a döntés emberek között születik, akiknek eltérő szükségleteik, tudásuk, szerepeik és érdekeik vannak, és akiknek a döntést végre is kell hajtaniuk. Ez a fejezet azokat a modelleket gyűjti össze, amelyek a csapatmunka emberi oldalát teszik tárgyalhatóvá: az érintettek szükségleteit, a konfliktusok típusait, a csapatszerepeket, a vezetői viselkedést, a visszajelzést és a csapat fejlődését. A modellek többsége **gondolkodási keret**, nem empirikusan igazolt elmélet; a fejezet ezért mindegyiknél jelzi, mit mond róla a kutatási irodalom.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- egy csoportos döntésnél különválasztani az információs és az érdekbeli eltérést;
- a konfliktuskezelés lehetséges útjait és várható következményeiket végiggondolni;
- csapatszerep- és kompetenciatérképet készíteni, és megtalálni a lefedetlen vagy egyetlen emberen múló feladatokat;
- egy vezetői keret (helyzetfüggő vezetés) illeszkedését kritikusan megvizsgálni;
- erősségekre építő és visszajelzést kérő megbeszélést tervezni;
- megbeszélési tervet és megállapodáslapot készíteni a fennmaradó nézeteltérések listájával.

A fejezet az érintettek szükségleteivel és társadalmi helyzetével kezd. Ezután a konfliktusok kezelését, a csapatszerepeket és a kompetenciákat, majd a helyzetfüggő vezetést tárgyalja. Az ötödik szakasz a visszajelzésről és az erősségekre építő kérdezésről, az utolsó a csapat fejlődéséről és a közös döntés megszervezéséről szól, a CASE03 projektkiválasztó csoportjának példáján.

A tipológiák nem személyiségdiagnózisok

A fejezet modelljei (szükségletpiramis, csapatszerepek, társadalmi miliők, vezetési stílusok) a beszélgetést segítik, nem embereket sorolnak be véglegesen. Egy tipológia hasznos, ha új kérdést vet fel; káros, ha címkévé válik, amely mögé a további megértés elbújik. Ahol az empirikus alátámasztás gyenge, ezt a szöveg külön jelzi.

26.1. Az érintettek szükségletei és társadalmi helyzete

26.1.1. Szükségletek és a Maslow-piramis kritikus olvasata

Mi motivál valakit, és mi motivál téged?

Egy kollégádnak magasabb fizetést ajánlasz egy új feladatért, de nem lelkesedik. Kiderül, hogy számára most az számít, hogy a munkáját a csapat lássa és elismerje.
A lényeg: Az emberek szükségletei és prioritásai különböznek, és élethelyzettől függően változnak.
Kérdés: Mi az, ami most neked a legfontosabb a munkádban, és mi a csapattársadnak?
Szemléltető, kitalált helyzet · D31 · Próbáld ki: h26-csapat

Abraham Maslow 1943-as elmélete szerint az emberi szükségletek hierarchiát alkotnak: fiziológiai szükségletek, biztonság, valahová tartozás, megbecsülés és önmegvalósítás; a magasabb szükségletek akkor válnak meghatározóvá, ha az alacsonyabbak nagyrészt kielégültek (Maslow 1943). A piramisábra maga nem Maslow-tól származik, hanem későbbi tankönyvi ábrázolás. Wahba és Bridwell áttekintése kevés empirikus bizonyítékot talált a szigorú hierarchiára és a szükségletek rögzített sorrendjére (Wahba és Bridwell 1976).

A modell ezért döntéstámogatásban egy egyszerű **kérdéslista**: milyen szükségletek állnak egy érintett döntése mögött, és melyik a legfontosabb most. Nem következtethetünk belőle arra, hogy valaki „még nem jutott el” egy szintre. A 2.2. szakasz érintetti térképe ezzel a kérdéssel egészíthető ki.

26.1.2. Társadalmi miliők és tőkefajták

Ugyanabba a csoportba tartozik, aki ugyanannyit keres?

Két ügyfél jövedelme és kora azonos. Az egyik a fenntarthatóságot és a közösséget tartja fontosnak, a másik a státuszt és a kényelmet; egészen másként reagálnak ugyanarra az ajánlatra.
A lényeg: A társadalmi csoportok nemcsak jövedelem és iskolázottság, hanem értékek és életstílus szerint is különböznek.
Kérdés: Milyen értékek szerint csoportosítanád a te ügyfeleidet vagy érintettjeidet?
Szemléltető, kitalált helyzet · D33a · Próbáld ki: h26-csapat

A **Sinus-miliőmodell** a társadalmat két dimenzió mentén szegmentálja: a társadalmi helyzet (jövedelem, iskolázottság, foglalkozás) és az alapvető értékorientáció (hagyományos, modernizálódó, újraorientálódó) szerint; a csoportok határai átfedők (Barth és mtsai. 2018; Krogerus és Tschäppeler 2011). A modell piackutatási célra készült, és a módszertana csak részben nyilvános; döntéstámogatásban arra figyelmeztet, hogy az érintettek csoportosítása értékeken és életstíluson is múlik.

Pénz, tudás vagy kapcsolatok?

Egy fiatal kutatónak kevés a pénze, de széles a tudása és erős a szakmai hálózata. Egy vállalkozónak sok a pénze, de kevés a kapcsolata a tudományos világhoz. Egy közös projektben mindketten mást hoznak.
A lényeg: A társadalmi pozíció több tőkefajtából áll, amelyek egymástól függetlenül is változhatnak.
Kérdés: Melyik tőkefajtát hozzák a te projekted résztvevői?
Szemléltető, kitalált helyzet · D33b · Próbáld ki: h26-csapat

Pierre Bourdieu a **gazdasági tőke** (pénz, vagyon) mellett megkülönböztette a **kulturális tőkét** (tudás, végzettség, ízlés) és a **társadalmi tőkét** (kapcsolatok, hálózatok); a társadalmi helyzetet a tőkefajták együttese és összetétele határozza meg (Bourdieu 1984). Egy csapatban vagy egy együttműködésben a résztvevők eltérő tőkefajtákat hoznak, és a döntésnél érdemes ezt láthatóvá tenni: ki mivel tud hozzájárulni, és kinek mi a fontos.

26.1.3. Ajándék és státusz: kapcsolati jelzések

Mennyit érjen az ajándék?

Egy partnerszervezet vezetőjének ajándékot vinnél egy közös projekt lezárásakor. Túl drága ajándék kínos, túl olcsó sértő lehet, és a szabályok szervezetenként és kultúránként különböznek.
A lényeg: Az ajándék a kapcsolat jelzése; értéke a kapcsolat jellegétől és a közös normáktól függ.
Kérdés: Milyen normák érvényesek az ajándékozásra a te szakmai környezetedben?
Szemléltető, kitalált helyzet · D09 · Próbáld ki: h26-csapat

A *The Decision Book* egy magazin játékos ajándékozási szabályát idézi, amely a kapcsolat jellegéhez és hosszához köti az ajándék értékét (Krogerus és Tschäppeler 2011). A szabály tudományosan nem megalapozott, vitaindítónak azonban jó. Marcel Mauss klasszikus antropológiai elemzése szerint az ajándék kölcsönösségi kötelezettséget teremt: adni, elfogadni és viszonozni kell, és ez a kapcsolatot fenntartja (Mauss 1925). Szakmai környezetben az ajándékozás szabályait a szervezeti etikai és összeférhetetlenségi szabályzat is meghatározza; ez minden személyes heurisztikánál erősebb.

Mit árul el a cipő?

Egy tárgyaláson a partner drága órát visel, ezért tapasztalt döntéshozónak gondolod. Később kiderül, hogy most kezdett az új munkakörében, és a döntést valaki más hozza.
A lényeg: A státuszjelzések gyors benyomást adnak, de a megfigyelt tényekkel külön kell ellenőrizni őket.
Kérdés: Melyik első benyomásodat módosította utólag egy tény?
Szemléltető, kitalált helyzet · D42 · Próbáld ki: h26-csapat

A státuszmodell a társadalmi helyzet látható jelzéseit (öltözék, tárgyak, nyelvhasználat) tipizálja (Krogerus és Tschäppeler 2011). A szociológiai kutatás szerint a státuszra vonatkozó vélekedések befolyásolják, kit tartunk hozzáértőnek, és kinek a véleménye kap nagyobb súlyt egy csoportban, ami torzíthatja a döntést (Ridgeway 2014). A döntéstámogatás szempontjából a

modell lényege a **jelzés és a tény szétválasztása**: a státuszjelzésből levont következtetés csak hipotézis, amelyet a megfigyelt tényekkel kell összevetni. A 15.2. szakasz alapráta-hibája ugyanezt a mechanizmust írja le.

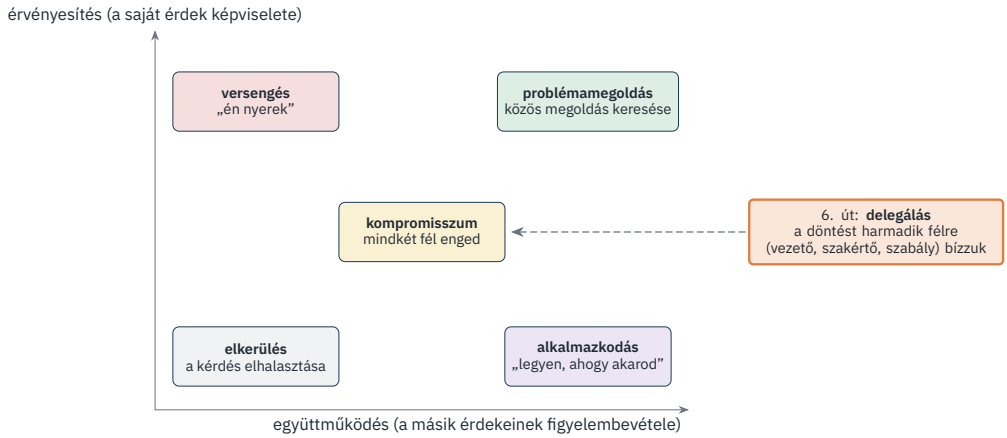
26.2. Konfliktuskezelési utak

Melyik utat választod egy vitában?

Két kolléga nem ért egyet abban, melyik projekt induljon elsőként. Elhalaszthatod a döntést, eldöntheted egyedül, kereshetsz kompromisszumot, vagy leülhettek, hogy közösen jobb megoldást találjatok.
A lényeg: A konfliktusra többféle válasz adható; mindegyiknek más a rövid és a hosszú távú következménye.
Kérdés: Melyik konfliktuskezelési utat választod leggyakrabban, és mikor nem az a legjobb?
Szemléltető, kitalált helyzet · D11 · Próbáld ki: h26-csapat

A konfliktuskezelés legelterjedtebb modellje Thomas és Kilmann két dimenzióra épül: mennyire képviseli valaki a saját érdekét (érvényesítés), és mennyire veszi figyelembe a másikét (együttműködés) (Kilmann és Thomas 1977). A két dimenzió öt jellegzetes utat jelöl ki: versengés, alkalmazkodás, elkerülés, kompromisszum és problémamegoldás (26.1. ábra). A *The Decision Book* konfliktusmodellje ugyancsak a lehetséges reakcióutak végiggondolására ösztönöz (Krogerus és Tschäppeler 2011); ehhez hatodik útként hozzávesszük a döntés **delegálását** egy harmadik félhez (vezető, szakértő, előre rögzített szabály).

A választás következményei a rövid és a hosszú távon eltérnek. Az elkerülés rövid távon nyugalmat hoz, de a probléma visszatér; a versengés gyors döntést ad, de rontja a kapcsolatot; a problémamegoldás időigényes, de tartós és mindkét félnek jobb megoldást adhat. A kutatás fontos megkülönböztetése a **feladatkonfliktus** (vita a tartalomról: célokról, adatokról, módszerekről) és a **kapcsolati konfliktus** (személyes feszültség) (Jehn 1995). De Dreu és Weingart metaanalízise szerint mindkettő negatívan függ össze a csapat teljesítményével, a kapcsolati konfliktus erősebben (De Dreu és Weingart 2003). A gyakorlati tanulság: a tartalmi vitát érdemes a személyes feszültségtől elválasztani, és világos szabályokkal, adatokkal kezelni.



26.1. ábra. A konfliktuskezelés öt útja Thomas és Kilmann nyomán, kiegészítve a delegálással. Egyik sem mindig jó: a választás a helyzettől, a kapcsolat fontosságától és az időnyomástól függ.

26.3. Csapatszerepek és kompetenciák

Ki milyen szerepet tölt be a csapatban?

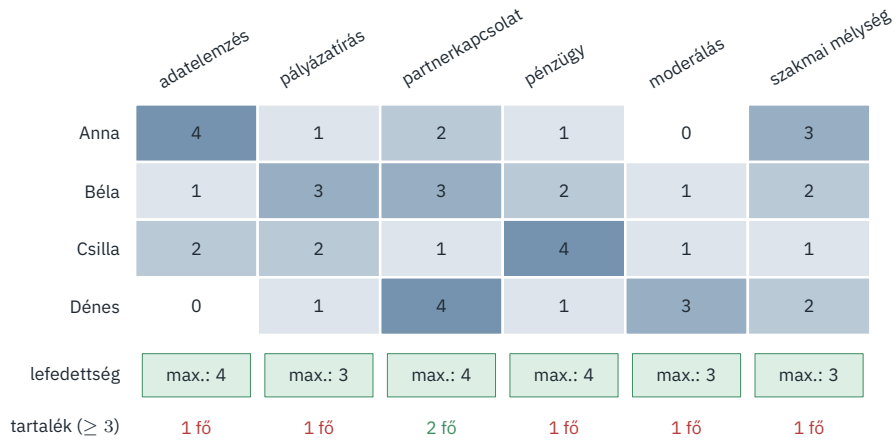
A projektcsapatban sok az ötletgazda, de senki sem figyel a határidőkre és a részletekre. A projekt lelkesen indul, majd elakad a befejezésnél.
A lényeg: Egy csapatban különböző szerepekre van szükség; a szerepek lefedettsége fontosabb, mint bármelyik tag kiválósága.
Kérdés: Melyik szerep hiányzik a csapatodból?
Szemléltető, kitalált helyzet · D48a · Próbáld ki: h26-csapat

Meredith Belbin kilenc **csapatszerepet** írt le (például ötletgazda, megvalósító, befejező, koordinátor, szakértő), és azt állította, hogy a kiegyensúlyozott szerepösszetételű csapatok sikeresebbek (Belbin 1981). A szerepek felmérésére szolgáló kérdőív pszichometriai tulajdonságait több vizsgálat bírálta (Furnham és mtsai. 1993), egy későbbi áttekintés pedig vegyes bizonyítékot talált a modell érvényességére (Aritzeta és mtsai. 2007). A szerepek ezért beszélgetésindítóként hasznosak („ki figyel a befejezésre?”), nem személyiségteszt eredményeként. A váltott gondolkodási nézőpontok módszerét (de Bono hat kalapja) a 4. fejezet tárgyalta (Bono 1985).

Megvan a csapatban minden szükséges tudás?

Egy pályázati csapatban mindenki kiváló szakember. A pénzügyi tervet azonban egyetlen ember tudja elkészíteni, és ő éppen a beadás hetében betegszik meg.
A lényeg: A kompetenciatérkép megmutatja a lefedetlen és az egyetlen emberen múló feladatokat.
Kérdés: Melyik feladat múlik a csapatodban egyetlen emberen?
Szemléltető, kitalált helyzet · D45 · Próbáld ki: h26-csapat

A **kompetenciatérkép** a csapattagokat és a szükséges készségeket egy táblázatban veti össze (26.2. ábra) (Krogerus és Tschäppeler 2011). Két kérdést tesz fel: van-e minden szükséges készséghez megfelelő szintű tag (**lefedettség**), és van-e legalább két ilyen tag (**tartalék**). Az ábra példájában minden készség lefedett, de a partnerkapcsolat kivételével mindegyik egyetlen emberen múlik. Ez a 7.4. szakaszban tárgyalt redundancia emberi erőforrásra alkalmazott változata.



Készségszint 0–4 (önértékelés és társértékelés átlaga, szemléltetés). Minden készségben van legalább egy 3-as vagy jobb szintű tag, de a partnerkapcsolat kivételével mindegyik egyetlen emberen múlik.

26.2. ábra. Kompetenciatérkép egy négyfős csapatra. A küszöb (3) felett minden készség lefedett, de hat készségből ötben nincs tartalék.

26.4. Helyzetfüggő vezetés mint vizsgálandó keret

Mennyi irányítás kell egy új munkatársnak?

Egy tapasztalt kolléga új feladatot kap, amelyben még kezdő. Vezetőként ugyanúgy kezeled, mint a megszokott feladatainál, és csodálkozol, hogy elakad.
A lényeg: A szükséges irányítás és támogatás a munkatárs adott feladatra vonatkozó felkészültségétől függ, nem az általános tapasztalatától.
Kérdés: Melyik munkatársad kapott olyan feladatot, amelyben más támogatásra van szüksége, mint eddig?
Szemléltető, kitalált helyzet · D47 · Próbáld ki: h26-csapat

Paul Hersey és Kenneth Blanchard **helyzetfüggő vezetési** modellje szerint a vezetőnek a munkatárs feladatspecifikus felkészültségéhez kell igazítania az irányító (feladatközpontú) és a támogató (kapcsolati) viselkedését: kezdőnél sok utasítás, majd fokozatosan több támogatás, végül delegálás (26.3. ábra) (Hersey és Blanchard 1969). A modell a gyakorlatban rendkívül elterjedt, empirikus alátámasztása azonban gyenge. Thompson és Vecchio a modell három változatát tesztelte, és csak részleges, a kezdő munkatársakra korlátozódó támogatást talált (Thompson és Vecchio 2009).

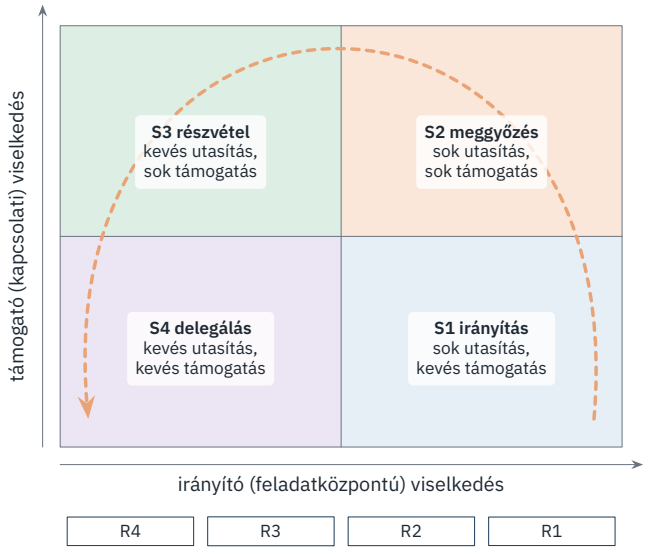
A modell ezért **vizsgálandó keret**: hasznos kérdéseket tesz fel (milyen felkészült ez a munkatárs *ebben* a feladatban? mennyi útmutatást és mennyi bátorítást igényel?), de az előírásait nem kell mechanikusan követni. Az 1.6. szakasz figyelmeztetése itt különösen érvényes: egy könnyen megjegyezhető, elterjedt modell nem azonos egy igazolt modellel.

26.5. Visszajelzés és erősségekre építő kérdezés

Amit mások látnak rólad, és te nem

Egy megbeszélés után egy kolléga megjegyzi, hogy gyakran félbeszakítod a többieket. Te úgy érzed, csak lendületes vagy.
A lényeg: A saját és mások által érzékelt viselkedésünk eltérése a visszajelzés legfontosabb tanulási lehetősége.
Kérdés: Kitől kérnél visszajelzést a következő héten, és milyen konkrét kérdéssel?
Szemléltető, kitalált helyzet · D14 · Próbáld ki: h26-csapat

A **Johari-ablak** négy mezőre osztja az önismeretet aszerint, hogy egy tulajdonságunkat mi magunk, illetve mások ismerik-e: nyílt, vak, rejtett és ismeretlen terület (Luft és Ingham 1955). A modellt a 3.4. szakasz részletesen



Empirikus megjegyzés: a modell előírásait a vizsgálatok csak részben támasztják alá; kiinduló kérdéssorként használjuk, nem diagnózisként.

26.3. ábra. A helyzetfüggő vezetés négy stílusa a munkatárs feladatspecifikus felkészültsége szerint, Hersey és Blanchard nyomán. A szaggatott görbe a modell ajánlását mutatja.

bemutatta; csapatkontextusban a „vak terület” a döntő: a visszajelzés teszi láthatóvá, amit mások látnak, mi nem.

Milyen vagy most, és milyen szeretnél lenni?

Egy fejlesztő beszélgetésen felrajzolod, hogyan látod magad néhány tengely mentén, és mellé azt is, milyen szeretnél lenni. A két profil eltérése egy-két tengelyen kiugró.
A lényeg: A saját és a kívánt profil tengelyenkénti összevetése konkrét fejlődési célt jelöl ki, nem összesített személyiségpontot.
Kérdés: Melyik tengelyen a legnagyobb az eltérés a mostani és a kívánt profilod között?
Szemléltető, kitalált helyzet · D18 · Próbáld ki: h26-csapat

Az **Uffe Elbæk-modell** a dán politikusról és a Kaospilot iskola alapítójáról kapta a nevét. Egy önreflexiós eszköz, amelyben a saját profilunkat néhány ellentétpár mentén (például elméleti–gyakorlati, egyéni–közösségi) rajzoljuk fel, majd összevetjük a kívánt profillal (Krogerus és Tschäppeler 2011). A modell nem mérőeszköz; a tengelyenkénti eltérések a beszélgetést és a CASE05 személyes fejlődési céljainak (3.4. szakasz) megfogalmazását segítik.

Mit mond a beszélgetés mintázata?

A heti megbeszélésen mindig ugyanaz a két ember beszél, a többiek csak bólintanak. A jegyzőkönyv szerint mindenki egyetért; a folyosón másról szól a beszélgetés.
A lényeg: Nemcsak az számít, mit mondunk, hanem az is, ki kivel, milyen gyakran és milyen módon beszél.
Kérdés: Ki nem szólal meg a megbeszéléseiden, és miért?
Szemléltető, kitalált helyzet · D27 · Próbáld ki: h26-csapat

A **finom jelzések** modellje a beszélgetés tartalma mellett a mintázatra és a megfigyelhető hatásra irányítja a figyelmet (Krogerus és Tschäppeler 2011). Amy Edmondson kutatása szerint a **pszichológiai biztonság**, vagyis az a közös meggyőződés, hogy a csapatban nem jár büntetés a kérdésért, a hiba beismeréséért vagy az eltérő véleményért, összefügg a csapat tanulási viselkedésével és teljesítményével (Edmondson 1999). Ha néhány tag sosem szólal meg, a csapat elveszíti a diverzitás előnyét (25.4. szakasz).

Mi működik jól, és hogyan építhetünk rá?

Egy csapat évértékelője rendre a hibák listájával kezdődik, és mindenki védekezik. Az idei megbeszélés azzal indul, hogy mi sikerült a legjobban, és mi tette lehetővé.
A lényeg: Az erősségekre építő kérdések más ötleteket és más hangulatot hoznak, mint a hibák keresése.
Kérdés: Mi volt az elmúlt hónap legjobb munkapillanata, és mi tette lehetővé?
Szemléltető, kitalált helyzet · D34 · Próbáld ki: h26-csapat

Az **Appreciative Inquiry** (erősségekre építő kérdezés; a *The Decision Book* „AI-modellnek” nevezi, ami nem a mesterséges intelligenciára utal) David Cooperrider és Suresh Srivastva szervezetfejlesztési megközelítése (Cooperrider és Srivastva 1987; Krogerus és Tschäppeler 2011). A hibák elemzése helyett azt kérdezi, mi működik jól, mi tette lehetővé, és hogyan lehetne erre építeni. Egy ötletre adott válaszban a „Mi tetszik benne? Hogyan lehetne továbbfejleszteni?” kérdések több új lehetőséget hoznak, mint az azonnali kritika. A módszer nem helyettesíti a hibák elemzését (a 17.5. szakasz biztonsági szemlélete továbbra is érvényes), de jól kiegészíti.

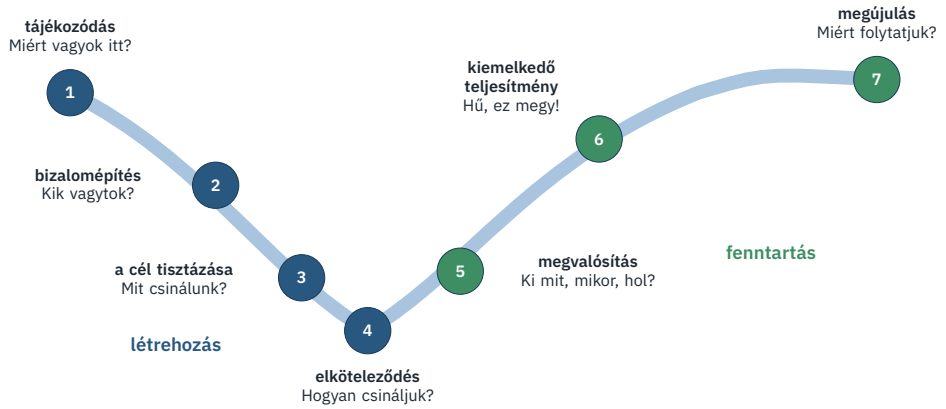
26.6. A csapat fejlődése és a közös döntés megszervezése

Hol tart a csapatotok?

Egy új projektcsapat lelkesen kezdi a munkát, de a harmadik héten vita tör ki arról, mi is a pontos cél. Kiderül, hogy a célt az első megbeszélésen senki sem mondta ki egyértelműen.
A lényeg: A csapat fejlődési fázisaihoz tisztázó kérdések tartoznak; a megválaszolatlan kérdések később visszatérnek.
Kérdés: Melyik kérdés maradt megválaszolatlan a csapatodban?
Szemléltető, kitalált helyzet · D44 · Próbáld ki: h26-csapat

A **Drexler–Sibbet csapatteljesítmény-modell** hét fázist különböztet meg, mindegyikhez egy-egy kulcskérdéssel: tájékozódás, bizalomépítés, a cél tisztázása, elköteleződés, megvalósítás, kiemelkedő teljesítmény és megújulás (26.4. ábra) (Drexler és mtsai. 1988; Krogerus és Tschäppeler 2011). Az első négy fázis a csapat létrehozása, a további három a fenntartása. A modell lényeges állítása, hogy egy korábbi fázis megválaszolatlan kérdése később visszatér. Rokon modell Tuckman négy fázisa (alakulás, viharzás, normaképzés, működés) (Tuckman 1965). A csapathatékonyság kutatása szerint a világos, közös cél, a megfelelő összetétel és a támogató környezet a

csapatteljesítmény legfontosabb feltételei (Hackman 2002; Kozlowski és Ilgen 2006).



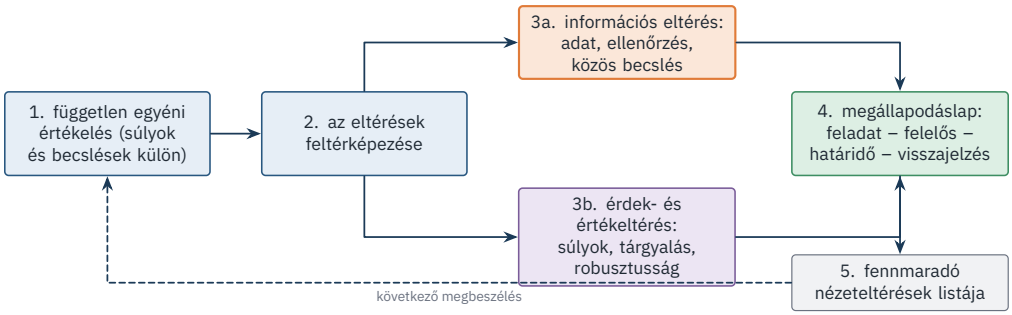
Ha egy korábbi fázis kérdése megválaszolatlan marad, a csapat később oda tér vissza (például a megvalósításnál újra a célról vitatkozik). A fázisokhoz tartozó kérdések Drexler, Sibbet és Forrester (1988) nyomán, szabad fordításban.

26.4. ábra. A Drexler–Sibbet csapatteljesítmény-modell hét fázisa a fázisok kulcskérdéseivel.

> **CASE03 – A projektkiválasztó csoport**
>
> A CASE03 szervezetében egy háromfős csoport (pénzügyi vezető, fenntarthatósági felelős, kutatási vezető) dönti el, melyik projekt induljon elsőként a P2, a P6 és a P7 közül. Az eredményt és a fenntarthatóságot a 13. fejezet adataiból vesszük, a megvalósítási kockázatot (0–10, kisebb a jobb) a tagok maguk becsülik. A vita előtt mindenki külön megadja a súlyait és a kockázatbecslését.

A független egyéni értékelés (additív értékmodell, 0–1 skálákon) szerint a pénzügyi vezető a P2-t (0,700), a másik két tag a P7-et (0,802, illetve 0,729) tenné az első helyre. Az eltérés két forrásból adódhat: a **súlyokból** (érdek- és értékeltérés) vagy a **becslésekből** (információs eltérés). Az egyéni lapok összevetése megmutatja, hogy a pénzügyi vezető a P7 kockázatát 8-ra becsülte, a többiek 4-re. A csoport először ezt az információs eltérést tisztázza: a pénzügyi vezető elmondja, hogy egy korábbi, hasonló projekt csúszására gondolt; a kutatási vezető bemutatja, miben különbözik a P7 ütemezése. A közös becslés 4 lesz. Ezzel a pénzügyi vezető saját súlyaival is a P7 kerül az élre (0,720 a P2 0,700-as értékével szemben), és az átlagos súlyokkal is (0,751). A súlyok eltérése ebben a döntésben nem változtat a sorrenden, ezért nem kell róluk vitatkozni.

A 26.5. ábra a közös döntés folyamatát foglalja össze. Az információs eltérést adattal, ellenőrzéssel és közös becsléssel kezeljük; az érdek- és értékeltérést tárgyalással, a súlyok robusztusságának vizsgálatával (12.5. szakasz) vagy



26.5. ábra. A közös döntés megszervezése. A független egyéni értékelés után az eltéréseket típusuk szerint szétválasztjuk, és a megállapodáslap mellett a fennmaradó nézeteltéréseket is rögzítjük.

delegálással. A megbeszélés eredménye a **megállapodáslap**: minden feladathoz felelős, határidő és a visszajelzés módja tartozik. Ugyanilyen fontos a **fennmaradó nézeteltérések listája**: ami nem dőlt el, azt nem kell elhallgatni, hanem rögzíteni kell, hogy a következő megbeszélésen vagy a megvalósítás tapasztalatai alapján visszatérhessenek rá.

Próbáld ki: csapatműhely

Válassz egy csapatfázist, és rendelj hozzá tisztázó kérdést; az alkalmazás jelzi, ha egy korábbi fázis kérdése megválaszolatlan maradt. A további nézetekben a konfliktuskezelési utak következményeit, a csapatszerep- és kompetenciatérképet, a helyzetfüggő vezetés kérdéseit és a CASE03 csoport egyéni értékeléseit próbálhatod ki.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h26-csapat.html#D44

Átviteli példa: visszajelzés és fejlődési cél

A CASE05 személyes fejlődési esetében egy munkatárs a Johari-ablak és az Elbæk-profil segítségével fogalmaz meg egy fejlődési célt, majd egy erősségekre építő beszélgetésben két kollégától kér visszajelzést. A Döntési műhely 26. műhelye ehhez kérdéssort és megállapodáslap-sablont ad.

Összefoglalás

- A csapatmodellek többsége gondolkodási keret; a tipológiák nem személyiségdiagnózisok, és empirikus alátámasztásuk modellenként eltér.
- Az érintettek szükségletei és társadalmi helyzete (szükségletek, értékek, tőkefajták) különböznek; a státuszjelzést a tényektől el kell választani.

- A konfliktusra öt-hat út adható (versengés, alkalmazkodás, elkerülés, kompromisszum, problémamegoldás, delegálás); a feladatkonfliktust a kapcsolati feszültségtől el kell választani.
- A csapatszerep- és kompetenciatérkép a lefedetlen és az egyetlen emberen múló feladatokat teszi láthatóvá.
- A helyzetfüggő vezetés hasznos kérdéseket tesz fel, de előírásai gyengén alátámasztottak; vizsgálandó keretként használjuk.
- A visszajelzés, a pszichológiai biztonság és az erősségekre építő kérdezés a csapat tanulását segíti.
- A közös döntés menete: független egyéni értékelés, az információs és az érdekbeli eltérés szétválasztása, tisztázás vagy tárgyalás, megállapodáslap és a fennmaradó nézeteltérések listája.

Önellenőrzés

1. Miért érdemes a csoport tagjaitól a vita előtt független értékelést kérni?
2. A CASE03 csoportban miért nem kellett a súlyokról vitatkozni?
3. Mi a különbség a feladatkonfliktus és a kapcsolati konfliktus között, és miért fontos?
4. Mit mutat meg a kompetenciatérkép, amit egy egyszerű névsor nem?
5. Miért nevezzük a helyzetfüggő vezetést „vizsgálandó keretnek”?

Megoldás.

1. Mert így megmarad a vélemények diverzitása (25.4. szakasz), és az egyéni lapok összevetése megmutatja, hogy az eltérés a súlyokból vagy a becslésekből ered.
2. Mert az információs eltérés (a P7 kockázatbecslése) tisztázása után mindhárom súlyrendszerrel és az átlagos súlyokkal is a P7 került az élre; a súlyok eltérése ebben a döntésben nem befolyásolta a sorrendet.
3. A feladatkonfliktus a tartalomról (célokról, adatokról, módszerekről), a kapcsolati konfliktus személyes feszültségről szól. Mindkettő ronthatja a teljesítményt, a kapcsolati erősebben; ezért a tartalmi vitát érdemes adatokkal és szabályokkal, a személyes feszültségtől elválasztva kezelni.
4. A készségek lefedettségét és a tartalékot: melyik feladathoz nincs megfelelő szintű tag, és melyik múlik egyetlen emberen.
5. Mert hasznos kérdéseket tesz fel a feladatspecifikus felkészültségről, de az előírásait az empirikus vizsgálatok csak részben támasztják alá; nem szabad mechanikusan követni.

Továbbolvasás

- Thomas, K. W., Kilmann, R. H. (1977) és De Dreu, C. K. W., Weingart, L. R. (2003) – konfliktuskezelés és konfliktustípusok (Kilmann és Thomas 1977; De Dreu és Weingart 2003).
- Belbin, R. M. (1981) és Aritzeta, A. és mtsai (2007) – csapatszerepek és érvényességük (Belbin 1981; Aritzeta és mtsai. 2007).
- Hersey, P., Blanchard, K. H. (1969) és Thompson, G., Vecchio, R. P. (2009) – helyzetfüggő vezetés és tesztje (Hersey és Blanchard 1969; Thompson és Vecchio 2009).

- Edmondson, A. (1999): Psychological safety and learning behavior in work teams (Edmondson 1999).
- Kozlowski, S. W. J., Ilgen, D. R. (2006): Enhancing the effectiveness of work groups and teams (Kozlowski és Ilgen 2006).

Gyakorlat

A Döntési műhely 26. műhelyében a csapatalkalmazással (H26) a fejezet tizennégy modelljét próbálhatod ki, és a CASE03 csoport egyéni értékeléseiből közös döntést készíthetsz. Az E26 munkafüzet a megállapodáslapot (feladat – felelős – határidő – visszajelzés) és a fennmaradó nézeteltérések listáját kezeli.

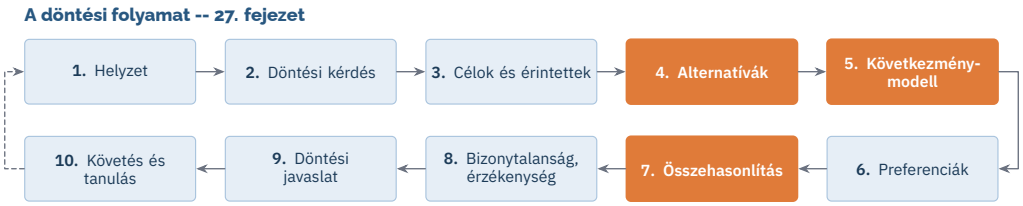
VII. rész – MI-támogatás és integrált döntési gyakorlat



Pannon Egyetem
University of Pannonia

27.

MI-támogatás a döntési folyamatban



A magabiztos javaslatot is ellenőrzöd?

Mira késő este kéri meg a nyelvi modellt, hogy rangsorolja a beérkezett ajánlatokat. A válasz gyors és magabiztos, Mira már továbbküldené. Reggel, a táblázat újraszámításakor derül ki, hogy a modell egy kizárt ajánlatot tett az első helyre.

A lényeg: Az MI javaslatát a felhasznált adatokhoz, korlátokhoz és ellenőrizhető számításokhoz kell kapcsolni.

Kérdés: Melyik három ellenőrzést végeznéd el a javaslat elfogadása előtt?

Szemléltető, kitalált helyzet · F27 · Próbáld ki: h27-mi-ellenorzes

A nagy nyelvi modellek és más mesterségesintelligencia-eszközök (MI) a döntési folyamat sok lépésében gyorsan és jól használhatók: alternatívákat és kritériumokat javasolnak, adatokat strukturálnak, ellenérveket fogalmaznak meg, és érthető magyarázatot írnak egy számítás eredményéről. Ugyanakkor folyékony, magabiztos szöveget akkor is adnak, ha a tartalom hibás vagy kitalált. Ez a fejezet azt mutatja be, hogyan illeszthető az MI a könyvben eddig felépített döntési folyamatba úgy, hogy a **döntési felelősség az embernél maradjon**, és minden állításnak ellenőrizhető státusza legyen.

Két „AI" a könyvben

A 26. fejezetben szereplő AI-modell az *Appreciative Inquiry* (erősségekre építő kérdezés) rövidítése. Ez a fejezet a mesterséges intelligenciáról szól, és következetesen az MI rövidítést használja.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- egy döntési feladatot MI-vel támogatható és emberi felelősségű lépésekre bontani;
- MI-eszköztől alternatíva- és kritériumjelölteket kérni, és ezeket a korábbi fejezetek szűrőivel értékelni;
- az MI tény- és számállításait forráshoz és tesztelt számításhoz kötni;
- elkülöníteni a generált javaslatot az igazolt eredménytől, és minden állításhoz státuszt rendelni;
- az MI-t ellenérvek és feltevéskritika megfogalmazására használni;
- reprodukálható, naplózott, felülvizsgálható MI-támogatott munkafolyamatot összeállítani.

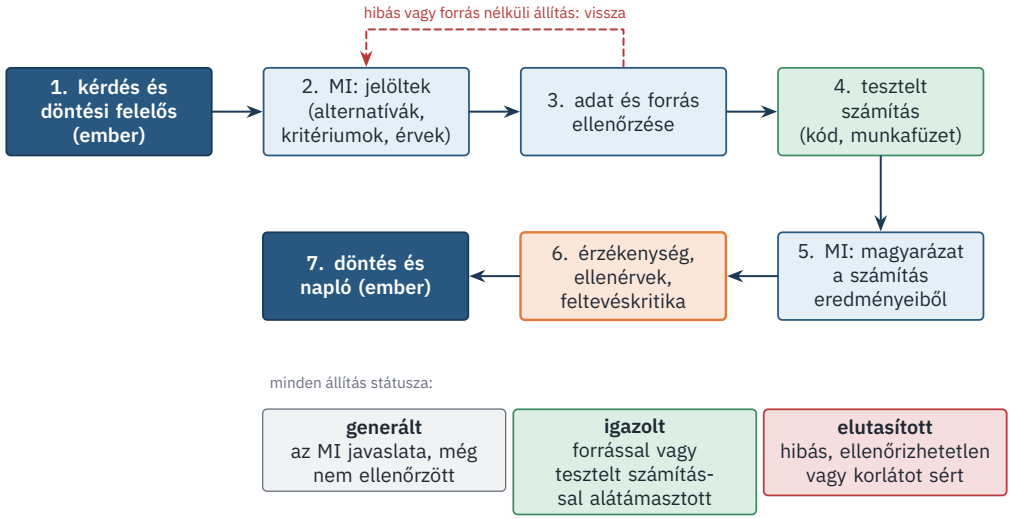
A fejezet a feladatbontással és a felelősség kérdésével kezd. Ezután sorra veszi a döntési folyamat azon lépéseit, ahol az MI segíthet: a jelöltek generálását, az adatok strukturálását, a számítás és a magyarázat összekapcsolását és a feltevéskritikát. Az utolsó szakasz a naplózásról, a reprodukálhatóságról és a szabályozási keretről szól.

27.1. Feladatbontás és emberi döntési felelősség

Melyik lépést bízod az MI-re, és melyiket nem?

Egy beszerzési döntést készítesz elő. Az MI-től kérhetsz ötleteket, összefoglalót, számítást és ajánlást is. Ha minden lépést rábízol, már nem tudod megmondani, melyik állítás honnan származik.
A lényeg: Az MI-támogatás ott hasznos, ahol a hozzájárulása ellenőrizhető; a döntésért és az ellenőrzésért az ember felel.
Kérdés: A te döntési folyamatodban melyik lépés eredményét tudnád a legkönnyebben ellenőrizni?
Szemléltető, kitalált helyzet · K23 · Próbáld ki: h27-mi-ellenorzes

Az MI-támogatás első kérdése nem az, hogy mit tud az eszköz, hanem az, hogy a döntési folyamat melyik lépésében milyen hozzájárulás **ellenőrizhető**. A 27.1. ábra egy ilyen munkafolyamatot mutat. A kérdés megfogalmazása és a döntés az ember feladata; a jelöltek generálása és a magyarázat megírása jól támogatható MI-vel; a számszerű eredményt viszont egy **tesztelt számítás** (kód vagy munkafüzet) adja, nem a nyelvi modell.



27.1. ábra. MI-támogatott döntési munkafolyamat. Az MI jelölteket és magyarázatot ad, a számszerű eredményt tesztelt számítás állítja elő; minden állításnak státusza van: generált, igazolt vagy elutasított.

Az emberi felelősség hangsúlyozásának empirikus oka is van. Az **automatizálási torzítás** (*automation bias*) azt jelenti, hogy az emberek hajlamosak egy automatizált rendszer javaslatát kritika nélkül elfogadni, és kevésbé figyelni az ellentmondó jelekre; a jelenség szakértőknél is megfigyelhető (Parasuraman és Manzey 2010). Dell'Acqua és szerzőtársai terepkísérletében tanácsadók az MI képességein belül eső feladatokban gyorsabban és jobb minőségben dolgoztak MI-vel, egy azon kívül eső feladatban viszont az MI-t használók gyakrabban jutottak hibás következtetésre, mint a nélküle dolgozók (Dell'Acqua és mtsai. 2023). Az MI képességeinek határa tehát egyenetlen, és nem mindig látható.

27.2. Alternatívák és kritériumok generálása

Az MI erőssége a gyors, széles körű ötletgenerálás. A 4. fejezet módszerei (morfológiai tábla, SCAMPER, nézőpontváltás) jól kiegészíthetők azzal, hogy az MI-től további alternatívákat vagy kritériumjelölteket kérünk. A generált jelölteket azonban ugyanazokkal a szűrőkkel kell értékelni, mint bármely más javaslatot: teljesítik-e a kötelező korlátokat (7.3. szakasz), és megfelelnek-e a kritériumokkal szemben támasztott követelményeknek (teljesség, redundanciamentesség, mérhetőség, preferenciafüggetlenség; 7. fejezet).

Mintaprompt: kritériumjelöltek kérése

„Egy szervezet flottájába új járművet választunk öt alternatíva közül. Jelenlegi kritériumaink: teljes birtoklási költség, CO_2-kibocsátás, hatótáv, kiesési idő. Javasolj legfeljebb öt további kritériumjelöltet. Mindegyiknél add meg: mit mér, hogyan lehetne mérni, és átfed-e valamelyik meglévő kritériummal. Ne találj ki számszerű adatot vagy hivatkozást; ha egy állítás bizonytalan, jelöld."

CASE02 – Az MI kritériumot és rangsort javasol

A CASE02 mobilitási döntésénél a csapat az MI-től kritériumjelölteket és egy előzetes rangsort kért. Az MI javasolta a töltési időt mint új kritériumot, és az E megoldást (kis városi elektromos megosztott autó + heti bérelt autó) tette első helyre a legalacsonyabb költsége miatt.

A 27.2. ábra az MI öt állítását és ellenőrzésük eredményét mutatja. Az E megoldás első helye **elutasított**: E a 180 km-es hatótávja miatt nem teljesíti a 250 km-es kötelező korlátot (4.6. szakasz), ezért nem szerepelhet a rangsorban. A töltési idő **jelölt** marad: releváns, de átfedhet a kiesési idővel, és a csapatnak kell eldöntenie, felveszi-e. Ez a kiinduló kártya helyzete: egy magabiztos, folyékony javaslat, amely egy alapvető korlátot figyelmen kívül hagyott.

az MI állítása	ellenőrzés	státusz
„Az E megoldás a legjobb: a legolcsóbb."	Kizáró korlát: hatótáv 180 < 250 km. E nem megengedett.	elutasított
„A D értéke 73,4, az A-é 71,8."	A tesztelt számítás szerint D 73,375, A 71,75.	igazolt
„Az elektromos autó karbantartása feleannyiba kerül."	Forrás nem adott; a saját adatainkban nem szerepel.	forrásra vár
„Új kritériumjelölt: a töltési idő."	Releváns, de redundáns lehet a kiesési idővel; a csapat dönt róla.	jelölt
„A D első helye biztos."	Rangelfogadottság ±30% súlyváltozásnál: D első 83,2%-ban.	elutasított

27.2. ábra. Az MI öt állítása a CASE02-ben és ellenőrzésük. Az állítások egy része igazolt, más része elutasított vagy forrásra vár.

27.3. Adatok strukturálása és forrásellenőrzés

A nyelvi modellek **hallucinációra** hajlamosak: folyékony, hihető, de a forrásanyaggal ellentétes vagy kitalált tartalmat generálnak, beleértve a nem létező hivatkozásokat is (Ji és mtsai. 2023). Ezért az MI által adott minden ténybeli állítást forráshoz kell kötni. Ha a forrás nem adható meg, az állítás **forrásra vár** státuszú, és nem kerülhet a döntési dokumentumba. A 27.2. ábrán

az „elektromos autó karbantartása feleannyiba kerül” állítás ilyen: lehet, hogy igaz, de a saját adatainkban nem szerepel, és az MI nem adott forrást.

Az MI jól használható viszont **meglévő adatok strukturálására**: ajánlatok, szerződések, e-mailek adatainak táblázatba rendezésére. Ilyenkor az ellenőrzés egyszerű: a táblázat minden cellája visszakereshető az eredeti dokumentumban. Egy szúrópróbaszerű ellenőrzés (például minden tizedik cella) és a teljes táblázat összegeinek összevetése a forrással jó gyakorlat.

27.4. Számításos eszköz és nyelvi magyarázat összekapcsolása

A nyelvi modellek a számolásban is tévedhetnek, és egy számítás eredményét nem mindig jelzik bizonytalannak. A megbízható megoldás a **munkamegosztás**: a számszerű eredményt egy tesztelt számítás adja (a könyv `_shared/esetek` mappájának Python-szkriptjei, a Döntési műhely munkafüzetei vagy az alkalmazások), a nyelvi modell pedig a számítás eredményéből magyarázatot ír. A CASE02-ben a „D értéke 73,4, az A-é 71,8” állítás **igazolt**, mert egyezik a tesztelt számítás eredményével (73,375 és 71,75).

A modell magabiztossága és a helyesség közötti kapcsolatot **kalibrációnak** nevezzük (3.6. szakasz). A modern neurális hálózatok gyakran rosszul kalibráltak, általában túl magabiztosak (Guo és mtsai. 2017). A nyelvi modellek bizonyos feltételek mellett képesek jelezni, mennyire biztosak egy válaszban (Kadavath és mtsai. 2022), de egy magabiztosan megfogalmazott szöveg **nem kalibrált döntési valószínűség**. Ha valószínűségre van szükség, azt modellből, adatból vagy kalibrált szakértői becslésből kell származtatni.

> **Mintaprompt: magyarázat a számítás eredményéből**
>
> „Az alábbi táblázat egy tesztelt additív értékmodell eredménye (alternatívák, súlyok, részpontszámok, összpontszám). Írj belőle legfeljebb 150 szavas magyarázatot egy vezetői összefoglalóhoz. Csak a táblázatban szereplő számokat használd; ne számolj újra, és ne adj hozzá új állítást. A végén sorold fel, mely feltevésektől függ leginkább az eredmény.”

27.5. Érzékenység, ellenérvek és feltevéskritika

Az MI egyik leghasznosabb szerepe a **kritikus partner**: ellenérvek, hiányzó szempontok és rejtett feltevések felvetése. Ez az 1.3. szakasz többnézőpontú gondolkodásának és a 25.5. szakasz figyelmeztetésének gyakorlati alkalmazása: az MI egy további, független „becslő” lehet, ha nem a saját véleményünket kérjük vissza tőle.

A 27.2. ábra utolsó állítása („a D első helye biztos”) **elutasított**, mert a 12.5. szakasz rangelfogadottsági elemzése szerint ±30%-os súlyváltozásnál a D csak az esetek 83,2%-ában első, a maradékban az A. A rangsor tehát robusztus, de nem biztos. Az MI-től kérhetünk érzékenységi kérdéseket („milyen súlyoknál változna a sorrend?”), de a választ a számítással kell ellenőrizni.

> **Mintaprompt: feltevéskritika**
>
> „Az alábbi döntési javaslatot kaptam [javaslat]. Sorold fel azt az öt feltevést, amelytől a javaslat leginkább függ. Mindegyikhez írd le, milyen adat vagy megfigyelés cáfolná, és mi történne a döntéssel, ha a feltevés nem teljesülne. Ne értékeld a javaslatot összességében; csak a feltevéseket vizsgáld.”

> **Átviteli példa: túl magabiztos bevezetési javaslat**
>
> A CASE07 új szolgáltatásának bevezetéséről az MI határozott, „azonnali, teljes körű bevezetést” javasolt. A 15. fejezet döntési fája szerint a felmérés várható értéke (EVSI = 9,6) meghaladja a költségét, a 25. fejezet replikátormodellje pedig arra figyelmeztet, hogy a környezet változásakor a korábban sikeres stratégia gyorsan visszaszorulhat. Több modell együttesen tehát óvatosabb, lépcsőzetes bevezetést indokol; az MI magabiztossága nem helyettesíti ezt az elemzést.

27.6. Naplózás, reprodukálhatóság és felülvizsgálat

Az MI-támogatott döntés akkor vállalható, ha utólag **visszakövethető**: milyen kérdést tettünk fel, milyen eszközzel (és milyen változattal), mit válaszolt, mit ellenőriztünk, és mi lett az állítások státusza. Az 1.5. szakasz döntési naplója ezzel az MI-naplóval egészül ki. A reprodukálhatóság érdekében a számítások kódja és adatai verziókövetett formában maradnak meg, a nyelvi modell válaszai pedig szó szerint, dátummal.

A szabályozási keretek ugyanezt az irányt követik. Az amerikai NIST MI-kockázatkezelési keretrendszere négy funkciót (irányítás, feltérképezés, mérés, kezelés) határoz meg a megbízható MI-hez (National Institute of Standards and Technology 2023), a generatív MI-re vonatkozó kiegészítő profilja pedig külön kezeli a konfabulációt, vagyis a magabiztosan előadott hamis tartalmat (National Institute of Standards and Technology 2024). Az európai uniós MI-rendelet (2024/1689) kockázatalapú szabályozást vezetett be (Európai Parlament és Tanács 2024); a 2026 júliusában elfogadott „Digital Omnibus” módosítás a III. melléklet szerinti nagy kockázatú rendszerekre (köztük az oktatási és a munkaerő-felvételi alkalmazásokra) vonatkozó kötelezettségek alkalmazását 2027. december 2-ra halasztotta (European Commission 2026). Szervezeti szinten az ISO/IEC 42001 szabvány ad keretet az MI-irányítási rendszerhez (ISO/IEC 2023). A szabályozási részleteket az alkalmazás idején mindig a hatályos szöveg alapján kell ellenőrizni.

Próbáld ki: MI-javaslatok ellenőrzése

Az alkalmazás előre rögzített MI-válaszokkal dolgozik, külső szolgáltatás és kulcs nélkül. Előbb jelöld meg, melyik állítást fogadnád el, majd futtasd az ellenőrzéseket (korlátok, újraszámítás, forrás, érzékenység). Az alkalmazás minden állításhoz státuszt rendel, és hibajavítási naplót készít. A két további nézetben alternatívagenerálást és feltevéskritikát próbálhatsz ki.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h27-mi-ellenorzes.html#K23

Összefoglalás

- Az MI a döntési folyamat ellenőrizhető lépéseiben hasznos: jelöltek generálása, adatok strukturálása, magyarázat, ellenérvek; a kérdés és a döntés az ember felelőssége.
- Minden MI-állításnak státusza van: generált, igazolt (forrással vagy tesztelt számítással alátámasztott) vagy elutasított.
- A generált jelölteket ugyanazokkal a korlátokkal és kritériumkövetelményekkel kell szűrni, mint bármely más javaslatot.
- A számszerű eredményt tesztelt számítás adja, a nyelvi modell a magyarázatot írja; a magabiztos szöveg nem kalibrált valószínűség.
- Az MI kritikus partnerként ellenérveket és feltevéseket vethet fel, de az érzékenységi állításokat számítással kell ellenőrizni.
- Az MI-támogatott döntés naplózott, reprodukálható és felülvizsgálható; a szabályozási keretek (NIST AI RMF, EU MI-rendelet, ISO/IEC 42001) ugyanezt várják el.

Önellenőrzés

1. Miért nem a nyelvi modell adja a számszerű eredményt a javasolt munkafolyamatban?
2. Milyen ellenőrzéssel szűrhető ki az a hiba, hogy az MI egy kizárt alternatívát tett első helyre?
3. Mi a különbség egy „forrásra vár” és egy „elutasított” státuszú állítás között?
4. Miért nem helyettesíti egy magabiztos MI-válasz a valószínűségi becslést?
5. Mit kell rögzíteni egy MI-napló bejegyzésében?

Megoldás.

1. Mert a nyelvi modellek a számolásban is tévedhetnek, és a hibát nem mindig jelzik; a tesztelt számítás reprodukálható és ellenőrizhető.
2. A kötelező korlátok ellenőrzésével (előszűrés): az E megoldás hatótávja (180 km) nem éri el a 250 km-es korlátot.
3. A „forrásra vár” állítás lehet igaz, de még nincs alátámasztva, ezért nem kerülhet a döntési dokumentumba; az „elutasított” állításról kiderült, hogy hibás, ellenőrizhetetlen vagy korlátot sért.
4. Mert a nyelvi modellek magabiztossága gyakran rosszul kalibrált; a döntési valószínűséget modellből, adatból vagy kalibrált szakértői becslésből kell származtatni.

5. A kérdést (promptot), az eszközt és változatát, a dátumot, a választ szó szerint, az elvégzett ellenőrzéseket és az állítások státuszát, valamint azt, hogy mi került be a döntésbe.

Továbbolvasás

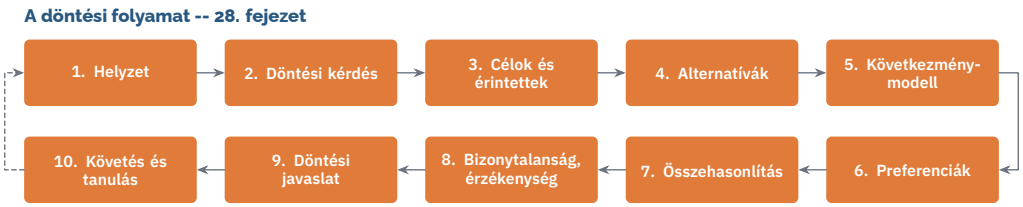
- Ji, Z. és mtsai (2023): Survey of hallucination in natural language generation (Ji és mtsai. 2023).
- Parasuraman, R., Manzey, D. H. (2010) – automatizálási torzítás (Parasuraman és Manzey 2010).
- Dell'Acqua, F. és mtsai (2023) – az MI egyenetlen képességhatára tudásmunkában (Dell'Acqua és mtsai. 2023).
- NIST (2023, 2024): AI RMF 1.0 és a generatív MI profil (National Institute of Standards and Technology 2023, 2024).
- Az (EU) 2024/1689 rendelet és a 2026-os módosítás (Európai Parlament és Tanács 2024; European Commission 2026).

Gyakorlat

A Döntési műhely 27. műhelyében az MI-ellenőrző alkalmazással (H27) előre rögzített MI-válaszokat ellenőrizhetsz, és hibajavítási naplót készíthetsz. Az N27 notebook a CASE02 számításait futtatja, és egy opcionális (alaphelyzetben kikapcsolt) külső MI-hívás válaszát veti össze velük. A műhely produktuma egy ellenőrzött munkafolyamat, egy hibajavítási napló és egy elutasított MI-javaslat indoklással.

28.

Integrált döntési műhely és saját projekt



Mikor nyitnád újra a döntést?

Tibor a döntési ülés végén elégedetten nézi a kész rangsort, de egy kérdés nem hagyja nyugodni: mi változtathatná meg a választást három hónap múlva? Mielőtt a csapat szétszéled, közösen felírják, mit figyelnek, és mikor ülnek össze újra.
A lényeg: Az indokolt ajánláshoz megvalósítási lépés és előre kijelölt felülvizsgálati feltétel is tartozik.
Kérdés: Melyik megfigyelhető változásnál térnél vissza először a választásodhoz, és mit számolnál újra?
Szemléltető, kitalált helyzet · F28 · Próbáld ki: h28-feljegyzes

A könyv fejezetei egy-egy modellt vagy módszercsaládot mutattak be, legtöbbször ugyanazon az eseten. Ez a záró fejezet összeilleszti őket: a CASE02 mobilitási döntésén végigjárja a teljes döntési folyamatot a feladat megfogalmazásától a feltételes ajánlásig és a követési tervig, majd keretet ad egy saját döntési projekt kidolgozásához. A fejezet fő üzenete, hogy **a sok módszer felsorolása nem helyettesíti az alkalmazásuk indoklását**: az eltérő eredmények feloldásához vissza kell térni a feltevésekhez.

Tanulási eredmények

A fejezet végére képes leszel

- egy döntési feladatot és a hozzá illő modelleket védhetően specifikálni;
- az adat- és preferenciafelvételt dokumentálni;
- következmény- és értékelő modelleket összekapcsolni;
- eltérő módszerek eredményeit összevetni, és az eltéréseket a feltevésekre visszavezetni;
- feltételes ajánlást, vezetői feljegyzést és követési tervet készíteni újranyitási feltételekkel;
- reprodukálható elemzési csomagot átadni, és saját munkádat az értékelési szempontok szerint ellenőrizni.

A fejezet a döntési folyamat körfolyamatával kezd, majd a CASE02 lépésein halad végig: specifikáció, adat- és preferenciafelvétel, a modellek összekapcsolása, az érzékenység és a módszerek összevetése, a feltételes ajánlás és a követés. Ezután a munkaszervezés kérdése (három teljes munkaciklus) és a saját projekt értékelési szempontjai következnek.

28.1. A döntési folyamat egésze

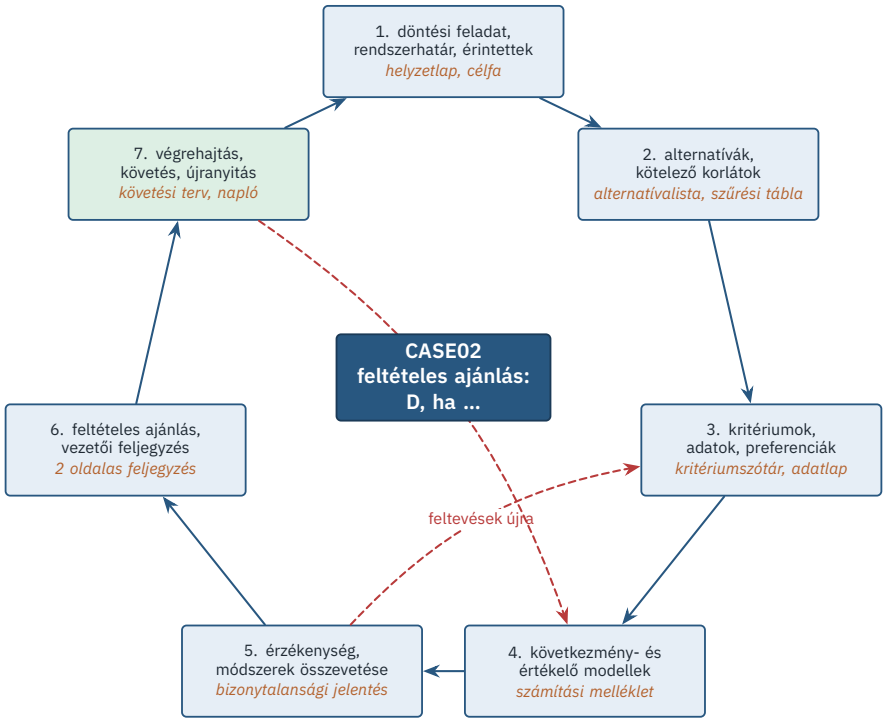
A 28.1. ábra a könyv felépítését egyetlen folyamatban foglalja össze. A folyamat nem lineáris: az érzékenységvizsgálat gyakran a kritériumok vagy az adatok újragondolásához vezet, a követés pedig egy előre rögzített feltétel teljesülésekor újranyitja a döntést. Minden szakasz egy **átadandó dokumentummal** zárul, amely nélkül a következő szakasz nem indítható; így az elemzés bármikor felülvizsgálható.

28.2. A döntési feladat és a modellválasztás specifikációja

A CASE02 döntési kérdése: melyik mobilitási megoldást válassza a szervezet a következő öt évre, a munkafeladatok ellátásához szükséges hatótáv biztosításával (2. fejezet). Az érintettek a pénzügyi vezetés, a járművet használó munkatársak és a fenntarthatósági felelős; a rendszerhatár az öt éves használat, a beszerzéstől a maradványértékig.

A modellválasztást a probléma szerkezete indokolja, nem a módszerek népszerűsége (1.2. szakasz):

- a **kötelező hatótáv** miatt előszűrés kell (7. fejezet);
- **hat, eltérő mértékegységű kritérium** és értelmezhető átváltások miatt az additív értékmodell a fő értékelő módszer (8. fejezet), kiegészítve egy



28.1. ábra. A döntési folyamat körfolyamata. Minden szakasznak van átadandó dokumentuma (dőlt betűvel), és minden szakaszból vissza lehet lépni egy korábbiba, ha egy feltevés megváltozik.

eltérő feltevésekre épülő összevető módszerrel (TOPSIS, PROMETHEE; 10. és 11. fejezet);
- **három érintetti csoport** eltérő prioritásai miatt profilok és rangelfogadottság (12. fejezet);
- a **költség bizonytalansága** miatt Monte Carlo-szimuláció (16. fejezet), a mély bizonytalanságú külső tényezők (energiaár, infrastruktúra) miatt forgatókönyvek (17. fejezet);
- a **karbantartási stratégia** megválasztásához Markov-modell (20. fejezet).

> **A sok módszer nem helyettesíti az indoklást**
>
> Egy elemzés nem attól jó, hogy tíz módszert alkalmaz. Minden módszernek egy kérdésre kell választ adnia, amelyre a többi nem ad. Ha két módszer eltérő eredményt ad, a feladat nem a „többségi szavazás”, hanem annak megértése, melyik feltevés okozza az eltérést, és melyik feltevés illik jobban a helyzethez.

28.3. Adat- és preferenciafelvétel

Az adatok eredetét adatlap dokumentálja: minden értéknél szerepel a forrás, a mérés módja, a dátum és a bizonytalanság (18.1. szakasz). A CASE02 adatai szintetikusak; egy valódi döntésnél az ajánlatok, a műszaki adatlapok és a saját flottaadatok lennének a források.

A preferenciákat dokumentált eljárással vesszük fel: értékfüggvények a kritériumok horgonyaival (8.1. szakasz), súlyok a kilengési (*swing*) módszerrel (8.2. szakasz), az érintetti csoportoktól külön-külön. A preferenciafelvétel jegyzőkönyve rögzíti, kik vettek részt, milyen kérdéseket kaptak, és hol voltak bizonytalanok.

28.4. Következmény- és értékelő modellek összekapcsolása

A modellek egymásra épülnek. Az előszűrés kizárja az E megoldást (hatótáv 180 km a kötelező 250 km helyett). A költségmodell (TCO) a kiesési idő pénzértékét is figyelembe veszi: egy nap kiesés körülbelül 214 ezer Ft-nak felel meg (8.4. szakasz). A Markov-modell megmutatta, hogy a megelőző karbantartás a rendelkezésre állást 68,4%-ról 83,1%-ra javítja, és a 12 havi költséget is csökkenti (20. fejezet); ez nem a járműválasztás, hanem a választott jármű üzemeltetésének döntése, de a kiesési idő kritériumán keresztül visszahat az értékelésre. A Monte Carlo-szimuláció a költségbecslések bizonytalanságát viszi át a rangsorra (16.9. szakasz).

28.5. Érzékenység és eltérő módszerek összehasonlítása

	A	B	C	D
additív értékmodell (bázissúlyok)	2.	3.	4.	1.
additív, AHP-hierarchia súlyaival	1.	3.	4.	2.
TOPSIS	4.	3.	2.	1.
PROMETHEE II	2.	3.	4.	1.
Borda (három érintetti profil)	2.	3.	4.	1.

ELECTRE I mag	{A, D}: egyik sem múlja felül a másikat
Condorcet-győztes (profilok)	A
rangelfogadottság (±30% súly)	D első 83,2%, A első 16,8%
Monte Carlo (költségbizonytalanság)	D első 74,8%
öt forgatókönyv	D nyer 3/5; maximin és minimax megbánás: A

E a kötelező hatótávkorlát miatt egyik elemzésben sem szerepel. A legtöbb elemzés D-t, a robusztus (legrosszabb esetre figyelő) szabályok és a Condorcet-összevetés A-t hozzák ki – a két jelölt a döntés valódi alternatívája.

28.2. ábra. A CASE02 elemzéseinek összevetése. A legtöbb elemzés D-t teszi az élre; az AHP-súlyok, a Condorcet-összevetés és a legrosszabb esetre figyelő szabályok A-t.

A 28.2. ábra a könyvben elvégzett elemzéseket foglalja össze. A kép nem egyértelmű, de értelmezhető:

- a bázissúlyokkal az additív modell, a PROMETHEE II és a Borda-összesítés is D-t teszi az élre; a TOPSIS szintén, bár a többi alternatíva sorrendje nála eltér, mert a geometriai közelséget méri;
- az AHP-hierarchia súlyaival A kerül az élre (73,39 a D 73,04-es értékével szemben), mert ezek a súlyok a költséget erősebben súlyozzák; ez egybevág azzal, hogy 0,4409 feletti költségsúlynál A megelőzi D-t (8.4. szakasz);
- az ELECTRE I magjában A és D is benne van: egyik sem múlja felül a másikat elég erősen;
- a három érintetti profil páros összevetésében A a Condorcet-győztes, a Borda-pontszám szerint viszont D vezet (12.2. szakasz);
- ±30%-os súlybizonytalanság mellett D az esetek 83,2%-ában első, a költségbizonytalanság mellett 74,8%-ában;

- az öt forgatókönyvből D hármat nyer, de a legrosszabb esetre figyelő szabályok (maximin, minimax megbánás) A-t választják, mert A az energiaár-ugrás és az infrastruktúra-kiesés forgatókönyvében kevésbé sérül.

Az eltérések tehát **két feltevésre** vezethetők vissza: mekkora a költség súlya, és mennyire akarunk a kedvezőtlen külső forgatókönyvek ellen védekezni. Ez a két kérdés a döntéshozó felelőssége, nem a módszereké.

Ha sok alternatívát és sok módszert kell összevetni, a „melyik módszer áll legközelebb a többihez” kérdést a rangsorkülönbségek összegével (SRD) lehet számszerűsíteni: a referencia a módszerek konszenzusa (például az átlagos rang), és a véletlen rangsorokkal való összevetés mutatja meg, melyik módszer tér el lényegesen (12.6. szakasz). A CASE02 négy előszűrt jelöltjénél erre nincs szükség, és nem is lenne informatív, mert négy objektumnál a véletlen eloszlás túl durva; egy nagyobb jelöltkörű saját projektben viszont a módszerek összevetésének jó, ellenőrizhető eszköze.

28.6. Döntési feljegyzés, végrehajtás és követés

Az elemzés eredménye **feltételes ajánlás**: a javasolt alternatíva, a feltételek, amelyek mellett javasolt, és azok a jelek, amelyek esetén a döntést újra kell nyitni. A CASE02 vezetői feljegyzésének magja:

> **A CASE02 feltételes ajánlása (részlet a vezetői feljegyzésből)**
>
> **Ajánlás:** a D megoldás (elektromos vásárlás nagy akkumulátorral), megelőző karbantartási szerződéssel.
> **Indoklás:** a bázispreferenciákkal D a legjobb (73,4 pont), és ±30%-os súlyváltozásnál az esetek 83%-ában, a költségbizonytalanság mellett 75%-ában első marad. A második jelölt az A (hibrid vásárlás), amely a legrosszabb forgatókönyvekben kevésbé sérül.
> **Feltételek:** az ajánlás akkor érvényes, ha a költség súlya nem haladja meg a 0,44-et, és a töltési infrastruktúra a szervezet telephelyén a beszerzésig kiépül.
> **Újranyitási feltételek:** (1) ha a vezetés a költségnek 0,44-nél nagyobb súlyt ad; (2) ha a villamosenergia-ár tartósan a forgatókönyv „energiaár-ugrás” szintje fölé emelkedik; (3) ha a töltőpont kiesése egy negyedévben meghaladja a 3 napot. Ezek bármelyikénél az additív modellt és a forgatókönyv-elemzést újra kell futtatni.
> **Fennmaradó nézeteltérés:** a fenntarthatósági felelős a C megoldást is versenyben tartaná, ha a zöldáram-szerződés ára csökken.

A végrehajtás felelősöket, határidőket és mutatókat kap, és a követési terv kijelöli, ki és milyen gyakran figyeli az újranyitási feltételeket (18.6. szakasz). A Gary Klein-féle **előzetes hibafeltárás** (*pre-mortem*) itt is hasznos: a csapat elképzeli, hogy a döntés egy év múlva kudarcot vallott, és összegyűjti a lehetséges okokat (3.6. szakasz) (Klein 2007).

Próbáld ki: döntési feljegyzés és követési terv

Az alkalmazás a könyv CASE02-eredményeiből vezetői feljegyzés-vázlatot állít össze. Változtasd a költségsúlyt és a forgatókönyvet, és figyeld, hogyan változik az ajánlás és a feltételek szövege. Adj meg saját újranyitási feltételeket, és az alkalmazás jelzi, melyik elemzést kell újrafuttatni, ha teljesülnek.
Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h28-feljegyzes.html#F28

28.7. Utólagos tanulás és a döntés újranyitása

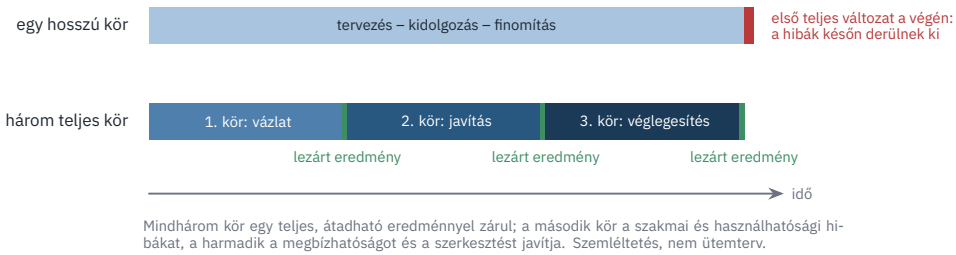
A döntés után a tanulás két szinten folyik (25.2. szakasz). Az egyhurkú tanulás azt kérdezi, jól hajtottuk-e végre a döntést; a kéthurkú azt, hogy jók voltak-e a feltevéseink. A döntési napló (1.5. szakasz) ehhez a döntés idején rögzített feltevéseket, becsléseket és várakozásokat tartalmazza, hogy utólag ne a kimenetel alapján ítéljük meg a döntést (14.6. szakasz): egy jó döntésnek is lehet rossz kimenetele, és fordítva.

28.8. Három teljes munkaciklus

Egy hosszú nekifutás vagy három rövid kör?

Egy elemzést a határidő előtti utolsó hétre hagysz, és egyetlen hosszú nekifutással akarod tökéletesre csinálni. A hibák a beadás előtti éjszakán derülnek ki, amikor már nincs idő javítani.
A lényeg: Három teljes, egymásra épülő munkaciklus korábban mutatja meg a hibákat, és mindig van átadható eredmény.
Kérdés: Mikor lesz a következő munkád első teljes, végigjárható változata?
Szemléltető, kitalált helyzet · D49 · Próbáld ki: h28-feljegyzes

Az **eredményoptimalizálási modell** azt javasolja, hogy egy munkát ne egyetlen hosszú nekifutással, hanem három teljes, egymásra épülő körben végezzünk: az első kör egy durva, de teljes változatot ad, a második a tartalmi és használhatósági hibákat javítja, a harmadik a megbízhatóságot és a kidolgozottságot (28.3. ábra) (Krogerus és Tschäppeler 2011). A gondolat a szoftverfejlesztés iteratív, kockázatvezérelt modelljeivel rokon, például Barry Boehm spirálmodelljével (Boehm 1988). A döntési projektben ez azt jelenti, hogy az első héten már egy egyszerű, de teljes elemzés készül (kérdés, alternatívák, egyszerű additív modell, vázlatos ajánlás), és a további körök ezt finomítják.



28.3. ábra. Egy hosszú munkakör és három teljes munkaciklus összevetése. A három kör mindegyike átadható eredménnyel zárul. Szemléltetés, nem ütemterv.

Próbáld ki: munkaciklusok

Válassz egyetlen hosszú vagy három lezárt munkaciklust, és állítsd be, mekkora valószínűséggel derül ki egy alapvető hiba a munka során. Az alkalmazás megmutatja a feltételezett újramunkát és a határidőig megmaradó tartalékot. Az interaktív demó: https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/gyakorlat/alkalmazasok/h28-feljegyzes.html#D49

28.9. A saját projekt és értékelési szempontjai

A könyv záró feladata egy saját döntési projekt: egy intézményi, szakmai vagy személyes döntés teljes elemzése, megfelelő adatvédelemmel és világos döntési jogosultsággal. A projekt minimális tartalma: pontos döntési kérdés; legalább négy érdemi alternatíva; legalább öt indokolt kritérium; kötelező feltételek; az adatok eredete; dokumentált preferenciafelvétel; egy részletes értékelő módszer; egy indokolt összehasonlító vagy következménymodell; érzékenységvizsgálat; döntési javaslat; megvalósítási és felülvizsgálati terv. A leadandó csomag egy legfeljebb kétoldalas vezetői feljegyzés, a számítási melléklet, az adatlap, a bizonytalansági jelentés és a követési terv. A módszerek számát a probléma indokolja.

Az alábbi értékelési szempontok az önellenőrzést és az oktatói értékelést egyaránt segítik. A szintek 0–3 között értékelhetők, a súlyozott pontszám `súly × szint / 3`; a szempontokat a konkrét kurzus helyi szabályaihoz kell igazítani.

28.1. táblázat. A saját döntési projekt értékelési szempontjai (a 0. szint a hiányzó, a 2. szint az önállóan megfelelő teljesítés).

Szempont	Súly	1: részleges	3: alapos és kritikus
Probléma és alternatívák	15	homályos kérdés vagy szinte azonos alternatívák	a rendszerhatár, az érintettek és a kimaradt lehetőségek is indokoltak
Kritériumok és preferencia	15	a skálák és a súlyok részben tisztázatlanok	a függés, a kettős beszámítás és a preferenciafelvétel kritikája is megjelenik
Számítás és modellhelyesség	15	anyagi hiba maradt	referenciaérték és szélső eset is ellenőrzött
Bizonytalanság és érzékenység	15	egyetlen, indokolatlan változtatás	küszöb, modellhiba és döntési következmény együtt szerepel
Modellválasztás	10	megszokásból választott módszer	alternatív megközelítés és a módszerek határai is összevetve
Következtetés és kommunikáció	10	túlzottan magabiztos ajánlás	az ellentmondások és a fennmaradó kérdések világosan kezelve
Megvalósítás és követés	10	általános szándék	újranyitási feltételek és alkalmazkodó lépés is van
Reprodukálhatóság	10	részben újrafuttatható	másik környezetben is ellenőrizhető

A hibás alapmodell javítása akkor is szükséges, ha a többi szempont alapján magas pontszám adódna. A Döntési műhely 28. műhelye a projekt lépéseihez mintapromptokat és egy folyamatábrát ad.

Összefoglalás

- A döntési folyamat körfolyamat: feladat, alternatívák, kritériumok és adatok, modellek, érzékenység, ajánlás, követés; minden szakasz átadandó dokumentummal zárul, és vissza lehet lépni.
- A modellválasztást a probléma szerkezete indokolja; minden módszernek egy olyan kérdésre kell válaszolnia, amelyre a többi nem.
- A CASE02-ben a legtöbb elemzés D-t, a költségre és a legrosszabb esetre érzékenyebb elemzések A-t hozzák ki; az eltérés két feltevésre (költségsúly, védekezés a kedvezőtlen forgatókönyvek ellen) vezethető vissza.
- Az ajánlás feltételes: tartalmazza a feltételeket, az újranyitási jeleket és a fennmaradó nézeteltéréseket.
- Három teljes munkaciklus korábban mutatja meg a hibákat, mint egy hosszú nekifutás.
- A saját projekt értékelési szempontjai a problémától a reprodukálhatóságig terjednek; a hibás alapmodell javítása minden esetben szükséges.

Önellenőrzés

1. Miért zárul a döntési folyamat minden szakasza átadandó dokumentummal?
2. A CASE02 elemzései D-t és A-t is első helyre teszik. Hogyan dönthető el, melyiket ajánljuk?
3. Mi a különbség egy rangsor és egy feltételes ajánlás között?
4. Adj meg egy újranyitási feltételt a CASE02-höz, és mondd meg, melyik elemzést kell akkor újrafuttatni!
5. Miért jobb három teljes munkaciklus, mint egy hosszú?

Megoldás.

1. Mert így az elemzés minden lépése felülvizsgálható, és egy későbbi változásnál pontosan látszik, melyik szakaszhoz kell visszatérni.
2. Az eltérést okozó feltevések tisztázásával: mekkora a költség súlya, és mennyire akar a döntéshozó a kedvezőtlen forgatókönyvek ellen védekezni. Ha a költségsúly 0,44 alatt marad, és a döntéshozó elfogadja a forgatókönyvek kockázatát, D; különben A.
3. A rangsor egy adott feltevésrendszer eredménye; a feltételes ajánlás megadja a feltevéseket, a feltételeket, a második legjobb jelöltet és azokat a jeleket, amelyek esetén a döntést újra kell nyitni.
4. Például: ha a vezetés a költségnek 0,44-nél nagyobb súlyt ad, az additív modellt és a rangelfogadottsági elemzést kell újrafuttatni; ha az energiaár tartósan megugrik, a forgatókönyv-elemzést.
5. Mert minden kör végén van átadható, teljes eredmény, és az alapvető hibák már az első körben kiderülnek, amikor még van idő javítani.

Továbbolvasás

- Keeney, R. L. (1992): *Value-Focused Thinking* – értékközpontú döntési folyamat (Keeney 1992).
- Belton, V., Stewart, T. J. (2002): *Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach* (Belton és Stewart 2002).

- Page, S. E. (2018): *The Model Thinker* – többmodellű gondolkodás (Page 2018).
- Klein, G. (2007): Performing a project premortem (Klein 2007).
- Boehm, B. W. (1988): A spiral model of software development and enhancement (Boehm 1988).

Gyakorlat

A Döntési műhely 28. műhelyében a döntési feljegyzés alkalmazásával (H28) a CASE02 feltételes ajánlását és követési tervét állíthatod össze. Az E28 munkafüzet a teljes CASE02-elemzést (szűrés, additív modell, érzékenység, forgatókönyvek) egy fájlban, látható képletekkel tartalmazza; az N28 notebook a könyv összes CASE02-számítását egy futtatással reprodukálja, és ellenőrzi a referenciaértékeket. A műhely a saját projekt folyamatábráját és lépésenkénti mintapromptjait is tartalmazza.

Irodalom

Abonyi, János, Tímea Czvetkó, Zsolt Tibor Kosztyán, és Károly Héberger. 2022. „Factor analysis, sparse PCA, and Sum of Ranking Differences-based improvements of the Promethee-GAIA multicriteria decision support technique". *PLOS ONE* 17 (2): e0264277. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0264277.

Aczél, János, és Thomas L. Saaty. 1983. „Procedures for Synthesizing Ratio Judgements". *Journal of Mathematical Psychology* 27 (1): 93–102. https://doi.org/10.1016/0022-2496(83)90028-7.

Akerlof, George A. 1970. „The Market for »Lemons«: Quality Uncertainty and the Market Mechanism". *The Quarterly Journal of Economics* 84 (3): 488–500. https://doi.org/10.2307/1879431.

Anderson, Chris. 2006. *The Long Tail: Why the Future of Business Is Selling Less of More*. Hyperion.

Argyris, Chris, és Donald A. Schön. 1978. *Organizational Learning: A Theory of Action Perspective*. Addison-Wesley.

Aritzeta, Aitor, Stephen Swailes, és Barbara Senior. 2007. „Belbin's team role model: Development, validity and applications for team building". *Journal of Management Studies* 44 (1): 96–118. https://doi.org/10.1111/j.1467-6486.2007.00666.x.

Arkes, Hal R., és Catherine Blumer. 1985. „The Psychology of Sunk Cost". *Organizational Behavior and Human Decision Processes* 35 (1): 124–40. https://doi.org/10.1016/0749-5978(85)90049-4.

Arrow, Kenneth J. 1951. *Social Choice and Individual Values*. Wiley.

Arrow, Kenneth J., Theodore Harris, és Jacob Marschak. 1951. „Optimal Inventory Policy". *Econometrica* 19 (3): 250–72. https://doi.org/10.2307/1906813.

Arthur, W. Brian. 1989. „Competing Technologies, Increasing Returns, and Lock-In by Historical Events". *The Economic Journal* 99 (394): 116–31. https://doi.org/10.2307/2234208.

Arthur, W. Brian. 1994. „Inductive Reasoning and Bounded Rationality". *American Economic Review* 84 (2): 406–11.

Åström, Karl Johan, és Richard M. Murray. 2021. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. 2. kiad. Princeton University Press.

Atkinson, Roger. 1999. „Project management: cost, time and quality, two best guesses and a phenomenon, its time to accept other success criteria". *International Journal of Project Management* 17 (6): 337–42. https://doi.org/10.1016/S0263-7863(98)00069-6.

Axelrod, Robert. 1984. *The Evolution of Cooperation*. Basic Books.

Axelrod, Robert. 1997. „The Dissemination of Culture: A Model with Local Convergence and Global Polarization". *Journal of Conflict Resolution* 41 (2): 203–26. https://doi.org/10.1177/0022002797041002001.

Barabási, Albert-László, és Réka Albert. 1999. „Emergence of Scaling in Random Networks". *Science* 286 (5439): 509–12. https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509.

Barnsley, Michael F. 1988. *Fractals Everywhere*. Academic Press.

Barth, Bertram, Berthold Bodo Flaig, Norbert Schäuble, és Manfred Tautscher. 2018. *Praxis der Sinus-Milieus: Gegenwart und Zukunft eines modernen Gesellschafts- und Zielgruppenmodells*. Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-658-19335-5.

Bass, Frank M. 1969. „A New Product Growth for Model Consumer Durables". *Management Science* 15 (5): 215–27. https://doi.org/10.1287/mnsc.15.5.215.

Behzadian, Majid, S. Khanmohammadi Otaghsara, Morteza Yazdani, és Joshua Ignatius. 2012. „A State-of the-Art Survey of TOPSIS Applications". *Expert Systems with Applications* 39 (17): 13051–69. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2012.05.056.

Belbin, R. Meredith. 1981. *Management Teams: Why They Succeed or Fail*. Heinemann.

Belton, Valerie, és Tony Gear. 1983. „On a Short-Coming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies". *Omega* 11 (3): 228–30. https://doi.org/10.1016/0305-0483(83)90047-6.

Belton, Valerie, és Theodor J. Stewart. 2002. *Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach*. Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-1495-4.

Bennett, Nathan, és G. James Lemoine. 2014. „What a Difference a Word Makes: Understanding Threats to Performance in a VUCA World". *Business Horizons* 57 (3): 311–17. https://doi.org/10.1016/j.bushor.2014.01.001.

Berlekamp, Elwyn R., John H. Conway, és Richard K. Guy. 1982. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. Köt. 2. Academic Press.

Boehm, Barry W. 1988. „A spiral model of software development and enhancement". *Computer* 21 (5): 61–72. https://doi.org/10.1109/2.59.

Bono, Edward de. 1985. *Six Thinking Hats*. Little, Brown.

Borel, Émile. 1921. „La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique". *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 173: 1304–8.

Bourdieu, Pierre. 1984. *Distinction: A Social Critique of the Judgement of Taste*. Fordította Richard Nice. Harvard University Press.

Box, George E. P. 1976. „Science and Statistics". *Journal of the American Statistical Association* 71 (356): 791–99. https://doi.org/10.1080/01621459.1976.10480949.

Brans, Jean-Pierre, Philippe Vincke, és Bertrand Mareschal. 1986. „How to Select and How to Rank Projects: The PROMETHEE Method". *European Journal of Operational Research* 24 (2): 228–38. https://doi.org/10.1016/0377-2217(86)90044-5.

Breiman, Leo. 2001. „Statistical Modeling: The Two Cultures". *Statistical Science* 16 (3): 199–231. https://doi.org/10.1214/ss/1009213726.

Brier, Glenn W. 1950. „Verification of Forecasts Expressed in Terms of Probability". *Monthly Weather Review* 78 (1): 1–3. https://doi.org/10.1175/1520-0493(1950)078%3C0001:VOFEIT%3E2.0.CO;2.

Brynjolfsson, Erik, Yu Jeffrey Hu, és Michael D. Smith. 2003. „Consumer Surplus in the Digital Economy: Estimating the Value of Increased Product Variety at Online Booksellers". *Management Science* 49 (11): 1580–96. https://doi.org/10.1287/mnsc.49.11.1580.20580.

Camerer, Colin F., Teck-Hua Ho, és Juin-Kuan Chong. 2004. „A Cognitive Hierarchy Model of Games". *The Quarterly Journal of Economics* 119 (3): 861–98. https://doi.org/10.1162/0033553041502225.

Cepeda, Nicholas J., Harold Pashler, Edward Vul, John T. Wixted, és Doug Rohrer. 2006. „Distributed Practice in Verbal Recall Tasks: A Review and Quantitative Synthesis". *Psychological Bulletin* 132 (3): 354–80. https://doi.org/10.1037/0033-2909.132.3.354.

Cepeda, Nicholas J., Edward Vul, Doug Rohrer, John T. Wixted, és Harold Pashler. 2008. „Spacing effects in learning: A temporal ridgeline of optimal retention". *Psychological Science* 19 (11): 1095–102. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2008.02209.x.

Clarke, Edward H. 1971. „Multipart pricing of public goods". *Public Choice* 11 (1): 17–33. https://doi.org/10.1007/BF01726210.

Clemen, Robert T., és Terence Reilly. 2014. *Making Hard Decisions with DecisionTools*. 3. kiad. Cengage Learning.

Coase, Ronald H. 1960. „The Problem of Social Cost". *Journal of Law and Economics* 3: 1–44. https://doi.org/10.1086/466560.

Cook, Matthew. 2004. „Universality in Elementary Cellular Automata". *Complex Systems* 15 (1): 1–40.

Cooperrider, David L., és Suresh Srivastva. 1987. „Appreciative Inquiry in Organizational Life". In *Research in Organizational Change and Development*, szerkesztette Richard W. Woodman és William A. Pasmore, köt. 1. JAI Press.

Costantino, R. F., R. A. Desharnais, J. M. Cushing, és Brian Dennis. 1997. „Chaotic Dynamics in an Insect Population". *Science* 275 (5298): 389–91. https://doi.org/10.1126/science.275.5298.389.

Covey, Stephen R., A. Roger Merrill, és Rebecca R. Merrill. 1994. *First Things First*. Simon & Schuster.

Crawford, Gordon, és Cindy Williams. 1985. „A Note on the Analysis of Subjective Judgment Matrices". *Journal of Mathematical Psychology* 29 (4): 387–405. https://doi.org/10.1016/0022-2496(85)90002-1.

Csikszentmihalyi, Mihaly. 1990. *Flow: The Psychology of Optimal Experience*. Harper & Row.

Dantzig, George B. 1963. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press.

De Dreu, Carsten K. W., és Laurie R. Weingart. 2003. „Task Versus Relationship Conflict, Team Performance, and Team Member Satisfaction: A Meta-

Analysis”. *Journal of Applied Psychology* 88 (4): 741–49. https://doi.org/10.1037/0021-9010.88.4.741.

Dedehayir, Ozgur, és Martin Steinert. 2016. „The Hype Cycle Model: A Review and Future Directions”. *Technological Forecasting and Social Change* 108: 28–41. https://doi.org/10.1016/j.techfore.2016.04.005.

Dell’Acqua, Fabrizio, Edward McFowland, Ethan R. Mollick, és mtsai. 2023. *Navigating the Jagged Technological Frontier: Field Experimental Evidence of the Effects of AI on Knowledge Worker Productivity and Quality*. Working Paper Nos. 24-013. Harvard Business School. https://doi.org/10.2139/ssrn.4573321.

Diaconis, Persi, és Ronald L. Graham. 1977. „Spearman’s Footrule as a Measure of Disarray”. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 39 (2): 262–68. https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1977.tb01624.x.

Dodgson, J. S., M. Spackman, A. Pearman, és L. D. Phillips. 2009. *Multi-Criteria Analysis: A Manual*. Department for Communities; Local Government. https://www.gov.uk/government/publications/multi-criteria-analysis-manual-for-making-government-policy.

Downs, Anthony. 1957. *An Economic Theory of Democracy*. Harper & Row.

Drexler, Allan B., David Sibbet, és Russell H. Forrester. 1988. „The Team Performance Model”. In *Team Building: Blueprints for Productivity and Satisfaction*, szerkesztette W. Brendan Reddy és Kaleel Jamison. NTL Institute for Applied Behavioral Science; University Associates.

Dyer, James S., és Rakesh K. Sarin. 1979. „Measurable Multiattribute Value Functions”. *Operations Research* 27 (4): 810–22. https://doi.org/10.1287/opre.27.4.810.

Ebbinghaus, Hermann. 1885. *Über das Gedächtnis: Untersuchungen zur experimentellen Psychologie*. Duncker & Humblot.

Eberle, Bob. 1971. *Scamper: Games for Imagination Development*. D.O.K. Publishers.

Eden, Colin, és Fran Ackermann. 1998. *Making Strategy: The Journey of Strategic Management*. Sage.

Edmondson, Amy. 1999. „Psychological Safety and Learning Behavior in Work Teams”. *Administrative Science Quarterly* 44 (2): 350–83. https://doi.org/10.2307/2666999.

Edwards, Ward, és F. Hutton Barron. 1994. „SMARTS and SMARTER: Improved Simple Methods for Multiattribute Utility Measurement”. *Organizational Behavior and Human Decision Processes* 60 (3): 306–25. https://doi.org/10.1006/obhd.1994.1087.

Egerváry, Jenő. 1931. „Mátrixok kombinatorikus tulajdonságairól”. *Matematikai és Fizikai Lapok* 38: 16–28.

Eggenberger, F., és G. Pólya. 1923. „Über die Statistik verketteter Vorgänge”. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 3 (4): 279–89. https://doi.org/10.1002/zamm.19230030407.

Ehrgott, Matthias. 2005. *Multicriteria Optimization*. 2. kiad. Springer. https://doi.org/10.1007/3-540-27659-9.

Erlang, Agner Krarup. 1909. „Sandsynlighedsregning og telefonsamtaler”. *Nyt Tidsskrift for Matematik B* 20: 33–39.

Európai Parlament és Tanács. 2024. *Az (EU) 2024/1689 rendelet a mesterséges intelligenciára vonatkozó harmonizált szabályok megállapításáról (a mesterséges intelligenciáról szóló jogszabály)*. Az Európai Unió Hivatalos Lapja, L sorozat, 2024. július 12. https://eur-lex.europa.eu/eli/reg/2024/1689/oj.

European Commission. 2026. *Digital Omnibus on AI: amendments to Regulation (EU) 2024/1689 – questions and answers on the Digital Package*. Az Európai Bizottság digitális stratégiai oldala. https://digital-strategy.ec.europa.eu/en/faqs/digital-package.

Fama, Eugene F. 1970. „Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work”. *The Journal of Finance* 25 (2): 383–417. https://doi.org/10.2307/2325486.

Fehr, Ernst, és Simon Gächter. 2000. „Cooperation and punishment in public goods experiments”. *American Economic Review* 90 (4): 980–94. https://doi.org/10.1257/aer.90.4.980.

Feigenbaum, Mitchell J. 1978. „Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations”. *Journal of Statistical Physics* 19 (1): 25–52. https://doi.org/10.1007/BF01020332.

Feller, William. 1968. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. 3. kiad. Köt. 1. Wiley.

Fenn, Jackie, és Mark Raskino. 2008. *Mastering the Hype Cycle: How to Choose the Right Innovation at the Right Time*. Harvard Business Press.

Festinger, Leon. 1957. *A Theory of Cognitive Dissonance*. Stanford University Press.

Fisher, Ronald A. 1930. *The Genetical Theory of Natural Selection*. Clarendon Press.

Forman, Ernest, és Kirti Peniwati. 1998. „Aggregating Individual Judgments and Priorities with the Analytic Hierarchy Process". *European Journal of Operational Research* 108 (1): 165–69. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00244-0.

Forrester, Jay W. 1961. *Industrial Dynamics*. MIT Press.

Freeman, R. Edward. 1984. *Strategic Management: A Stakeholder Approach*. Pitman.

Furnham, Adrian, Howard Steele, és David Pendleton. 1993. „A Psychometric Assessment of the Belbin Team-Role Self-Perception Inventory". *Journal of Occupational and Organizational Psychology* 66 (3): 245–57. https://doi.org/10.1111/j.2044-8325.1993.tb00535.x.

Gaertner, Wulf. 2009. *A Primer in Social Choice Theory*. Revised. Oxford University Press.

Gale, David, és Lloyd S. Shapley. 1962. „College admissions and the stability of marriage". *The American Mathematical Monthly* 69 (1): 9–15. https://doi.org/10.2307/2312726.

Galton, Francis. 1907. „Vox Populi". *Nature* 75 (1949): 450–51. https://doi.org/10.1038/075450a0.

Gama, João, Indrė Žliobaitė, Albert Bifet, Mykola Pechenizkiy, és Abdelhamid Bouchachia. 2014. „A Survey on Concept Drift Adaptation". *ACM Computing Surveys* 46 (4): 44:1–37. https://doi.org/10.1145/2523813.

Gardner, Martin. 1970. „Mathematical Games: The Fantastic Combinations of John Conway's New Solitaire Game »Life«". *Scientific American* 223 (4): 120–23.

Gigerenzer, Gerd, és Daniel G. Goldstein. 1996. „Reasoning the Fast and Frugal Way: Models of Bounded Rationality". *Psychological Review* 103 (4): 650–69. https://doi.org/10.1037/0033-295X.103.4.650.

Gigerenzer, Gerd, és Ulrich Hoffrage. 1995. „How to Improve Bayesian Reasoning without Instruction: Frequency Formats". *Psychological Review* 102 (4): 684–704. https://doi.org/10.1037/0033-295X.102.4.684.

Gode, Dhananjay K., és Shyam Sunder. 1993. „Allocative Efficiency of Markets with Zero-Intelligence Traders: Market as a Partial Substitute for Individual Rationality". *Journal of Political Economy* 101 (1): 119–37. https://doi.org/10.1086/261868.

Goodwin, Paul, és George Wright. 2014. *Decision Analysis for Management Judgment*. 5. kiad. Wiley.

Granovetter, Mark. 1978. „Threshold Models of Collective Behavior". *American Journal of Sociology* 83 (6): 1420–43. https://doi.org/10.1086/226707.

Granovetter, Mark S. 1973. „The Strength of Weak Ties". *American Journal of Sociology* 78 (6): 1360–80. https://doi.org/10.1086/225469.

Greco, Salvatore, Matthias Ehrgott, és José Rui Figueira, szerk. 2016. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. 2. kiad. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-3094-4.

Groves, Theodore. 1973. „Incentives in teams". *Econometrica* 41 (4): 617–31. https://doi.org/10.2307/1914085.

Guo, Chuan, Geoff Pleiss, Yu Sun, és Kilian Q. Weinberger. 2017. „On Calibration of Modern Neural Networks". *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning, PMLR* 70: 1321–30.

Haasnoot, Marjolijn, Jan H. Kwakkel, Warren E. Walker, és Judith ter Maat. 2013. „Dynamic Adaptive Policy Pathways: A Method for Crafting Robust Decisions for a Deeply Uncertain World". *Global Environmental Change* 23 (2): 485–98. https://doi.org/10.1016/j.gloenvcha.2012.12.006.

Hackman, J. Richard. 2002. *Leading Teams: Setting the Stage for Great Performances*. Harvard Business School Press.

Haimes, Yacov Y., Leon S. Lasdon, és David A. Wismer. 1971. „On a Bicriterion Formulation of the Problems of Integrated System Identification and System Optimization". *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* SMC-1 (3): 296–97. https://doi.org/10.1109/TSMC.1971.4308298.

Hambrick, Donald C., Ian C. MacMillan, és Diana L. Day. 1982. „Strategic Attributes and Performance in the BCG Matrix – A PIMS-Based Analysis of Industrial Product Businesses". *Academy of Management Journal* 25 (3): 510–31. https://doi.org/10.2307/256077.

Hammond, John S., Ralph L. Keeney, és Howard Raiffa. 1999. *Smart Choices: A Practical Guide to Making Better Decisions*. Harvard Business School Press.

Hardin, Garrett. 1968. „The Tragedy of the Commons”. *Science* 162 (3859): 1243–48. https://doi.org/10.1126/science.162.3859.1243.

Harris, Ford W. 1913. „How Many Parts to Make at Once”. *Factory, The Magazine of Management* 10 (2): 135–36, 152.

Harry, Mikel, és Richard Schroeder. 2000. *Six Sigma: The Breakthrough Management Strategy Revolutionizing the World's Top Corporations*. Currency Doubleday.

Hastie, Trevor, Robert Tibshirani, és Jerome Friedman. 2009. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*. 2. kiad. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-84858-7.

Héberger, Károly. 2010. „Sum of ranking differences compares methods or models fairly”. *TrAC Trends in Analytical Chemistry* 29 (1): 101–9. https://doi.org/10.1016/j.trac.2009.09.009.

Héberger, Károly, és Klára Kollár-Hunek. 2011. „Sum of ranking differences for method discrimination and its validation: comparison of ranks with random numbers”. *Journal of Chemometrics* 25 (4): 151–58. https://doi.org/10.1002/cem.1320.

Helms, Marilyn M., és Judy Nixon. 2010. „Exploring SWOT Analysis – Where Are We Now? A Review of Academic Research from the Last Decade”. *Journal of Strategy and Management* 3 (3): 215–51. https://doi.org/10.1108/17554251011064837.

Henderson, Bruce D. 1970. *The Product Portfolio*. BCG Perspectives, Boston Consulting Group.

Hernán, Miguel A., és James M. Robins. 2020. *Causal Inference: What If*. Chapman & Hall/CRC.

Hersey, Paul, és Kenneth H. Blanchard. 1969. *Management of Organizational Behavior: Utilizing Human Resources*. Prentice Hall.

Hillier, Frederick S., és Gerald J. Lieberman. 2021. *Introduction to Operations Research*. 11. kiad. McGraw-Hill.

Hitchcock, Frank L. 1941. „The distribution of a product from several sources to numerous localities”. *Journal of Mathematics and Physics* 20 (1–4): 224–30. https://doi.org/10.1002/sapm1941201224.

HM Treasury, és Department for Energy Security and Net Zero. 2024. *Use of Multi-Criteria Decision Analysis in Options Appraisal of Economic Cases*. Green

Book supplementary guidance. https://www.gov.uk/government/publications/green-book-supplementary-guidance-use-of-multi-criteria-decision-analysis.

Hofbauer, Josef, és Karl Sigmund. 1998. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press.

Holmström, Bengt. 1979. „Moral Hazard and Observability". *The Bell Journal of Economics* 10 (1): 74–91. https://doi.org/10.2307/3003320.

Hong, Lu, és Scott E. Page. 2004. „Groups of Diverse Problem Solvers Can Outperform Groups of High-Ability Problem Solvers". *Proceedings of the National Academy of Sciences* 101 (46): 16385–89. https://doi.org/10.1073/pnas.0403723101.

Hopp, Wallace J., és Mark L. Spearman. 2008. *Factory Physics*. 3. kiad. McGraw-Hill/Irwin.

Howard, Ronald A. 1966. „Information Value Theory". *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics* 2 (1): 22–26. https://doi.org/10.1109/TSSC.1966.300074.

Howard, Ronald A. 1988. „Decision Analysis: Practice and Promise". *Management Science* 34 (6): 679–95. https://doi.org/10.1287/mnsc.34.6.679.

Huber, Joel, John W. Payne, és Christopher Puto. 1982. „Adding asymmetrically dominated alternatives: Violations of regularity and the similarity hypothesis". *Journal of Consumer Research* 9 (1): 90–98. https://doi.org/10.1086/208899.

Hwang, Ching-Lai, és Kwangsun Yoon. 1981. *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*. Köt. 186. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48318-9.

Hyndman, Rob J., és George Athanasopoulos. 2021. *Forecasting: Principles and Practice*. 3. kiad. OTexts. https://otexts.com/fpp3/.

Ipkovich, Ádám, Károly Héberger, és János Abonyi. 2021. „Comprehensible visualization of multidimensional data: Sum of ranking differences-based parallel coordinates". *Mathematics* 9 (24): 3203. https://doi.org/10.3390/math9243203.

Ipkovich, Ádám, Károly Héberger, Viktor Sebestyén, és János Abonyi. 2024. „Utility function-based generalization of sum of ranking differences –

country-wise analysis of greenhouse gas emissions". *Ecological Indicators* 160: 111734. https://doi.org/10.1016/j.ecolind.2024.111734.

ISO/IEC. 2023. *ISO/IEC 42001:2023 Information technology – Artificial intelligence – Management system*. International Organization for Standardization.

Janis, Irving L. 1972. *Victims of Groupthink*. Houghton Mifflin.

Jehn, Karen A. 1995. „A multimethod examination of the benefits and detriments of intragroup conflict". *Administrative Science Quarterly* 40 (2): 256–82. https://doi.org/10.2307/2393638.

Ji, Ziwei, Nayeon Lee, Rita Frieske, és mtsai. 2023. „Survey of Hallucination in Natural Language Generation". *ACM Computing Surveys* 55 (12): 248:1–38. https://doi.org/10.1145/3571730.

Johansen, Bob. 2009. *Leaders Make the Future: Ten New Leadership Skills for an Uncertain World*. Berrett-Koehler.

Juran, Joseph M. 1951. *Quality Control Handbook*. McGraw-Hill.

Kadavath, Saurav, Tom Conerly, Amanda Askell, és mtsai. 2022. *Language Models (Mostly) Know What They Know*. arXiv:2207.05221. https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.05221.

Kahneman, Daniel. 2011. *Thinking, Fast and Slow*. Farrar, Straus; Giroux.

Kahneman, Daniel, Olivier Sibony, és Cass R. Sunstein. 2021. *Noise: A Flaw in Human Judgment*. Little, Brown Spark.

Kahneman, Daniel, és Amos Tversky. 1979. „Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk". *Econometrica* 47 (2): 263–91. https://doi.org/10.2307/1914185.

Kane, Victor E. 1986. „Process Capability Indices". *Journal of Quality Technology* 18 (1): 41–52. https://doi.org/10.1080/00224065.1986.11978984.

Kantorovich, Leonid V. 1960. „Mathematical methods of organizing and planning production". *Management Science* 6 (4): 366–422. https://doi.org/10.1287/mnsc.6.4.366.

Kaufman, Shachar, Saharon Rosset, Claudia Perlich, és Ori Stitelman. 2012. „Leakage in Data Mining: Formulation, Detection, and Avoidance". *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data* 6 (4): 15:1–21. https://doi.org/10.1145/2382577.2382579.

Keeney, Ralph L. 1992. *Value-Focused Thinking: A Path to Creative Decisionmaking*. Harvard University Press.

Keeney, Ralph L., és Howard Raiffa. 1976. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. Wiley.

Kellerer, Hans, Ulrich Pferschy, és David Pisinger. 2004. *Knapsack Problems*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-24777-7.

Kemeny, John G., és J. Laurie Snell. 1960. *Finite Markov Chains*. Van Nostrand.

Kendall, David G. 1953. „Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain". *The Annals of Mathematical Statistics* 24 (3): 338–54. https://doi.org/10.1214/aoms/1177728975.

Kendall, Maurice G. 1938. „A new measure of rank correlation". *Biometrika* 30 (1–2): 81–93. https://doi.org/10.1093/biomet/30.1-2.81.

Kermack, William Ogilvy, és Anderson Gray McKendrick. 1927. „A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics". *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 115 (772): 700–721. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118.

Keynes, John Maynard. 1936. *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Macmillan.

Kilmann, Ralph H., és Kenneth W. Thomas. 1977. „Developing a Forced-Choice Measure of Conflict-Handling Behavior: The »MODE« Instrument". *Educational and Psychological Measurement* 37 (2): 309–25. https://doi.org/10.1177/001316447703700204.

Kim, W. Chan, és Renée Mauborgne. 2005. *Blue Ocean Strategy: How to Create Uncontested Market Space and Make the Competition Irrelevant*. Harvard Business School Press.

Kingman, J. F. C. 1961. „The Single Server Queue in Heavy Traffic". *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 57 (4): 902–4. https://doi.org/10.1017/S0305004100036094.

Klein, Gary. 2007. „Performing a Project Premortem". *Harvard Business Review* 85 (9): 18–19.

Kluger, Avraham N., és Angelo DeNisi. 1996. „The Effects of Feedback Interventions on Performance: A Historical Review, a Meta-Analysis, and

a Preliminary Feedback Intervention Theory". *Psychological Bulletin* 119 (2): 254–84. https://doi.org/10.1037/0033-2909.119.2.254.

Kollár-Hunek, Klára, és Károly Héberger. 2013. „Method and model comparison by sum of ranking differences in cases of repeated observations (ties)". *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* 127: 139–46. https://doi.org/10.1016/j.chemolab.2013.06.007.

Kovenock, Dan, és Brian Roberson. 2012. „Coalitional Colonel Blotto games with application to the economics of alliances". *Journal of Public Economic Theory* 14 (4): 653–76. https://doi.org/10.1111/j.1467-9779.2012.01556.x.

Kozlowski, Steve W. J., és Daniel R. Ilgen. 2006. „Enhancing the effectiveness of work groups and teams". *Psychological Science in the Public Interest* 7 (3): 77–124. https://doi.org/10.1111/j.1529-1006.2006.00030.x.

Kőnig, Dénes. 1931. „Gráfok és mátrixok". *Matematikai és Fizikai Lapok* 38: 116–19.

Krogerus, Mikael, és Roman Tschäppeler. 2011. *The Decision Book: Fifty Models for Strategic Thinking*. Fordította Jenny Piening. Profile Books.

Krogh, Anders, és Jesper Vedelsby. 1995. „Neural Network Ensembles, Cross Validation, and Active Learning". *Advances in Neural Information Processing Systems 7*, 231–38.

Krugman, Paul. 1994. „The Myth of Asia's Miracle". *Foreign Affairs* 73 (6): 62–78. https://doi.org/10.2307/20046929.

Kuhn, Harold W. 1955. „The Hungarian method for the assignment problem". *Naval Research Logistics Quarterly* 2 (1–2): 83–97. https://doi.org/10.1002/nav.3800020109.

Lahdelma, Risto, Joonas Hokkanen, és Pekka Salminen. 1998. „SMAA – Stochastic Multiobjective Acceptability Analysis". *European Journal of Operational Research* 106 (1): 137–43. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00163-X.

Ledyard, John O. 1995. „Public goods: A survey of experimental research". In *The Handbook of Experimental Economics*, szerkesztette John H. Kagel és Alvin E. Roth. Princeton University Press.

Lempert, Robert J., Steven W. Popper, és Steven C. Bankes. 2003. *Shaping the Next One Hundred Years: New Methods for Quantitative, Long-Term Policy Analysis*. RAND Corporation.

Little, John D. C. 1961. „A Proof for the Queuing Formula: $L = \lambda W$”. *Operations Research* 9 (3): 383–87. https://doi.org/10.1287/opre.9.3.383.

Locke, Edwin A., és Gary P. Latham. 2002. „Building a Practically Useful Theory of Goal Setting and Task Motivation: A 35-Year Odyssey”. *American Psychologist* 57 (9): 705–17. https://doi.org/10.1037/0003-066X.57.9.705.

Lorenz, Edward N. 1963. „Deterministic Nonperiodic Flow”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 20 (2): 130–41. https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2.

Lorenz, Jan, Heiko Rauhut, Frank Schweitzer, és Dirk Helbing. 2011. „How Social Influence Can Undermine the Wisdom of Crowd Effect”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108 (22): 9020–25. https://doi.org/10.1073/pnas.1008636108.

Luenberger, David G. 1979. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*. Wiley.

Luft, Joseph, és Harrington Ingham. 1955. „The Johari Window, a Graphic Model of Interpersonal Awareness”. In *Proceedings of the Western Training Laboratory in Group Development*. University of California, Los Angeles.

Malkiel, Burton G. 2019. *A Random Walk Down Wall Street: The Time-Tested Strategy for Successful Investing*. 12. kiad. W. W. Norton.

Mandelbrot, Benoit B. 1967. „How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension”. *Science* 156 (3775): 636–38. https://doi.org/10.1126/science.156.3775.636.

Mandelbrot, Benoit B. 1982. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman.

March, James G. 1991. „Exploration and Exploitation in Organizational Learning”. *Organization Science* 2 (1): 71–87. https://doi.org/10.1287/orsc.2.1.71.

Marchau, Vincent A. W. J., Warren E. Walker, Pieter J. T. M. Bloemen, és Steven W. Popper, szerk. 2019. *Decision Making under Deep Uncertainty: From Theory to Practice*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-05252-2.

Maslow, Abraham H. 1943. „A Theory of Human Motivation”. *Psychological Review* 50 (4): 370–96. https://doi.org/10.1037/h0054346.

Mauboussin, Michael J. 2012. *The Success Equation: Untangling Skill and Luck in Business, Sports, and Investing*. Harvard Business Review Press.

Mauss, Marcel. 1925. „Essai sur le don. Forme et raison de l'échange dans les sociétés archaïques". *L'Année sociologique, nouvelle série* 1: 30–186.

May, Robert M. 1976. „Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics". *Nature* 261: 459–67. https://doi.org/10.1038/261459a0.

Meadows, Donella H. 2008. *Thinking in Systems: A Primer*. Chelsea Green.

Metropolis, Nicholas, és Stanislaw Ulam. 1949. „The Monte Carlo Method". *Journal of the American Statistical Association* 44 (247): 335–41. https://doi.org/10.1080/01621459.1949.10483310.

Milgram, Stanley. 1967. „The Small World Problem". *Psychology Today* 1 (1): 61–67.

Miller, John H., és Scott E. Page. 2004. „The Standing Ovation Problem". *Complexity* 9 (5): 8–16. https://doi.org/10.1002/cplx.20033.

Montgomery, Douglas C. 2020. *Introduction to Statistical Quality Control*. 8. kiad. Wiley.

Moore, Geoffrey A. 1991. *Crossing the Chasm: Marketing and Selling High-Tech Products to Mainstream Customers*. HarperBusiness.

Munkres, James. 1957. „Algorithms for the assignment and transportation problems". *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 5 (1): 32–38. https://doi.org/10.1137/0105003.

Murre, Jaap M. J., és Joeri Dros. 2015. „Replication and analysis of Ebbinghaus' forgetting curve". *PLoS ONE* 10 (7): e0120644. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0120644.

Myerson, Roger B., és Mark A. Satterthwaite. 1983. „Efficient mechanisms for bilateral trading". *Journal of Economic Theory* 29 (2): 265–81. https://doi.org/10.1016/0022-0531(83)90048-0.

Nagel, Kai, és Michael Schreckenberg. 1992. „A Cellular Automaton Model for Freeway Traffic". *Journal de Physique I* 2 (12): 2221–29. https://doi.org/10.1051/jp1:1992277.

Nagel, Rosemarie. 1995. „Unraveling in Guessing Games: An Experimental Study". *American Economic Review* 85 (5): 1313–26.

Nash, John F. 1950. „Equilibrium Points in n-Person Games". *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36 (1): 48–49. https://doi.org/10.1073/pnas.36.1.48.

National Institute of Standards and Technology. 2023. *Artificial Intelligence Risk Management Framework (AI RMF 1.0)*. NIST AI 100-1. NIST. https://doi.org/10.6028/NIST.AI.100-1.

National Institute of Standards and Technology. 2024. *Artificial Intelligence Risk Management Framework: Generative Artificial Intelligence Profile*. NIST AI 600-1. NIST. https://doi.org/10.6028/NIST.AI.600-1.

Neumann, John von. 1966. *Theory of Self-Reproducing Automata*. Szerkesztette Arthur W. Burks. University of Illinois Press.

Neumann, John von, és Oskar Morgenstern. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

Newman, Mark. 2018. *Networks*. 2. kiad. Oxford University Press.

Newman, Mark E. J. 2005. „Power Laws, Pareto Distributions and Zipf's Law". *Contemporary Physics* 46 (5): 323–51. https://doi.org/10.1080/00107510500052444.

Nickerson, Raymond S. 1998. „Confirmation Bias: A Ubiquitous Phenomenon in Many Guises". *Review of General Psychology* 2 (2): 175–220. https://doi.org/10.1037/1089-2680.2.2.175.

Norris, James R. 1997. *Markov Chains*. Cambridge University Press.

Nowak, Martin A. 2006. „Five Rules for the Evolution of Cooperation". *Science* 314 (5805): 1560–63. https://doi.org/10.1126/science.1133755.

Ohtsuki, Hisashi, Christoph Hauert, Erez Lieberman, és Martin A. Nowak. 2006. „A Simple Rule for the Evolution of Cooperation on Graphs and Social Networks". *Nature* 441 (7092): 502–5. https://doi.org/10.1038/nature04605.

Osborn, Alex F. 1953. *Applied Imagination: Principles and Procedures of Creative Thinking*. Scribner.

Osborne, Martin J. 2004. *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press.

Ostrom, Elinor. 1990. *Governing the Commons: The Evolution of Institutions for Collective Action*. Cambridge University Press.

Page, Scott E. 2007. *The Difference: How the Power of Diversity Creates Better Groups, Firms, Schools, and Societies*. Princeton University Press.

Page, Scott E. 2018. *The Model Thinker: What You Need to Know to Make Data Work for You*. Basic Books.

Page, Scott E. é. n. *Model Thinking*. Michigan Online, University of Michigan, online kurzus. https://online.umich.edu/courses/model-thinking/.

Parasuraman, Raja, és Dietrich H. Manzey. 2010. „Complacency and Bias in Human Use of Automation: An Attentional Integration". *Human Factors* 52 (3): 381–410. https://doi.org/10.1177/0018720810376055.

Pareto, Vilfredo. 1906. *Manuale di economia politica*. Società Editrice Libraria.

Pastor-Satorras, Romualdo, Claudio Castellano, Piet Van Mieghem, és Alessandro Vespignani. 2015. „Epidemic Processes in Complex Networks". *Reviews of Modern Physics* 87 (3): 925–79. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.925.

Pearl, Judea. 2009. *Causality: Models, Reasoning, and Inference*. 2. kiad. Cambridge University Press.

Phelps, Edmund S. 1961. „The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen". *American Economic Review* 51 (4): 638–43.

Pigou, Arthur C. 1920. *The Economics of Welfare*. Macmillan.

Porter, Michael E. 1996. „What is strategy?" *Harvard Business Review* 74 (6): 61–78.

Price, George R. 1970. „Selection and covariance". *Nature* 227: 520–21. https://doi.org/10.1038/227520a0.

Puterman, Martin L. 1994. *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. Wiley.

Puyt, Richard W., Finn Birger Lie, és Celeste P. M. Wilderom. 2023. „The Origins of SWOT Analysis". *Long Range Planning* 56 (3): 102304. https://doi.org/10.1016/j.lrp.2023.102304.

Python Software Foundation. 2025. *The Python Tutorial*. Https://docs.python.org/3/tutorial/.

Raiffa, Howard. 1968. *Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices under Uncertainty*. Addison-Wesley.

Reason, James. 1990. *Human Error*. Cambridge University Press.

Reason, James. 2000. „Human Error: Models and Management”. *BMJ* 320 (7237): 768–70. https://doi.org/10.1136/bmj.320.7237.768.

Ridgeway, Cecilia L. 2014. „Why status matters for inequality”. *American Sociological Review* 79 (1): 1–16. https://doi.org/10.1177/0003122413515997.

Ritchey, Tom. 2011. *Wicked Problems – Social Messes: Decision Support Modelling with Morphological Analysis*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-19653-9.

Roberson, Brian. 2006. „The Colonel Blotto Game”. *Economic Theory* 29 (1): 1–24. https://doi.org/10.1007/s00199-005-0071-5.

Rogers, Everett M. 2003. *Diffusion of Innovations*. 5. kiad. Free Press.

Roy, Bernard. 1968. „Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)”. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle* 2 (8): 57–75.

Roy, Bernard. 1991. „The Outranking Approach and the Foundations of ELECTRE Methods”. *Theory and Decision* 31 (1): 49–73. https://doi.org/10.1007/BF00134132.

Rudin, Cynthia. 2019. „Stop Explaining Black Box Machine Learning Models for High Stakes Decisions and Use Interpretable Models Instead”. *Nature Machine Intelligence* 1 (5): 206–15. https://doi.org/10.1038/s42256-019-0048-x.

Saaty, Thomas L. 1980. *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill.

Saaty, Thomas L. 1990. „How to Make a Decision: The Analytic Hierarchy Process”. *European Journal of Operational Research* 48 (1): 9–26. https://doi.org/10.1016/0377-2217(90)90057-I.

Saltelli, Andrea, Marco Ratto, Terry Andres, és mtsai. 2008. *Global Sensitivity Analysis: The Primer*. Wiley. https://doi.org/10.1002/9780470725184.

Savage, Leonard J. 1951. „The Theory of Statistical Decision”. *Journal of the American Statistical Association* 46 (253): 55–67. https://doi.org/10.1080/01621459.1951.10500768.

Savage, Sam L. 2009. *The Flaw of Averages: Why We Underestimate Risk in the Face of Uncertainty*. Wiley.

Schelling, Thomas C. 1960. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press.

Schelling, Thomas C. 1971. „Dynamic Models of Segregation”. *The Journal of Mathematical Sociology* 1 (2): 143–86. https://doi.org/10.1080/0022250X.1971.9989794.

Selten, Reinhard. 1975. „Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games”. *International Journal of Game Theory* 4 (1): 25–55. https://doi.org/10.1007/BF01766400.

Shewhart, Walter A. 1931. *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. Van Nostrand.

Shmueli, Galit. 2010. „To Explain or to Predict?” *Statistical Science* 25 (3): 289–310. https://doi.org/10.1214/10-STS330.

Shortle, John F., James M. Thompson, Donald Gross, és Carl M. Harris. 2018. *Fundamentals of Queueing Theory*. 5. kiad. Wiley. https://doi.org/10.1002/9781119453765.

Silver, Edward A., David F. Pyke, és Douglas J. Thomas. 2017. *Inventory and Production Management in Supply Chains*. 4. kiad. CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781315374406.

Simon, Herbert A. 1955. „A Behavioral Model of Rational Choice”. *The Quarterly Journal of Economics* 69 (1): 99–118. https://doi.org/10.2307/1884852.

Solow, Robert M. 1956. „A Contribution to the Theory of Economic Growth”. *The Quarterly Journal of Economics* 70 (1): 65–94. https://doi.org/10.2307/1884513.

Spearman, Charles. 1904. „The proof and measurement of association between two things”. *The American Journal of Psychology* 15 (1): 72–101. https://doi.org/10.2307/1412159.

Spetzler, Carl, Hannah Winter, és Jennifer Meyer. 2016. *Decision Quality: Value Creation from Better Business Decisions*. Wiley.

Stauffer, Dietrich, és Amnon Aharony. 1994. *Introduction to Percolation Theory*. 2. kiad. Taylor & Francis.

Sterman, John D. 2000. *Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World*. Irwin/McGraw-Hill.

Stiehm, Judith Hicks. 2002. *The U.S. Army War College: Military Education in a Democracy*. Temple University Press.

Strogatz, Steven H. 2015. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 2. kiad. Westview Press.

Surowiecki, James. 2004. *The Wisdom of Crowds*. Doubleday.

Sziklai, Balázs R., Máté Baranyi, és Károly Héberger. 2021. *Testing rankings with cross-validation*. arXiv:2105.11939. https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.11939.

Sziklai, Balázs R., és Károly Héberger. 2020. „Apportionment and districting by Sum of Ranking Differences". *PLOS ONE* 15 (3): e0229209. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0229209.

Taleb, Nassim Nicholas. 2007. *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*. Random House.

Taylor, Peter D., és Leo B. Jonker. 1978. „Evolutionary Stable Strategies and Game Dynamics". *Mathematical Biosciences* 40 (1–2): 145–56. https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90077-9.

Tetlock, Philip E., és Dan Gardner. 2015. *Superforecasting: The Art and Science of Prediction*. Crown.

Thompson, Gregory, és Robert P. Vecchio. 2009. „Situational Leadership Theory: A Test of Three Versions". *The Leadership Quarterly* 20 (5): 837–48. https://doi.org/10.1016/j.leaqua.2009.06.014.

Travers, Jeffrey, és Stanley Milgram. 1969. „An Experimental Study of the Small World Problem". *Sociometry* 32 (4): 425–43. https://doi.org/10.2307/2786545.

Tuckman, Bruce W. 1965. „Developmental Sequence in Small Groups". *Psychological Bulletin* 63 (6): 384–99. https://doi.org/10.1037/h0022100.

Tversky, Amos, és Daniel Kahneman. 1974. „Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases". *Science* 185 (4157): 1124–31. https://doi.org/10.1126/science.185.4157.1124.

Tversky, Amos, és Daniel Kahneman. 1981. „The Framing of Decisions and the Psychology of Choice". *Science* 211 (4481): 453–58. https://doi.org/10.1126/science.7455683.

VanderPlas, Jake. 2016. *Python Data Science Handbook: Essential Tools for Working with Data*. O'Reilly Media. https://jakevdp.github.io/PythonDataScienceHandbook/.

Vickrey, William. 1961. „Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders". *The Journal of Finance* 16 (1): 8–37. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x.

Vose, David. 2008. *Risk Analysis: A Quantitative Guide*. 3. kiad. Wiley.

Wahba, Mahmoud A., és Lawrence G. Bridwell. 1976. „Maslow Reconsidered: A Review of Research on the Need Hierarchy Theory". *Organizational Behavior and Human Performance* 15 (2): 212–40. https://doi.org/10.1016/0030-5073(76)90038-6.

Wald, Abraham. 1950. *Statistical Decision Functions*. Wiley.

Watts, Duncan J., és Steven H. Strogatz. 1998. „Collective Dynamics of »Small-World« Networks". *Nature* 393 (6684): 440–42. https://doi.org/10.1038/30918.

Whitmore, John. 2017. *Coaching for Performance: The Principles and Practice of Coaching and Leadership*. 5. kiad. Nicholas Brealey.

Winterfeldt, Detlof von, és Ward Edwards. 1986. *Decision Analysis and Behavioral Research*. Cambridge University Press.

Wolfram, Stephen. 1984. „Universality and Complexity in Cellular Automata". *Physica D* 10 (1–2): 1–35. https://doi.org/10.1016/0167-2789(84)90245-8.

Wolfram, Stephen. 2002. *A New Kind of Science*. Wolfram Media.

Wozniak, Piotr A., és Edward J. Gorzelańczyk. 1994. „Optimization of Repetition Spacing in the Practice of Learning". *Acta Neurobiologiae Experimentalis* 54 (1): 59–62.

Zhu, Meng, Yang Yang, és Christopher K. Hsee. 2018. „The Mere Urgency Effect". *Journal of Consumer Research* 45 (3): 673–90. https://doi.org/10.1093/jcr/ucy008.

Zwicky, Fritz. 1969. *Discovery, Invention, Research through the Morphological Approach*. Macmillan.

A.

Matematikai alapok

Ez a függelék a könyvben használt matematikai fogalmakat foglalja össze tömören, a fejezetekre hivatkozva. Nem helyettesít egy matematikai tankönyvet; célja, hogy a szöveg képletei egy helyen visszakereshetők legyenek.

A.1. Jelölések

Jel	Jelentés
$a_1, \dots, a_m$	alternatívák
$c_1, \dots, c_n$	kritériumok
x_{ij}	az i-edik alternatíva nyers értéke a j-edik kritériumon
$v_j(\cdot)$	a j-edik kritérium részértékfüggvénye (0–100 vagy 0–1 skála)
w_j	a j-edik kritérium súlya, $w_j \geq 0$, $\sum_j w_j = 1$
$V(a_i)$	az i-edik alternatíva összesített értéke
$P(A)$, $P(A \mid B)$	valószínűség, feltételes valószínűség
$\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$	várható érték, szórásnégyzet
$u(\cdot)$	hasznossági függvény

A tizedesvessző a magyar helyesírás szerint vessző, a könyv számai ennek megfelelően szerepelnek; a kódban és a munkafüzetek képleteiben a programok saját jelölése (pont) érvényes.

A.2. Dominancia és Pareto-front

Legyen minden kritérium maximalizálandó, és $f(a) = (f_1(a), \dots, f_k(a))$ az a alternatíva kritériumvektora. Az a **dominálja** a b-t, ha $f_i(a) \geq f_i(b)$ minden i-re, és legalább egy kritériumon szigorúan jobb. A nem dominált alternatívák halmaza a Pareto-halmaz, a képe a kritériumtérben a **Pareto-front** (7.6. szakasz) (Pareto 1906; Ehrgott 2005). Minimalizálandó kritériumot (költség, idő) előjelváltással vagy a reláció megfordításával kezelünk. Szigorúan pozitív súlyokkal képzett súlyozott összeg maximuma mindig Pareto-hatékony, de fordítva ez nem igaz: a front nem konvex szakaszainak pontjai súlyozott összeggel nem érhetők el, csak például az ε-korlát módszerrel (13.4. szakasz). m alternatíva és k kritérium esetén a nem dominált halmaz páronkénti összevetéssel legfeljebb $k\,m^2$ összehasonlítással meghatározható.

A.3. Értékfüggvények, normalizálás és additív aggregálás

A lineáris részértékfüggvény egy növekvő irányú kritériumra, az L alsó és U felső horgony között:

$$v_j(x) = 100 \cdot \frac{x - L_j}{U_j - L_j},$$

csökkenő irányú kritériumra $v_j(x) = 100 \cdot (U_j - x)/(U_j - L_j)$. Az **additív értékmodell** (8. fejezet):

$$V(a_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j \, v_j(x_{ij}).$$

A modell érvényességének feltétele a kölcsönös preferenciafüggetlenség: egy kritérium szerinti preferencia ne függjön a többi kritérium rögzített értékétől (Keeney és Raiffa 1976). Ha egy súlyt t-re változtatunk, és a többit eredeti arányukban $1 - t$ összegre normáljuk, az összesített érték t lineáris függvénye; két alternatíva egyenlőségének küszöbe egy lineáris egyenlet megoldása (8.4. szakasz).

A TOPSIS **vektornormalizálása** (10.4. szakasz): $r_{ij} = x_{ij} / \sqrt{\sum_k x_{kj}^2}$, a súlyozott érték $y_{ij} = w_j r_{ij}$, a közelségi mutató $C_i = d_i^- / (d_i^+ + d_i^-)$, ahol $d_i^{\pm}$ az ideális és az anti-ideális ponttól mért euklideszi távolság.

A.4. Sajátérték, sajátvektor és az AHP

Egy $n \times n$-es A mátrix **sajátvektora** olyan $w \neq 0$ vektor, amelyre $Aw = \lambda w$; a λ szám a sajátérték. Pozitív mátrixnak a Perron–Frobenius-tétel szerint van egy legnagyobb, pozitív sajátértéke ($\lambda_{\max}$), és a hozzá tartozó sajátvektor minden eleme pozitív. Az AHP prioritásvektora ez a sajátvektor, egységnyi összegre normálva (9.3. szakasz) (Saaty 1980). Közelítő kiszámítása **hatványiterációval**: $w^{(k+1)} = Aw^{(k)} / \lVert Aw^{(k)} \rVert_1$, amíg a vektor nem változik.

Konzisztens (kölcsönösen és tranzitívan egyező) páros összehasonlító mátrixnál $\lambda_{\max} = n$. A **konzisztenciaindex** és **-hányados**:

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \qquad CR = \frac{CI}{RI_n},$$

ahol RI_n véletlen mátrixok átlagos konzisztenciaindexe ($RI_3 = 0{,}58$, $RI_4 = 0{,}90$, $RI_5 = 1{,}12$ Saaty táblázata szerint). A szokásos elfogadási küszöb $CR \leq 0{,}10$ (9.4. szakasz).

A.5. Rangsorok távolsága: rangkorreláció és SRD

Két, n elemű rangsor eltérését a d_i rangkülönbségekkel mérjük. A Spearman-féle együttható $\rho = 1 - 6 \sum_i d_i^2 / (n(n^2-1))$, a Kendall-féle $\tau = (n_c - n_d) / \binom{n}{2}$, ahol n_c az egyező, n_d az ellentétes sorrendű párok száma (Spearman 1904; Kendall 1938). A **rangsorkülönbség-összeg** a különbségek abszolút értékének összege, $\mathrm{SRD} = \sum_i |r_i - r_i^{\mathrm{ref}}|$; legnagyobb értéke a fordított sorrendnél áll elő: $n^2/2$ páros és $(n^2-1)/2$ páratlan n esetén (12.6. szakasz) (Héberger 2010). A statisztikában ez a távolság Spearman „lábszabálya” (*Spearman's footrule*) néven is ismert; véletlen permutációk esetén a várható értéke $(n^2-1)/3$, tíz elemnél tehát 33 (Diaconis és Graham 1977). A CRRN-validálás a véletlen permutációk SRD-eloszlását kis n-re pontos felsorolással, nagyobbra szimulációval adja (Héberger és Kollár-Hunek 2011).

A.6. Valószínűség és Bayes-tétel

Események A és B, $P(B) > 0$ esetén a **feltételes valószínűség** $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$. A **teljes valószínűség tétele** egy $B_1, \dots, B_k$ teljes eseményrendszerre $P(A) = \sum_i P(A \mid B_i)\, P(B_i)$. A **Bayes-tétel** (15.1. szakasz):

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)\, P(B_i)}{\sum_k P(A \mid B_k)\, P(B_k)}.$$

Egy X valószínűségi változó **várható értéke** diszkrét esetben $\mathrm{E}[X] = \sum_x x\,P(X = x)$, **szórásnégyzete** $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)^2]$. Független változók összegének szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege; korrelált változóknál a kovarianciák kétszeresével bővül. A Monte Carlo-becslés standard hibája $\sigma/\sqrt{N}$, ahol N a minták száma (16.3. szakasz).

A.7. Normális eloszlás, centrális határeloszlás-tétel és folyamatképesség

A $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\!\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$; a standardizált $z = (x-\mu)/\sigma$ változó eloszlásfüggvényét $\Phi(z)$ jelöli. A $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$ és $\mu \pm 3\sigma$ sávba a valószínűség 68,3, 95,4, illetve 99,73%-a esik. A **centrális határeloszlás-tétel** szerint független, azonos eloszlású, véges szórású változók standardizált összege normális eloszláshoz tart (16.4. szakasz) (Feller 1968). A **folyamatképességi indexek** $C_p = (\mathrm{USL} - \mathrm{LSL})/(6\sigma)$ és $C_{pk} = \min(\mathrm{USL} - \mu,\ \mu - \mathrm{LSL})/(3\sigma)$; normális eloszlásnál a tűrésen kívül eső hányad $\Phi\!\left(-(\mathrm{USL}-\mu)/\sigma\right) + \Phi\!\left(-(\mu-\mathrm{LSL})/\sigma\right)$ (16.6. szakasz) (Montgomery 2020). A hat szigma közismert, millió darabonként 3,4 hibás értéke egyoldali $4{,}5\sigma$-s távolságnak felel meg: a módszertan a 6σ-s tűréstávolságból a hosszú távú átlageltolódásra $1{,}5\sigma$-t levon, és $1 - \Phi(4{,}5) \approx 3{,}4 \cdot 10^{-6}$ (Harry és Schroeder 2000).

A.8. Várható érték, hasznosság és az információ értéke

A döntési fában a véletlen csomópont értéke az ágak várható értéke, a döntési csomópont értéke a legjobb ág értéke (visszagöngyölítés, 14.4. szakasz). Az exponenciális hasznossági függvény $u(x) = 1 - e^{-x/R}$ (R a kockázattűrés), a **biztos egyenérték** az az összeg, amelynek hasznossága egyenlő a lottéria várható hasznosságával: $CE = u^{-1}(\mathrm{E}[u(X)])$ (14.5. szakasz) (Howard 1988).

A **tökéletes információ várható értéke**:

$$\mathrm{EVPI} = \mathrm{E}_\theta\Big[\max_a U(a,\theta)\Big] - \max_a \mathrm{E}_\theta[U(a,\theta)],$$

a **mintainformáció várható értéke** (EVSI) ugyanez a lehetséges mérési eredményekre vett, a poszterior eloszlással számolt várható értékkel (15.4. szakasz) (Raiffa 1968). Mindig $0 \le \mathrm{EVSI} \le \mathrm{EVPI}$.

A.9. Lineáris és egészértékű programozás

A **lineáris program** általános alakja:

$$\max_{x} \; c^{\top} x \quad \text{feltéve, hogy} \quad Ax \le b,\; x \ge 0.$$

Ha a változók csak 0 vagy 1 értéket vehetnek fel, **bináris programozásról** beszélünk; a 13.3. szakasz portfólióválasztása (hátizsák-feladat) ilyen (Kellerer és mtsai. 2004). A CASE03 kis mérete miatt mind a $2^8 = 256$ részhalmaz felsorolható, nagyobb feladatnál korlátozás és szétválasztás (*branch and bound*) vagy kereskedelmi és nyílt forrású megoldók kellenek. Két cél esetén az **ε-korlát módszer** az egyik célt korlátként kezeli, és a másikat optimalizálja; a korlát változtatásával a Pareto-front nem támogatott pontjai is elérhetők (Haimes és mtsai. 1971; Ehrgott 2005).

A **hozzárendelési feladat** (13.6. szakasz) bináris változókra felírt lineáris program, amelynek korlátmátrixa teljesen unimoduláris; ezért a folytonos relaxáció ($0 \le x_{ij} \le 1$) optimuma is egészértékű, és a feladat lineáris programként is megoldható. A **magyar módszer** a duális feladatra épül: a költségmátrix soraiból és oszlopaiból levont u_i, v_j potenciálokkal ($c_{ij} - u_i - v_j \ge 0$) addig alakítja a mátrixot, amíg a nulla elemek között n független, azaz különböző sorban és oszlopban álló nem található. Kőnig Dénes tétele szerint a nulla elemeket lefedő sorok és oszlopok legkisebb száma egyenlő a független nullák legnagyobb számával; Egerváry Jenő ezt súlyozott mátrixokra általánosította. Harold Kuhn e két eredményre építette az eljárást, és tiszteletükre nevezte magyar módszernek; James Munkres igazolta, hogy lépésszáma polinomiális (Kőnig 1931; Egerváry 1931; Kuhn 1955; Munkres 1957). A **szállítási feladat** a hozzárendelés általánosítása: m forrás a_i kínálatát kell n cél b_j igényéhez rendelni a legkisebb költséggel, $\sum_j x_{ij} \le a_i$, $\sum_i x_{ij} \ge b_j$, $x_{ij} \ge 0$ feltételek mellett (13.5.1. szakasz) (Hitchcock 1941).

A kétszemélyes **zéróösszegű játék** kevert egyensúlya is lineáris programmal számítható (23.5. szakasz). Ha M a sorjátékos kifizetési táblázata, a sorjátékos optimális kevert stratégiája x:

$$\max_{x,v} \; v \quad \text{feltéve, hogy} \quad M^{\top} x \ge v\mathbf{1},\; \mathbf{1}^{\top} x = 1,\; x \ge 0.$$

Az optimális v a játék értéke; a minimax-tétel szerint a két játékos optimuma egyenlő (Neumann és Morgenstern 1944).

A.10. Markov-láncok

Egy véges állapotterű, diszkrét idejű **Markov-lánc** átmenetmátrixa P, ahol P_{ij} annak valószínűsége, hogy az i állapotból egy lépésben a j állapotba jutunk; minden sor összege 1. Ha $p^{(t)}$ az állapotvalószínűségek sorvektora, akkor $p^{(t+1)} = p^{(t)}P$, így $p^{(t)} = p^{(0)}P^t$ (20.2. szakasz) (Norris 1997).

Irreducibilis, aperiodikus láncnak egyértelmű **stacionárius eloszlása** van: $\pi P = \pi$, $\sum_i \pi_i = 1$ (20.3. szakasz). **Elnyelő** láncnál a P mátrixot a tranziens állapotok Q blokkjára és az elnyelő átmenetekre bontjuk; az **alapmátrix** $N = (I - Q)^{-1}$, az elnyelésig várható lépésszám $t = N\mathbf{1}$ (20.4. szakasz) (Kemeny és Snell 1960).

A.11. Differenciaegyenletek és növekedési modellek

A készlet–áram modell diszkrét alakja $S_{t+1} = S_t + \text{beáramlás}_t - \text{kiáramlás}_t$ (19.1. szakasz). A **logisztikus növekedés** $x_{t+1} = x_t + r\,x_t(1 - x_t/K)$, folytonos alakja $\dot{x} = rx(1 - x/K)$ (19.8. szakasz). A **Bass-diffúziós modell** (21.2.1. szakasz) (Bass 1969):

$$\frac{dN}{dt} = \left(p + q\,\frac{N}{m}\right)(m - N),$$

ahol p az innovációs, q az imitációs együttható, m a piaci potenciál; az új elfogadók száma a $t^{*} = \ln(q/p)/(p+q)$ időpontban maximális.

A **SIR-járványmodell** (21.2. szakasz) $\dot{S} = -\beta SI$, $\dot{I} = \beta SI - \gamma I$, $\dot{R} = \gamma I$, ahol $S + I + R = 1$ a fogékonyak, fertőzők és gyógyultak aránya. A járvány akkor indul, ha az alap reprodukciós szám $R_0 = \beta/\gamma > 1$; a végül megfertőződők z aránya a $z = 1 - e^{-R_0 z}$ egyenlet pozitív gyöke, a nyájimmunitási küszöb $1 - 1/R_0$ (Kermack és McKendrick 1927).

A **diszkrét replikátordinamika** (25.1. szakasz): $p_i' = p_i f_i / \bar{f}$. Állandó sikerességi értékek mellett az átlagos sikeresség egy lépésben pontosan $\mathrm{Var}_p(f)/\bar{f}$-fel nő.

A.12. Állapottér, stabilitás és káosz

Az **állapottér-modell** diszkrét időben $x(t+1) = f(x(t), u(t))$, folytonos időben $\dot{x} = F(x, u)$, ahol x az állapotvektor, u a bemenet (19.5. szakasz) (Luenberger 1979). Az x^{*} pont **egyensúlyi**, ha $f(x^{*}, u) = x^{*}$, illetve $F(x^{*}, u) = 0$. Lineáris rendszernél, $x(t+1) = A\,x(t)$, a megoldás

$x(t) = A^t x(0)$; ha A diagonalizálható, $x(t) = \sum_i c_i \lambda_i^t v_i$, ezért az egyensúly akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha minden sajátértékre $|\lambda_i| < 1$. Folytonos időben $x(t) = e^{At}x(0) = \sum_i c_i e^{\lambda_i t} v_i$, és a feltétel $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$. Nemlineáris rendszert az egyensúly környezetében a Jacobi-mátrixszal, $A = \partial f/\partial x\,|_{x^*}$, linearizálunk; egy változó esetén a stabilitás elégséges feltétele $|f'(x^*)| < 1$ (19.6. szakasz) (Strogatz 2015; Åström és Murray 2021). Az Euler-közelítés, $x(t+\Delta t) \approx x(t) + \Delta t\, F(x(t))$, a folytonos modellt diszkrétté alakítja; a λ sajátértékből $1 + \Delta t\,\lambda$ lesz, ezért túl nagy lépésköz egy stabil folytonos rendszert is instabil diszkrét modellé tehet.

A **Solow-modell**, $k(t+1) = k(t) + sAk(t)^{\alpha} - \delta k(t)$, egyensúlya $k^* = (sA/\delta)^{1/(1-\alpha)}$; az egy főre jutó tartós fogyasztást maximalizáló, úgynevezett aranyszabály szerinti megtakarítási ráta Cobb–Douglas-termelési függvénynél $s = \alpha$ (19.8.1. szakasz) (Solow 1956; Phelps 1961).

A **logisztikus leképezés**, $y(t+1) = R\,y(t)(1-y(t))$, nem triviális egyensúlya $y^* = 1 - 1/R$, ahol $f'(y^*) = 2 - R$; ez $1 < R < 3$ esetén stabil. $R = 3$-nál periódus-kettőződési **bifurkáció** következik be, a további kettőződések $R \approx 3{,}449$ és $3{,}544$ értéknél jönnek; a kettőződési értékek közötti távolságok aránya a Feigenbaum-állandóhoz ($\delta \approx 4{,}669$) tart, és $R_\infty \approx 3{,}5699$ fölött – a periodikus ablakokat kivéve – a pályák kaotikusak (19.9. szakasz) (May 1976; Feigenbaum 1978). A káosz mértéke a **Ljapunov-exponens**, $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} \ln|f'(y_t)|$: pozitív értéke azt jelzi, hogy a közeli pályák exponenciálisan távolodnak egymástól, vagyis a rendszer érzékeny a kezdeti feltételekre (Lorenz 1963).

A.13. Készletezés és várakozási sorok

Állandó D éves kereslet, S rendelési és h egységnyi éves tartási költség mellett az éves összköltség $K(Q) = DS/Q + hQ/2$; a $K'(Q) = 0$ feltételből adódik a **gazdaságos rendelési tétel**, $Q^* = \sqrt{2DS/h}$, amelynél a rendelési és a tartási költség egyenlő (19.2. szakasz) (Harris 1913). Bizonytalan, d átlagú és σ_d szórású napi kereslet és L napos átfutási idő mellett az **újrarendelési pont** $R = dL + z\,\sigma_d\sqrt{L}$, ahol $z = \Phi^{-1}(\text{kiszolgálási szint})$. Az egyszeri rendelésű **újságárus-modell** optimuma a kritikus hányados: $F(Q^*) = c_u/(c_u + c_o)$, ahol F a kereslet eloszlásfüggvénye, c_u egy elmaradt eladás, c_o egy megmaradt darab egységköltsége (Arrow és mtsai. 1951; Silver és mtsai. 2017).

Az **M/M/1 sorban** az érkezések λ intenzitású Poisson-folyamatot alkotnak, a kiszolgálási idő $1/\mu$ átlagú exponenciális eloszlású. A születési–halálozási folyamat egyensúlyi egyenleteiből ($\lambda\pi_n = \mu\pi_{n+1}$) a rendszerben lévők számának eloszlása $\pi_n = (1-\rho)\rho^n$, ahol $\rho = \lambda/\mu < 1$; az átlagos átfutási idő $W = 1/(\mu - \lambda)$ (20.5. szakasz) (Shortle és mtsai. 2018). **Little törvénye**,

$L = \lambda W$, eloszlásfeltevés nélkül, minden stabil rendszerre érvényes (Little 1961). c párhuzamos kiszolgálónál a várakozás valószínűségét az Erlang-C képlet adja (Erlang 1909); általános érkezési és kiszolgálási eloszlásnál a Kingman-közelítés $W_q \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \cdot t_s$, ahol c_a és c_s az érkezések közötti és a kiszolgálási idő relatív szórása, t_s az átlagos kiszolgálási idő (Kingman 1961).

A.14. Hálózati mértékek

Egy n csúcsú, irányítatlan gráf csúcsának **fokszáma** a szomszédai száma; az **átlagos úthossz** $L = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} d(i,j)$, ahol $d(i,j)$ a legrövidebb út hossza. A csúcs **csoportosulási együtthatója** $C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i-1)}$, ahol e_i a k_i szomszéd közötti élek száma. A **közöttiségi központiság** normált alakja

$$b(v) = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{s \neq v \neq t} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}},$$

ahol σ_{st} az s és t közötti legrövidebb utak száma, $\sigma_{st}(v)$ ezek közül a v-n áthaladóké (22.1. szakasz) (Newman 2018).

A.15. Fraktáldimenzió

Egy önhasonló alakzat, amely N darab, r arányban kicsinyített másolatából áll, **hasonlósági dimenziója** $D = \log N / \log(1/r)$. A Sierpiński-háromszögre $N = 3$, $r = 1/2$, így $D = \log 3 / \log 2 \approx 1{,}585$. Ábrákra és mért adatokra a **dobozszámlálási dimenzió** használható: ha $N(\varepsilon)$ az alakzatot lefedő, ε oldalú négyzetek száma, akkor D a $\log N(\varepsilon)$–$\log(1/\varepsilon)$ egyenes meredeksége kis ε értékeknél (22.5. szakasz) (Mandelbrot 1982).

A.16. A diverzitás-azonosság levezetése

Legyen $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$. Ekkor

$$\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \theta)^2 = \frac{1}{n}\sum_i \left((x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \theta)\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \theta)^2,$$

mert a vegyes tag $\frac{2}{n}(\bar{x} - \theta)\sum_i (x_i - \bar{x}) = 0$. Ez a 25.4. szakasz azonossága (Krogh és Vedelsby 1995; Page 2007).

B.

Rövid Python-útmutató

A könyv Python-demói rövid, önálló programok: néhány sorban kiszámolják egy modell eredményét, és ahol hasznos, ábrát is rajzolnak. Ez a függelék nem programozási tankönyv. Annyit mutat be a Python nyelvből és a használt csomagokból, amennyi a demók elolvasásához, futtatásához és bátor átírásához kell. Először a futtatás módját, majd a nyelv alapelemeit, végül a négy tudományos csomagot (NumPy, pandas, Matplotlib, SciPy) tekintjük át; a függelék a demók módosításának menetével, a leggyakoribb hibákkal és néhány mintaprompttal zárul. Aki mélyebben szeretne elmerülni a nyelvben, a Python hivatalos oktatóanyagával (Python Software Foundation 2025) és Jake VanderPlas szabadon olvasható adattudományi kézikönyvével (VanderPlas 2016) folytathatja.

B.1. A demók futtatása

A demók kétféleképpen futtathatók. A **legegyszerűbb** a Google Colab: a *Döntési műhely* minden fejezethez tartozó notebookja a kézikönyv adott fejezetének összes Python-demóját változtatás nélkül tartalmazza, így a műhelyoldal Colab-linkjére kattintva, telepítés nélkül, böngészőből futtathatók (Futtatási környezet → Az összes futtatása). Egy kézikönyvbeli demó egy új kódcellába másolva is azonnal fut. **Saját gépen** Python 3.10 vagy újabb változat kell, és a négy csomag egyetlen paranccsal telepíthető:

```
pip install numpy scipy pandas matplotlib
```

Ezután a demó egy `.py` fájlba mentve a `python demo.py` paranccsal, vagy egy Jupyter-notebook cellájában futtatható. A tároló `requirements.txt` fájlja a notebookok újragenerálásához szükséges teljes csomaglistát tartalmazza.

B.2. Értékek, változók és adatszerkezetek

A Pythonban egy értéknek az egyenlőségjellel adunk nevet; a név ezután a kódban bárhol használható. A `#` utáni szöveg megjegyzés, a gép nem veszi figyelembe.

```
ar = 450_000            # egész szám (int); az _ csak tagolás
suly = 0.35             # tizedestört (float): a kódban PONT!
nev = "Bori"            # szöveg (str)
jeloltek = ["A", "B", "C"]          # lista
koltseg = {"A": 12.0, "B": 9.5}     # szótár: kulcs -> érték
print(jeloltek[0], jeloltek[-1], len(jeloltek))   # A C 3
print(f"{nev}: súly {suly:.0%}, A ára {koltseg['A']:.1f} M Ft")
```

A lista elemeit 0-tól számozzuk: `jeloltek[0]` az első, `jeloltek[-1]` az utolsó elem. A szótár kulcs szerint ad vissza értéket. Az `f"..."` alakú **formázott szöveg** kapcsos zárójelei közé tett kifejezés értéke kerül a szövegbe; a kettőspont után a formátum áll: `.1f` egy tizedesjegy, `.0%` százalék tizedesjegy nélkül, `,` ezres tagolás. A kimenet itt: `Bori: súly 35%, A ára 12.0 M Ft`. A kódban és a kimenetben a tizedesjel pont; a könyv szövege a magyar helyesírás szerint vesszőt használ.

B.3. Elágazás, ciklus és függvény

A Python a **behúzással** jelöli, mely sorok tartoznak egy függvényhez, ciklushoz vagy elágazáshoz; a sor végi kettőspont nyit egy ilyen blokkot. A gazdaságos rendelési tételt (19.2. szakasz) függvénybe írva:

```
def eoq(D, S, h):
    """Gazdaságos rendelési tétel: Q* = gyök(2DS/h)."""
    return (2 * D * S / h) ** 0.5

for h in [100, 200, 400]:           # tartási költség, Ft/db/év
    Q = eoq(D=3600, S=5000, h=h)
    if Q >= 500:
        print(h, "nagy tétel:", round(Q))
    else:
        print(h, "kis tétel:", round(Q))
```

A kimenet három sor: `100 nagy tétel: 600`, `200 kis tétel: 424`, `400 kis tétel: 300`. A hatványozás jele a `**` (a `^` mást jelent!), a `def` új függvényt vezet be, a `return` adja vissza az eredményt. Ugyanez egy sorban, **listaértelmezéssel**: `[round(eoq(3600, 5000, h)) for h in (100, 200, 400)]`, amely a `[600, 424, 300]` listát adja.

B.4. NumPy: számolás tömbökkel

A NumPy a vektorok és mátrixok csomagja. A műveletek a teljes tömbre egyszerre vonatkoznak, ezért a legtöbb képlet ciklus nélkül, a matematikai alakjához közel írható le. Egy súlyozott összeg (8. fejezet):

```
import numpy as np

w = np.array([0.35, 0.40, 0.25])        # súlyok
V = np.array([[80, 60, 70],             # sorok: alternatívák
              [65, 90, 50]])            # oszlopok: kritériumok
pont = V @ w                            # mátrix-vektor szorzat
print(pont, pont.argmax())              # [69.5  71.25] 1
print(V.mean(axis=0), V.max(axis=1))   # oszlopátlag, sormaximum
```

A `@` a mátrixszorzás, a `*` elemenkénti szorzás. Az `axis=0` oszloponként, az `axis=1` soronként számol. Az indexelés itt is 0-tól indul: `V[1, 0]` a második alternatíva első kritériuma (65), `V[:, 2]` a teljes harmadik oszlop. A könyvben gyakori további függvények: `np.linspace` (egyenletes rács), `np.cumsum` (halmozott összeg), `np.where` (feltételes választás), `np.roll` (eltolás, az életjátékban), `np.linalg.eigvals` (sajátértékek, az AHP-ban és a stabilitásvizsgálatban).

B.5. Véletlen számok és szimuláció

A szimulációk (16. fejezet) véletlenszám-generátort használnak. A **rögzített mag** (*seed*) miatt a futás megismételhető: ugyanaz a mag mindig ugyanazt a sorozatot adja, ezért a könyv számai újra előállíthatók.

```
rng = np.random.default_rng(42)          # rögzített mag
k = rng.normal(10, 1.5, size=100_000)    # 100 ezer költség
print(round(k.mean(), 2), round(np.quantile(k, 0.95), 2))
print((k > 13).mean())                   # túllépési esély
```

A kimenet: `9.99 12.47`, majd `0.02326`. A `k > 13` logikai tömböt ad (igaz/hamis minden elemre); ennek átlaga az igaz értékek aránya, vagyis a túllépés becsült valószínűsége (az elméleti érték 2,28%). Ha a magot megváltoztatod, a harmadik-negyedik tizedesjegy ingadozik: így látható a szimulációs hiba. További gyakori eloszlások: `rng.integers`, `rng.exponential`, `rng.lognormal`, `rng.permutation`.

B.6. Táblázatok: pandas

A pandas a címkézett táblázatok (*DataFrame*) csomagja: a sorok és az oszlopok névvel érhetők el, ami az értékelési táblázatoknál (7.5. szakasz) kényelmes.

```
import pandas as pd

df = pd.DataFrame({"ar": [12.0, 9.5, 11.0],
```

```
                    "hatotav": [420, 300, 380]},
                   index=["A", "B", "C"])
lo, hi = df["ar"].min(), df["ar"].max()
df["ar_pont"] = 100 * (hi - df["ar"]) / (hi - lo)
print(df.sort_values("ar_pont", ascending=False))
print(df["hatotav"].rank(ascending=False))   # rangszámok
```

Az új oszlop egy egész oszlopra felírt képlettel jön létre: itt a csökkenő irányú ár lineáris értékfüggvénye (B 100, C 40, A 0 pont). A `rank` a rangszámokat adja, holtversenynél átlagos ranggal, ahogy a rangkorreláció és az SRD megkívánja (12.6. szakasz). Adat fájlból a `pd.read_csv("adat.csv")` hívással tölthető be.

B.7. Ábrák: Matplotlib

```
import matplotlib.pyplot as plt

Q = np.linspace(100, 2000, 200)
K = 3600 / Q * 5000 + Q / 2 * 200        # EOQ-összköltség
plt.plot(Q, K, label="éves összköltség")
plt.axvline(eoq(3600, 5000, 200), ls="--", label="Q*")
plt.xlabel("rendelési tétel (db)")
plt.ylabel("Ft/év")
plt.legend()
plt.show()
```

A `plt.plot` vonaldiagramot, a `plt.scatter` pontdiagramot, a `plt.hist` hisztogramot, a `plt.imshow` képet (például sejtautomatát vagy a Mandelbrot-halmazt) rajzol. Több panelhez a `fig, ax = plt.subplots(1, 2)` alak kell; ekkor az `ax[0].plot(...)` az első panelre rajzol.

B.8. SciPy: optimalizálás, eloszlások és egyenletek

A SciPy a tudományos számítások gyűjteménye. A könyv a következő függvényeit használja:

B.1. táblázat. A könyvben használt SciPy-függvények

Feladat	Modul	Függvény	Fejezet
normális eloszlásfüggvény és inverze	`scipy.stats`	`norm.cdf`, `norm.ppf`	16., 19.
rangszámok és rangkorreláció	`scipy.stats`	`rankdata`, `spearmanr`	12.
lineáris program	`scipy.optimize`	`linprog`	13.

Feladat	Modul	Függvény	Fejezet
hozzárendelés (magyar módszer)	`scipy.optimize`	`linear_sum_assignment`	13.
egyenlet gyöke egy intervallumban	`scipy.optimize`	`brentq`	21.
differenciálegyenlet-rendszer	`scipy.integrate`	`solve_ivp`	21.

Két példa a 13. fejezetből. A `linprog` mindig *minimalizál*, ezért maximalizálásnál a célfüggvény együtthatóinak ellentettjét adjuk meg; a hozzárendelésnél a költségmátrixot adjuk át, és a függvény a sor- és oszlopindexeket adja vissza.

```
from scipy.optimize import linear_sum_assignment, linprog

C = np.array([[3, 8, 7, 4], [5, 7, 5, 3],    # munkaidők
              [2, 6, 6, 8], [3, 2, 7, 7]])
sor, osz = linear_sum_assignment(C)
print(osz, C[sor, osz].sum())                 # [3 2 0 1] 13

# max 3x + 2y,  x + y <= 4,  x + 3y <= 6,  x, y >= 0
r = linprog(c=[-3, -2], A_ub=[[1, 1], [1, 3]], b_ub=[4, 6])
print(r.x, -r.fun)                            # [4. 0.] 12.0
```

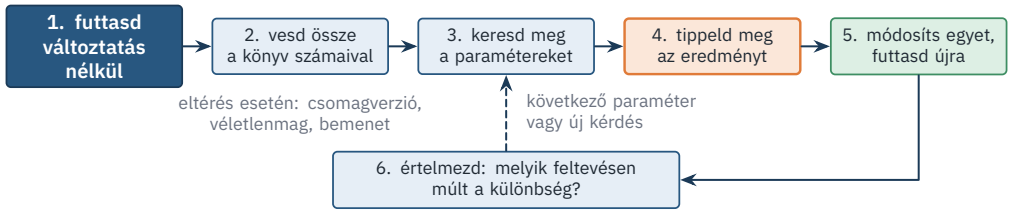
Az első eredmény a 13 órás optimális kiosztás: Anna a hívásokat, Bence az adatelemzést, Csilla a honlapot, Dani a hírlevelet kapja (13.6. szakasz).

B.9. Hogyan olvass és módosíts egy demót?

A demók felépítése egységes. Az elején az importok, utána a **paraméterek** (a modell bemenetei, többnyire rövid, beszédes nevű változók megjegyzéssel), majd a számítás és a kiírás vagy az ábra. A kísérletezés legjobb módja, ha egyszerre egyetlen paramétert változtatunk, és a futtatás előtt megtippeljük az eredményt (B.1. ábra): ugyanaz a ciklus, amelyet a könyv interaktív nézetei is követnek.

Gyakori hibák

- **Tizedesvessző.** A `suly = 0,35` nem hibaüzenetet ad, hanem egy kételemű párt (`(0, 35)`) hoz létre; a kódban mindig pont kell.
- **Hatványozás.** A `2 ^ 3` nem 8, hanem bitenkénti művelet (eredménye 1); a hatvány jele a `**`.
- **Behúzás.** A ciklus vagy függvény törzsének egységesen, négy szóközzel beljebb kell kezdődnie, különben `IndentationError` a válasz.



B.1. ábra. Egy Python-demó módosításának menete. Először változtatás nélkül futtatjuk, és összevetjük a könyv számaival; utána egyszerre egy paramétert változtatunk, előtte megtippelve az eredményt, végül megfogalmazzuk, melyik feltevésen múlt a különbség.

- **Cellasorrend.** Colabban a `NameError` többnyire azt jelzi, hogy egy korábbi cella (például az importokat tartalmazó) nem futott le; az Összes futtatása parancs megoldja.
- **Tömb másolása.** A `b = a` nem másol, csak új nevet ad ugyanannak a tömbnek; ha `b`-t módosítjuk, `a` is változik. Másoláshoz `b = a.copy()` kell.
- **Mag nélküli véletlen.** Mag nélkül minden futás más számokat ad; ez nem hiba, de a könyv számaival csak a megadott maggal egyezik az eredmény.

B.10. Mintapromptok MI-asszisztenshez

Egy nyelvi modell jó társ a kód megértésében és átírásában, ha pontosan megmondjuk, mit várunk, és az eredményt futtatással ellenőrizzük (27. fejezet).

Mintaprompt

Magyarázd el soronként, egy programozásban kezdő olvasónak, mit csinál az alábbi Python-kód. Minden változónál mondd meg, milyen modellbeli mennyiséget jelöl és milyen mértékegységű. Ha valamelyik sor szerepét nem tudod biztosan megállapítani, jelezd. [kód]

Mintaprompt

Módosítsd az alábbi demót úgy, hogy a tartási költséget 100 és 800 között változtassa, és ábrázolja az optimális rendelési tételt a tartási költség függvényében. A kód többi részét ne írd át, a változtatásokat jelöld megjegyzéssel, és adj meg egy kézzel ellenőrizhető értéket, amellyel meggyőződhetek a helyességéről. [kód]

Mintaprompt

Az alábbi kód ezt a hibaüzenetet adja: [hibaüzenet]. Magyarázd el, mi a hiba oka, és csak a hibás sort javítsd. Ne találj ki nem létező függvényt vagy csomagot; ha bizonytalan vagy egy függvény paramétereiben, mondd meg, hol nézzek utána a hivatalos dokumentációban. [kód]

C.

Digitális eszközök: alkalmazások, munkafüzetek és notebookok

A könyvhöz a *Döntési műhely* kötet tartozik, amely minden fejezethez egy gyakorló oldalt, egy böngészős alkalmazást, és ahol a téma indokolja, egy Excel-munkafüzetet és egy Google Colab-notebookot kínál. Ez a függelék az eszközök használatát és jegyzékét foglalja össze.

C.1. Böngészős alkalmazások

A 28 alkalmazás önálló HTML-oldal, telepítés és bejelentkezés nélkül fut bármely korszerű böngészőben; a webkönyvben beágyazva, a PDF- és EPUB-változatban hivatkozásként jelenik meg. Minden alkalmazás több **nézetet** tartalmaz: a nézet azonosítója a kártya azonosítója (például `h08-ertekelo.html#K04`), így a könyv minden kártyájáról egy kattintással a hozzá tartozó kísérlet nyílik meg. A nézetek közös felépítése:

1. **előrejelzés:** a kísérlet előtt rögzíted a saját tippedet;
2. **kísérlet:** csúszkákkal és mezőkkel változtatod a bemeneteket, az eredmény azonnal frissül;
3. **összevetés:** az alkalmazás megmutatja, mennyiben tért el a tipped az eredménytől;
4. **reflexió:** egy rövid szöveges mezőben rögzíted, melyik feltevésen múlik a következtetés.

A bevitt adatok csak a saját böngésződben tárolódnak (ha a böngésző engedi), és a *Visszaállítás* gombbal törölhetők. Az alkalmazások számai a kézikönyv referenciaértékeivel egyeznek; ezt a műhelyoldalak ellenőrző feladatai külön kérik. A kártyalapozó mind a 124 nyitókártyát egy helyen, szűrhető és felidézésre is használható formában mutatja.

C.2. Excel-munkafüzetek

A 21 munkafüzet makrót nem tartalmaz; minden számítás látható képlet. A munkalapok egységes rendje:

Munkalap	Tartalom
Útmutató	a munkafüzet célja, a fejezet, a használat lépései
Bemenet	a módosítható adatok (színnel jelölt cellák)
Feltevések	a modell feltevései és a paraméterek forrása
Számítás	a képletek lépésenként
Eredmény	az összesített eredmény és ábra
Érzékenység	egy vagy két paraméter változtatásának hatása
Forrás	irodalom és az adatok eredete
Ellenőrzés	a kézikönyv referenciaértékei és az egyezés vizsgálata

Az Ellenőrzés lap minden munkafüzetben „megfelel” szöveget mutat, ha a bemenet a könyv alapbeállítása, és a számítás a kézikönyv referenciaértékét adja. Ha módosítod a bemenetet, a lap jelzi, mely referenciaértékektől tér el az eredmény – ez nem hiba, hanem a kísérlet eredménye.

C.3. Colab-notebookok

A 21 notebook Python-nyelven, csak klasszikus tudományos csomagokkal (NumPy, SciPy, pandas, Matplotlib) számol, és a Google Colab felületén telepítés nélkül, böngészőből futtatható. A notebookok a forrásadatokat a könyv tárolójából töltik be, és ellenőrzik a kézikönyv referenciaértékeit; a végükön a fejezet Python-demói következnek, változtatás nélkül (a kód olvasásához a B. függelék ad segítséget). A notebookok a kimenetekkel együtt kerültek a tárolóba, így futtatás nélkül is olvashatók. A szimulációk rögzített véletlenmaggal futnak; a mag megváltoztatásával a mintavételi ingadozás is vizsgálható.

A könyv esetszámításai a tároló `_shared/esetek` mappájában önálló Python-szkriptekként is elérhetők; ezek állítják elő a könyv minden számát, és a JSON-kimenetük a notebookok és az alkalmazások tesztalapja.

C.4. Az eszközök jegyzéke

C.1. táblázat. A fejezetek digitális eszközei.

Fejezet	Műhely	Alkalmazás	Munkafüzet	Notebook
1	Nézőpont- és feltevéskapcsoló	`h01-nezopontok`	–	–
2	Döntési helyzetlap	`h02-helyzetlap`	E02.xlsx	–
3	Keretezés és ítélet	`h03-keretezes`	–	–
4	Morfológiai kombinátor	`h04-kombinator`	–	–
5	Prioritás és heti kapacitás	`h05-prioritas`	E05.xlsx	–
6	Portfóliótérkép	`h06-portfolioterkep`	E06.xlsx	–
7	Kritériumszerkesztő	`h07-kriteriumok`	E07.xlsx	N07.ipynb
8	Súlyozott értékelő	`h08-ertekelo`	E08.xlsx	N08.ipynb
9	AHP-ítéletek	`h09-ahp`	E09.xlsx	N09.ipynb
10	TOPSIS-geometria	`h10-topsis`	E10.xlsx	N10.ipynb
11	Páros fölény	`h11-outranking`	E11.xlsx	N11.ipynb
12	Érintettek és stabilitás	`h12-stabilitas`	E12.xlsx	N12.ipynb
13	Portfólióválasztó	`h13-portfolio`	E13.xlsx	N13.ipynb
14	Döntési fa visszagöngyölítése	`h14-dontesi-fa`	E14.xlsx	N14.ipynb
15	Az információ értéke	`h15-informacio`	E15.xlsx	N15.ipynb
16	Szimulációs eloszlás	`h16-szimulacio`	E16.xlsx	N16.ipynb
17	Stresszteszt és megbánás	`h17-stresszteszt`	E17.xlsx	N17.ipynb
18	Előrejelzés-ellenőrző	`h18-elorejelzes`	–	N18.ipynb
19	Készletek, stabilitás és káosz	`h19-keszlet`	E19.xlsx	N19.ipynb

Fejezet	Műhely	Alkalmazás	Munkafüzet	Notebook
20	Markov-állapotok és sorok	`h20-markov`	E20.xlsx	N20.ipynb
21	Terjedés és megerősítés	`h21-terjedes`	–	N21.ipynb
22	Hálózati és ágensműhely	`h22-halozat`	–	N22.ipynb
23	Stratégiai reakció	`h23-strategia`	E23.xlsx	N23.ipynb
24	Közös erőforrás és ösztönző	`h24-kozos-eroforras`	E24.xlsx	N24.ipynb
25	Közös előrejelzés és tanulás	`h25-tanulas`	E25.xlsx	N25.ipynb
26	Csapatmunka és reflexió	`h26-csapat`	E26.xlsx	–
27	MI-válaszok ellenőrzése	`h27-mi-ellenorzes`	–	N27.ipynb
28	Integrált döntési feljegyzés	`h28-feljegyzes`	E28.xlsx	N28.ipynb

C.5. Mesterségesintelligencia-eszközök használata

A műhelyoldalak mintapromptjai általános nyelvi modellekkel használhatók. A 27. fejezet szabályai itt is érvényesek: a számszerű eredményt az alkalmazás, a munkafüzet vagy a notebook adja; a nyelvi modell válaszának minden ténybeli állítását forráshoz kell kötni; a kitalált hivatkozás elfogadhatatlan. A mintapromptok ezért mindig kérik a bizonytalanság jelölését, és tiltják a kitalált adatot és hivatkozást.

D.

A könyv esetei és adatai

A könyvet hét végigvitt eset köti össze. Minden adat **szintetikus**: tanulási célra, a módszerek bemutatására készült, és nem valós termékeket, szervezeteket vagy árakat ír le. Minden számot a tároló `_shared/esetek` mappájának egy Python-szkriptje állít elő; a szkriptek JSON-kimenete az alkalmazások, a munkafüzetek és a notebookok közös tesztalapja. Ez a függelék az esetek leírását, fő adatait és a hozzájuk tartozó szkripteket foglalja össze.

D.1. táblázat. A könyv esetei.

Eset	Rövid leírás	Fő fejezetek	Szkript
CASE01	Laptopválasztás tanuláshoz és munkához	1, 7, 10	`case01_laptop.py`
CASE02	Szervezeti mobilitási megoldás (fő numerikus eset)	2, 7–12, 14–17, 20, 27, 28	`case02_mcda.py`, `case02_mc.py`, `case02_forgatokonyv.py`, `case02_markov.py`
CASE03	Projektportfólió és pályázati verseny	13, 23, 26	`case03_portfolio.py`, `case03_jatek.py`, `case03_csoport.py`
CASE04	Szolgáltatási kapacitás és előrejelzés	18, 19, 25	`case04_szolgaltatas.py`, `case07_tanulas.py`
CASE05	Személyes fejlődés és heti kapacitás	5, 3, 26	(a fejezet táblázata)
CASE06	Közös víztartály és információhálózat	22, 24	`case06_tartaly.py`

Eset	Rövid leírás	Fő fejezetek	Szkript
CASE07	Új szolgáltatás (továbbképzés) bevezetése	4, 15, 25	`case07_tanulas.py`

D.1. CASE01 – Laptopválasztás

Egy dolgozó hallgató öt laptop közül választ. Három kérdést tesz fel: melyik a legolcsóbb, melyik bírja ki egy teljes egyetemi és munkanapot, és melyikkel jár a legkevesebb kiadással négy év alatt (1.3. szakasz).

Gép	Ár [ezer Ft]	Tömeg [kg]	Üzemidő [óra]	Teljesítmény [0–100]	Szerviz [év]	Kijelző [col]
L1	290	1,2	14	62	3	13,6
L2	220	1,8	8	70	2	15,6
L3	410	1,4	18	88	3	14,0
L4	340	2,3	6	95	2	16,0
L5	260	1,5	11	74	3	14,0

A négyéves költségmodell feltevései: 10 óránál rövidebb üzemidőnél pótakkumulátor és második töltő (40 ezer Ft), a négy évből hiányzó szervizévekre évi 30 ezer Ft kiterjesztett garancia, 70 pont alatti teljesítménynél 50% esély egy 250 ezer Ft-os idő előtti cserére.

D.2. CASE02 – Szervezeti mobilitási megoldás

Egy szolgáltató szervezet szervizmunkatársainak járművét kell öt évre kiválasztani. Az éves futás körülbelül 25 ezer km, a szokásos napi út 120–200 km, hetente egyszer 240 km töltési lehetőség nélkül; a kötelező hatótáv ezért legalább 250 km (5.2. szakasz).

Kritérium	Jel	Irány	Mértékegység	Horgonyok	Bázissúly
Ötéves teljes birtoklási költség	C1	kisebb jobb	millió Ft	8 / 18	0,35
Életciklus-kibocsátás	C2	kisebb jobb	g CO_2e/km	0 / 200	0,15
Hatótáv	C3	nagyobb jobb	km	200 / 600	0,15

Kritérium	Jel	Irány	Mértékegység	Horgonyok	Bázissúly
Éves kiesési idő	C4	kisebb jobb	nap/év	0 / 20	0,15
Elérhető szervizpontok	C5	nagyobb jobb	darab	0 / 10	0,10
Komfortérték	C6	nagyobb jobb	0–100	0 / 100	0,10

D.2. táblázat. A CASE02 nyers adatai.

Alternatíva	C1	C2	C3	C4	C5	C6	Szűrés
A – hibrid vásárlás	10	150	600	6	8	65	megfelel
B – konnektoros hibrid tartós bérlet	12	90	550	5	8	75	megfelel
C – elektromos tartós bérlet zöldárammal	14	30	400	4	7	85	megfelel
D – elektromos vásárlás nagy akkumulátorral	11	70	450	3	9	80	megfelel
E – városi megosztott elektromos + heti bérelt autó	9	10	180	4	7	70	nem felel meg

Fő referenciaértékek. Additív érték: A 71,75; B 69,125; C 61,75; D 73,375 (D > A > B > C); a költségsúly küszöbe 0,44086. TOPSIS-közelség: A 0,3828; B 0,4895; C 0,5924; D 0,6913. PROMETHEE II nettó áram: A 0,1243; B 0,0132; C −0,2868; D 0,1493. ELECTRE I mag ($c \geq 0{,}65$, $d \leq 0{,}40$): {A, D}. Rangelfogadottság ±30%-os súlyváltozásnál: D első 83,2%, A első 16,8%. Monte Carlo: D első az additív modellben 74,8% (korrelált költségek). Forgatókönyvek: maximin és minimax

megbánás szerint A, D három forgatókönyvben nyer az ötből. A Markov-modell átmenetmátrixai a 20.2. szakaszban szerepelnek.

D.3. CASE03 – Projektportfólió és pályázati verseny

Nyolc fejlesztési projektből kell finanszírozható portfóliót választani; a költségkeret 12, a munkaórakeret 15 egység. P4 csak P2-vel együtt választható, P1 és P7 kizárja egymást (13.2. szakasz).

Projekt	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
Költség	3	4	2	5	1	3	4	2
Munkaóra	5	4	3	6	2	3	5	2
Eredményérték	8	10	6	14	3	7	11	5
Fenntarthatósági hozzájárulás	4	5	2	8	1	6	7	3

Fő referenciaértékek. A 256 részhalmazból 92 megengedett; a legnagyobb eredményértékű csomag P2+P3+P4+P5 (eredmény 33, fenntarthatóság 16); a két cél Pareto-frontján a (33; 16) és a (32; 19) pont áll. A pályázati verseny (23.1. szakasz) kerete 10 és 6 millió Ft, az ütközés többletköltsége 1 millió Ft; a kevert egyensúlyban $q^{*} = 0{,}8$. A projektkiválasztó csoport adatai a 26.6. szakaszban szerepelnek.

D.4. CASE04 – Szolgáltatási kapacitás

Egy hallgatói szolgáltatási iroda két év napi megkeresési adata, erős heti mintázattal (hétfő 1,25, kedd 1,10, szerda 1,05, csütörtök 1,00, péntek 0,85, szombat 0,35 szorzó, vasárnap zárva) és évi körülbelül 10%-os növekedéssel. Az első 469 nyitvatartási nap a tanuló-, az utolsó 157 a tesztadat. A teljes adatsor a `case04_napi_igeny.csv` fájlban van. Teszthiba (MAE): átlagmodell 124,0; szezonális naiv 27,3; regresszió 23,5 (18.4. szakasz). A hátralékmodell paraméterei: heti 500 beérkező ügy, 480-as kapacitás, 300 ügyes kezdő hátralék (19.1. szakasz). A közös előrejelzés példájában a tény 520, a becslések 480, 545 és 560 (25.4. szakasz).

D.5. CASE05 – Személyes fejlődés és heti kapacitás

Egy dolgozó harmadéves hallgató hete: tizenkét tevékenység 38 óra igénnyel, 23 szabad óra mellett; a két fontos mező együtt 29 órát kér (5.1. szakasz). A teljes tevékenységlista az 5. fejezet esetleírásában szerepel. Az eset a 3.4. szakasz önismereti és a 26.5. szakasz visszajelzési modelljeinek átviteli példája is.

D.6. CASE06 – Közös víztartály és információhálózat

Öt gazdálkodó egy 120 m³-es esővíztartályt használ, 80 m³ kezdő készlettel. A heti beáramlás 16 m³, a 9–18. héten 5 m³. Fejenként heti 2 m³ alapigény (egységenként 3 pont) és legfeljebb 2 m³ többlet (1 pont); a hiányzó alapigény pótlása egységenként 4 pont (24.4. szakasz). Fő referenciaértékek: szabad hozzáférés 650 pont és 40 m³ hiány; állapotfüggő kvóta (70 m³ alatt) 840 pont, hiány nélkül; állandó korlát 780 pont, 8 m³ túlfolyással. A hálózati példa adatai a 22. fejezetben szerepelnek.

D.7. CASE07 – Új szolgáltatás bevezetése

Egy egyetem továbbképzési szolgáltatást tervez. A morfológiai tábla négy tulajdonsága 192 kombinációt ad, amelyből négy kizáró szabály után 130 marad (4.2. szakasz). A bevezetési döntés: a sikeres piac előzetes valószínűsége 0,4, a bevezetés eredménye siker esetén +60, kudarc esetén −30 millió Ft; a felmérés érzékenysége és specificitása 0,8. Fő referenciaértékek: EV = 6, EVPI = 18, EVSI = 9,6 (15.4. szakasz). A bevezetési stratégiák replikátormodellje a 25.1. szakaszban szerepel.

E.

Modelltár

A könyv 124 nyitókártyát tartalmaz: 28 fejezetnyitó kártyát (F01–F28), a *The Decision Book* (Krogerus és Tschäppeler 2011) 52 modelljéhez tartozó 56 kártyát (D01–D52; a D08, a D33, a D40 és a D48 két-két kártyára bomlik) és 40 kiegészítő módszerkártyát (K01–K41; a K39 azonosítót egy kártya nélküli kiegészítő nézet viseli). Az alábbi táblázat a D- és K-kártyákat sorolja fel a könyvbeli helyükkel és a hozzájuk tartozó interaktív nézettel. A demó oszlopban az alkalmazás neve és a nézet azonosítója áll; például a `h08-ertekelo#K04` a Döntési műhely `h08-ertekelo.html` alkalmazásának `K04` nézetét jelenti.

A modellek **szerepe** eltérő (1.2. szakasz). A K-kártyák formális, számításos módszereket vezetnek be; a D-kártyák nagy része **gondolkodási keret**, amely kérdéseket és elrendezést ad, de nem mér. Ahol egy keret empirikus alátámasztása gyenge vagy vitatott (például a Maslow-piramis, a helyzetfüggő vezetés vagy a csapatszerep-tipológiák), a könyv ezt a kártyához tartozó szakaszban jelzi. A *The Decision Book* modelljeinek magyar címe a könyvben szereplő kártyacím; a modellek eredeti forrását és a kapcsolódó kutatási irodalmat a szakaszok hivatkozásai adják.

A kártyák egy helyen, szűrhető és felidézésre is használható formában a kártyalapozóban is megtalálhatók: ott előbb csak a cím, a helyzet és a kérdés látszik, a lényeg egy kattintással nyitható meg.

E.1. táblázat. A D- és K-kártyák jegyzéke (a szakasz oszlop a kártya helyét adja meg).

Azonosító	Kártya címe	Szakasz	Demó
D01	Mikor foglalkozol azzal, ami fontos?	5.1	`h05-prioritas#D01`
D02	Mire alapozod az erősségeidet?	6.1	`h06-portfolioterkep#D02`
D03	Fejőstehén vagy döglött kutya?	6.2.1	`h06-portfolioterkep#D03`
D04	Jó helyen áll, de belefér-e?	6.2.2	`h06-portfolioterkep#D04`

Azonosító	Kártya címe	Szakasz	Demó
D05	Mit akarsz valójában elérni?	5.2.1	`h05-prioritas#D05`
D06	Mi tart itt, és mi húz el?	5.3.1	`h05-prioritas#D06`
D07	Honnan jönnek az ügyfeleid?	22.6.1	`h22-halozat#D07`
D08a	Hány megoldás rejlik négy kérdésben?	4.2	`h04-kombinator#D08a`
D08b	Mi lenne, ha elhagynád a vizsgát?	4.3	`h04-kombinator#D08b`
D09	Mennyit érjen az ajándék?	26.1.3	`h26-csapat#D09`
D10	Most döntsünk, vagy várjunk még?	2.4	`h02-helyzetlap#D10`
D11	Melyik utat választod egy vitában?	26.2	`h26-csapat#D11`
D12	Honnan jössz, és merre mehetsz tovább?	5.3.2	`h05-prioritas#D12`
D13	Mikor feledkezel bele a munkába?	5.4.1	`h05-prioritas#D13`
D14	Amit mások látnak rólad, és te nem	26.5	`h26-csapat#D14`
D15	Miért védjük meg a saját döntésünket?	3.3.1	`h03-keretezes#D15`
D16	Hova tennéd a kedvenc zenédet?	7.7.1	`h07-kriteriumok#D16`
D17	Mennyire hiszel egy bevált táblázatnak?	1.6.1	`h01-nezopontok#D17`
D18	Milyen vagy most, és milyen szeretnél lenni?	26.5	`h26-csapat#D18`
D19	Ugyanazok a márkák, másik térkép	6.3.1	`h06-portfolioterkep#D19`

Azonosító	Kártya címe	Szakasz	Demó
D20	Mennyi időt töltesz a múlton rágódva?	5.4.2	`h05-prioritas#D20`
D21	Mikor ismételd át, amit megtanultál?	25.3	`h25-tanulas#D21`
D22	Közelebb állsz hozzám, vagy csak máshogy kérdeztünk?	7.7.2	`h07-kriteriumok#D22`
D23	Akarod, tudod vagy csak kell?	5.4.3	`h05-prioritas#D23`
D24	Mit tanultál a legutóbbi hasonló döntésből?	2.5	`h02-helyzetlap#D24`
D25	Kinek az elvárásaihoz méred magad?	3.5.1	`h03-keretezes#D25`
D26	Most kell beszállni, vagy várni?	6.4	`h21-terjedes#D26`
D27	Mit mond a beszélgetés mintázata?	26.5	`h26-csapat#D27`
D28	Kivel tartod a kapcsolatot, és milyen gyakran?	22.6.2	`h22-halozat#D28`
D29	Melyik módszert tanulnád meg először?	1.6.2	`h01-nezopontok#D29`
D30	Négy védelmi réteg elég biztonságos?	17.5	`h17-stresszteszt#D30`
D31	Mi motivál valakit, és mi motivál téged?	26.1.1	`h26-csapat#D31`
D32	Ki mondta, hogy a vonal nem léphet ki?	4.4	`h04-kombinator#D32`

Azonosító	Kártya címe	Szakasz	Demó
D33a	Ugyanabba a csoportba tartozik, aki ugyanannyit keres?	26.1.2	`h26-csapat#D33a`
D33b	Pénz, tudás vagy kapcsolatok?	26.1.2	`h26-csapat#D33b`
D34	Mi működik jól, és hogyan építhetünk rá?	26.5	`h26-csapat#D34`
D35	Hány lépésre vagy bárkitől?	22.2	`h22-halozat#D35`
D36	A feladatok ötöde adja az eredmény négyötödét?	5.5	`h05-prioritas#D36`
D37	Sok kicsi többet ér, mint néhány nagy?	22.3.1	`h22-halozat#D37`
D38	Mi jön ki, ha ezerszer lejátszod?	16.1	`h16-szimulacio#D38`
D39	Mit nem tanítanak meg a múltbeli adatok?	17.4	`h17-stresszteszt#D39`
D40a	Miért akad el a jól induló termék?	21.4	`h21-terjedes#D40a`
D40b	Hirdetés vagy szájhagyomány hajtja?	21.2.1	`h21-terjedes#D40b`
D41	Mit tudsz egy modellről, amelybe nem látsz bele?	18.5.1	`h18-elorejelzes#D41`
D42	Mit árul el a cipő?	26.1.3	`h26-csapat#D42`
D43	Miért nem működnek együtt, ha mindkettőnek jobb lenne?	24.2	`h24-kozos-eroforras#D43`
D44	Hol tart a csapatotok?	26.6	`h26-csapat#D44`

Azonosító	Kártya címe	Szakasz	Demó
D45	Megvan a csapatban minden szükséges tudás?	26.3	`h26-csapat#D45`
D46	Üres a hely, vagy nincs rá igény?	6.3.2	`h06-portfolioterkep#D46`
D47	Mennyi irányítás kell egy új munkatársnak?	26.4	`h26-csapat#D47`
D48a	Ki milyen szerepet tölt be a csapatban?	26.3	`h26-csapat#D48a`
D48b	Mit látna ugyanebben az ötletben egy kételkedő?	4.5.1	`h04-kombinator#D48b`
D49	Egy hosszú nekifutás vagy három rövid kör?	28.8	`h28-feljegyzes#D49`
D50	Mit kezdesz egy váratlan visszajelzéssel?	3.4.1	`h03-keretezes#D50`
D51	A hibát javítod, vagy a célt is újragondolod?	25.2	`h25-tanulas#D51`
D52	Táblázat, hálózat vagy adatsor?	1.6.3	`h01-nezopontok#D52`
K01	Kinek a szempontjából jó?	2.2.1	`h02-helyzetlap#K01`
K02	A legolcsóbb ajánlatot választanád?	7.1	`h07-kriteriumok#K02`
K03	Mennyit ér a 450 kilométer?	8.1	`h08-ertekelo#K03`
K04	Miből áll össze a győztes pontszáma?	8.3	`h08-ertekelo#K04`
K05	Mennyivel fontosabb?	9.2	`h09-ahp#K05`
K06	Közel a legjobbhoz vagy távol a legrosszabbtól?	10.1	`h10-topsis#K06`

Azonosító	Kártya címe	Szakasz	Demó
K07	Mikor számít egy különbség valódi előnynek?	11.1	`h11-outranking#K07`
K08	Elég, hogy a többségben jobb?	11.5	`h11-outranking#K08`
K09	Miért fut körbe a többség akarata?	12.2	`h12-stabilitas#K09`
K10	Mennyit kell változnia egy súlynak?	12.4	`h12-stabilitas#K10`
K11	Melyik csomag fér bele, és mit ad?	13.2	`h13-portfolio#K11`
K12	Visszafelé kell gondolkodni?	14.4	`h14-dontesi-fa#K12`
K13	Mit jelent egy pozitív felmérés?	15.3	`h15-informacio#K13`
K14	A legjobb egy jövőben, vagy elég jó sokban?	17.2	`h17-stresszteszt#K14`
K15	Jó a modell, vagy csak emlékszik?	18.3	`h18-elorejelzes#K15`
K16	Mi marad a kádban?	19.1	`h19-keszlet#K16`
K17	Hol lesz a jármű két hónap múlva?	20.2	`h20-markov#K17`
K18	Mikor ér át a terjedés az egész hálózaton?	21.1	`h21-terjedes#K18`
K19	Ki köti össze a két csoportot?	22.1	`h22-halozat#K19`
K20	Hová tedd az erőforrásaidat, ha a másik is választ?	23.5	`h23-strategia#K20`
K21	Ki fizeti meg a közös szivattyút?	24.4	`h24-kozos-eroforras#K21`
K22	Mikor okosabb a csoport, mint a tagjai?	25.4	`h25-tanulas#K22`
K23	Melyik lépést bízod az MI-re, és melyiket nem?	27.1	`h27-mi-ellenorzes#K23`

Azonosító	Kártya címe	Szakasz	Demó
K24	Gyorsan, jól vagy olcsón?	7.6	`h07-kriteriumok#K24`
K25	Ki gondolkodik másképp a bizottságban?	12.6	`h12-stabilitas#K25`
K26	Ki melyik feladatot vigye?	13.6	`h13-portfolio#K26`
K27	Hány kenyér és hány csiga?	13.5	`h13-portfolio#K27`
K28	Miért harang alakú a sok kis hatás összege?	16.4	`h16-szimulacio#K28`
K29	Hány selejt jut egymillió szeletre?	16.6	`h16-szimulacio#K29`
K30	Ügyes vagy szerencsés?	16.8	`h16-szimulacio#K30`
K31	Hány kiló kávét rendeljen egyszerre Lili?	19.2	`h19-keszlet#K31`
K32	Hány csokrot rendeljen Kinga anyák napjára?	19.2.2	`h19-keszlet#K32`
K33	Miért hullámzik egyre jobban a hátralék?	19.5	`h19-keszlet#K33`
K34	Miért lassult le a gyár növekedése?	19.8.1	`h19-keszlet#K34`
K35	Lehet-e egyetlen, egyszerű oka a kiszámíthatatlanságnak?	19.9	`h19-keszlet#K35`
K36	Két sor vagy egy közös?	20.5	`h20-markov#K36`
K37	Kik döntik el, hogy feláll-e a közönség?	21.3.1	`h21-terjedes#K37`
K38	Elindult a füzetben!	22.5	`h22-halozat#K38`
K40	Mennyi az átlag kétharmada?	23.3	`h23-strategia#K40`
K41	Bejöjjek ma az irodába?	24.1	`h24-kozos-eroforras#K41`

F.

Fogalomtár

A fogalomtár a könyv fontosabb szakkifejezéseit sorolja fel ábécérendben, rövid meghatározással, az angol megfelelővel és azzal a szakasszal, ahol a fogalom először vagy legrészletesebben szerepel.

additív értékmodell (*additive value model*) – az alternatívák összesített értéke a kritériumonkénti részértékek súlyozott összege; feltétele a kölcsönös preferenciafüggetlenség. (→ 8.3.)

AHP, analitikus hierarchia folyamat (*analytic hierarchy process*) – páros összehasonlításokból sajátvektor-módszerrel számít súlyokat és prioritásokat. (→ 9.)

alapráta (*base rate*) – egy esemény előzetes gyakorisága a vizsgált sokaságban; elhanyagolása tipikus ítéleti hiba. (→ 15.2.)

alap reprodukciós szám (*basic reproduction number*, R_0) – egy fertőző által egy teljesen fogékony népességben okozott új esetek átlagos száma; $R_0 > 1$ esetén a terjedés járvánnyá válik. (→ 21.2.)

állapottér-modell (*state-space model*) – a rendszer állapotát vektorral írja le, és megadja, hogyan függ a következő állapot vagy az állapot változási sebessége a jelenlegi állapottól és a bemenetektől. (→ 19.5.)

álló ováció modellje (*standing ovation model*) – küszöbmodell, amelyben a döntés a saját értékeléstől és a látott mások viselkedésétől függ; a kimenetet a láthatóság szerkezete is alakítja. (→ 21.3.1.)

átlagos úthossz (*average path length*) – egy hálózat csomópontpárjai közötti legrövidebb utak átlagos hossza. (→ 22.1.)

átmenetmátrix (*transition matrix*) – a Markov-lánc állapotai közötti egylépéses átmenetek valószínűségei; sorainak összege 1. (→ 20.2.)

automatizálási torzítás (*automation bias*) – egy automatizált rendszer javaslatának kritika nélküli elfogadása. (→ 27.1.)

bifurkáció (*bifurcation*) – egy paraméter kis változására a rendszer viselkedésének minőségi megváltozása, például egy egyensúly stabilitásvesztése vagy periódus-kettőződés. (→ 19.9.)

biztonsági készlet (*safety stock*) – a bizonytalan kereslet és átfutási idő miatt az átlagos igényen felül tartott készlet; nagyságát a kívánt kiszolgálási szint határozza meg. (→ 19.2.1.)

biztos egyenérték (*certainty equivalent*) – az a biztos összeg, amelyet a döntéshozó egy kockázatos lottériával egyenértékűnek tart. (→ 14.5.)

Blotto-játék (*Colonel Blotto game*) – két szereplő véges erőforrást oszt el több front között; nincs legjobb tiszta elosztás. (→ 23.5.)

centrális határeloszlás-tétel (*central limit theorem*) – sok független, véges szórású hatás standardizált összege közelítőleg normális eloszlású. (→ 16.4.)

Coase-tétel (*Coase theorem*) – ha a jogok világosak és az alkudozás költségei elhanyagolhatók, a felek az externáliát a jogok kezdeti elosztásától függetlenül hatékonyan rendezik. (→ 24.1.)

csoportosulási együttható (*clustering coefficient*) – egy csomópont szomszédai közötti kapcsolatok aránya a lehetségeshez képest. (→ 22.1.)

diverzitás-azonosság (*diversity prediction theorem*) – a csoportátlag négyzetes hibája az átlagos egyéni hiba és a becslések szórásnégyzetének különbsége. (→ 25.4.)

dominancia (*dominance*) – egy alternatíva legalább olyan jó minden kritériumon, és legalább egyen jobb, mint egy másik. (→ 4.6.)

domináns stratégia (*dominant strategy*) – a másik fél bármely választására legalább olyan jó, mint bármely más stratégia. (→ 23.1.)

döntési fa (*decision tree*) – döntési, véletlen és végcsomópontokból álló ábra a sorrendi döntésekhez; visszagöngyölítéssel oldjuk meg. (→ 14.1.)

döntési napló (*decision journal*) – a döntés idején rögzített feltevések, becslések és várakozások, az utólagos tanuláshoz. (→ 1.5.)

egyensúlyi pont, stabilitás (*equilibrium, stability*) – az egyensúlyi pontban a rendszer állapota nem változik; az egyensúly aszimptotikusan stabil, ha a rendszer kis kitérés után visszatér oda. (→ 19.6.)

ELECTRE – felülmúlási (*outranking*) módszercsalád egyetértési és ellenvetési feltételekkel. (→ 11.5.)

elemi sejtautomata (*elementary cellular automaton*) – sejtek egydimenziós sora, amelyben minden sejt következő állapota a saját és két szomszédja jelenlegi állapotától függ; a 256 szabály között rendezett, periodikus, kaotikus és összetett viselkedés is előfordul. (→ 22.5.)

életjáték (*Game of Life*) – Conway kétdimenziós sejtautomatája (születés három, túlélés két vagy három élő szomszéddal), amelyben egyszerű helyi szabályokból mozgó és újabb alakzatokat kibocsátó mintázatok jönnek létre. (→ 22.5.)

elnyelő állapot (*absorbing state*) – Markov-lánc állapota, amelyből nincs kilépés. (→ 20.4.)

emergencia (*emergence*) – a helyi kölcsönhatásokból kialakuló, egyik szereplő által sem tervezett rendszerszintű minta. (→ 22.4.)

érzékenységvizsgálat (*sensitivity analysis*) – annak vizsgálata, hogyan változik a döntés a bemenetek vagy a feltevések változásával. (→ 8.4.)

EVPI, EVSI (*expected value of perfect / sample information*) – a tökéletes, illetve a mintainformáció várható értéke; felső korlátja annak, mennyit érdemes információért fizetni. (→ 15.4.)

externália (*externality*) – egy szereplő döntésének mások helyzetére gyakorolt hatása, amely nem tükröződik árban vagy megállapodásban. (→ 24.1.)

fekete hattyú (*black swan*) – ritka, nagy hatású, előre nehezen elképzelhető esemény. (→ 17.4.)

felfedezés és kiaknázás (*exploration and exploitation*) – az új lehetőségek keresése és a meglévő tudás hasznosítása közötti feszültség. (→ 25.2.)

fogolydilemma (*prisoner's dilemma*) – kétszereplős játék, amelyben az elhajlás domináns, a kölcsönös együttműködés mégis mindkettőnek jobb. (→ 24.2.)

folyamatképesség (*process capability*, C_p, C_{pk}) – a tűrési tartomány és a folyamat természetes szórásának viszonya; a C_{pk} az átlag helyét is figyelembe veszi. (→ 16.6.)

forgatókönyv (*scenario*) – a jövő egy belsőleg következetes, lehetséges változata, nem előrejelzés. (→ 17.2.)

fraktál, fraktáldimenzió (*fractal, fractal dimension*) – önhasonló alakzat, amelynek dimenziója nem egész szám; a hasonlósági dimenzió $\log N / \log(1/r)$. (→ 22.5.)

gazdaságos rendelési tétel (*economic order quantity*, EOQ) – a rendelési és a tartási költség összegét minimalizáló rendelési mennyiség, $Q^* = \sqrt{2DS/h}$. (→ 19.2.)

hasznossági függvény (*utility function*) – a kimenetek egyéni értékét és a kockázathoz való viszonyt kifejező függvény. (→ 14.5.)

hátizsák-feladat (*knapsack problem*) – korlátozott keretből a legnagyobb értékű elemhalmaz kiválasztása. (→ 13.3.)

hat szigma (*Six Sigma*) – minőségfejlesztési program, amelynek célértéke szerint a tűréshatár hat szórásnyira legyen a folyamat átlagától. (→ 16.6.)

hozzárendelési feladat, magyar módszer (*assignment problem, Hungarian method*) – n személy és n feladat legkisebb összköltségű párosítása; a magyar módszer Kőnig Dénes és Egerváry Jenő eredményeire épülő, polinomiális idejű megoldó eljárás. (→ 13.6.)

ideálpont-módszer, TOPSIS (*technique for order preference by similarity to ideal solution*) – az alternatívákat az ideális és az anti-ideális ponttól mért távolság alapján rangsorolja. (→ 10.)

időrendi felosztás (*time-ordered split*) – idősoros modell tanuló- és tesztadatának időrend szerinti szétválasztása. (→ 18.3.)

kalibráció (*calibration*) – a kimondott valószínűségek és a tényleges gyakoriságok egyezése. (→ 3.6.)

káosz (*chaos*) – determinisztikus rendszer szabálytalan, a kezdeti feltételekre érzékeny viselkedése: a közeli pályák exponenciálisan távolodnak egymástól. (→ 19.9.)

kéthurkú tanulás (*double-loop learning*) – a cselekvés mellett a célok és a feltevések felülvizsgálata. (→ 25.2.)

kevert stratégia (*mixed strategy*) – stratégiák közötti véletlenszerű választás meghatározott valószínűségekkel. (→ 23.4.)

kicsi világ (*small world*) – helyi hálózat néhány távoli kapcsolattal, rövid átlagos úthosszal és magas csoportosulással. (→ 22.2.)

kifizetési táblázat (*payoff table*) – a stratégiakombinációkhoz tartozó kifizetések táblázata. (→ 23.1.)

kihasználtság (*utilization*, ρ) – a kiszolgálók munkával töltött időhányada, $\rho = \lambda/(c\mu)$; 1-hez közeledve a várakozás meredeken nő. (→ 20.5.)

kilengési súlyozás (*swing weighting*) – a súlyokat a kritériumok legrosszabb és legjobb szintje közötti javulás fontossága alapján határozza meg. (→ 8.2.)

kognitív hierarchia (*cognitive hierarchy*) – a stratégiai gondolkodás modellje, amelyben a szereplők különböző számú lépést gondolnak előre, és az alacsonyabb szinten gondolkodókra válaszolnak. (→ 23.3.)

koordinációs játék (*coordination game*) – olyan játék, amelyben a szereplőknek az az érdekük, hogy ugyanazt válasszák; több egyensúlya van. (→ 23.2.1.)

kötelező korlát (*must constraint*) – olyan feltétel, amelyet nem teljesítő alternatíva nem kerülhet pontozásra. (→ 7.3.)

közjószág, közös erőforrás (*public good, common-pool resource*) – nem kizárható jószág; az utóbbi használata csökkenti a többiek számára elérhető mennyiséget. (→ 24.4.)

közöttiségi központiság (*betweenness centrality*) – a csomópontpárok közötti legrövidebb utak mekkora része halad át egy csomóponton. (→ 22.1.)

kritérium (*criterion*) – az alternatívák értékelésének egy szempontja, iránnyal, skálával és mérési szabállyal. (→ 7.)

küszöbmodell (*threshold model*) – a szereplők akkor csatlakoznak, ha a már csatlakozottak aránya meghaladja a saját küszöbüket. (→ 21.3.)

lineáris programozás (*linear programming*) – lineáris célfüggvény optimalizálása lineáris egyenlőtlenség-korlátok mellett. (→ 13.5.)

Little törvénye (*Little's law*) – stabil rendszerben a bent lévők átlagos száma az érkezési intenzitás és az átlagos átfutási idő szorzata, $L = \lambda W$. (→ 20.5.)

Ljapunov-exponens (*Lyapunov exponent*) – a közeli pályák átlagos exponenciális távolodási üteme; pozitív értéke káoszt jelez. (→ 19.9.)

logisztikus leképezés (*logistic map*) – az $y(t+1) = R\,y(t)(1-y(t))$ differenciaegyenlet, amely a paraméter növelésével periódus-kettőződéseken át kaotikussá válik. (→ 19.9.)

Markov-lánc (*Markov chain*) – olyan állapotváltozási folyamat, amelyben a következő állapot csak a jelenlegitől függ. (→ 20.1.)

maximin, minimax megbánás (*maximin, minimax regret*) – mély bizonytalanság alatti döntési szabályok: a legrosszabb kimenet maximalizálása, illetve a legnagyobb megbánás minimalizálása. (→ 17.3.)

mechanizmustervezés (*mechanism design*) – olyan szabályok tervezése, amelyek mellett a szereplők saját érdekükből a közösen kívánatos kimenetet választják. (→ 24.)

mély bizonytalanság (*deep uncertainty*) – a lehetséges kimenetek, valószínűségeik vagy a modell szerkezete sem ismert vagy nem egyeztethető. (→ 17.1.)

Monte Carlo-szimuláció (*Monte Carlo simulation*) – a bemenetek eloszlásából vett véletlen mintákkal becsüli a kimenet eloszlását. (→ 16.)

morfológiai tábla (*morphological box*) – a megoldás tulajdonságainak és lehetséges változataiknak táblázata, a kombinációk szisztematikus kereséséhez. (→ 4.2.)

Nash-egyensúly (*Nash equilibrium*) – stratégiakombináció, amelyben egyik szereplő sem tud egyoldalú eltéréssel jobbat elérni. (→ 23.2.)

nyitókártya – a könyv rövid, helyzetből induló bevezető egysége (cím, helyzet, a lényeg, kérdés) egy interaktív nézettel. (→ 1.7.)

oksági hatás (*causal effect*) – egy beavatkozás hatása a kimenetre, szemben a puszta együttjárással. (→ 18.5.)

Pareto-front (*Pareto front*) – azoknak a megoldásoknak a halmaza, amelyek egyik célban sem javíthatók a másik rontása nélkül. (→ 13.4.)

Pigou-díj (*Pigouvian tax*) – a negatív externália mértékével arányos díj, amely a szereplőkkel megfizetteti döntésük másokra hárított költségét. (→ 24.1.)

Pólya-urna (*Pólya urn*) – önerősítő folyamat, amelyben a korai véletlen események tartósan meghatározzák a kimenetet. (→ 21.5.)

preferenciális kapcsolódás (*preferential attachment*) – az új csomópontok nagyobb eséllyel kapcsolódnak a sok kapcsolattal rendelkezőkhöz. (→ 22.3.)

PROMETHEE – páros preferenciafüggvényekre épülő felülmúlási módszer, pozitív, negatív és nettó árammal. (→ 11.3.)

rangelfogadottság (*rank acceptability*) – annak valószínűsége, hogy egy alternatíva a súlyok bizonytalansága mellett egy adott helyre kerül (SMAA). (→ 12.5.)

rangsorfordulás (*rank reversal*) – két alternatíva sorrendje megváltozik egy harmadik hozzáadásakor vagy elvételekor. (→ 10.5.)

rangsorkülönbség-összeg, SRD (*sum of ranking differences*) – egy rangsor és a referencia rangszámai közötti eltérések abszolút értékének összege; véletlen rangsorokkal validálható. (→ 12.6.)

rendszerhatár (*system boundary*) – annak rögzítése, mi tartozik a vizsgált döntési helyzethez, és mi nem. (→ 2.3.)

replikátordinamika (*replicator dynamics*) – a stratégiák aránya a relatív sikerességükkel arányosan változik. (→ 25.1.)

részjáték-tökéletes egyensúly (*subgame perfect equilibrium*) – visszagöngyölítéssel kapott egyensúly, amely kizárja a hiteltelen fenyegetéseket. (→ 23.6.)

sajátvektor (*eigenvector*) – az AHP-ben a páros összehasonlító mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó, normált prioritásvektor. (→ 9.3.)

Schelling-modell – enyhe helyi preferenciákból erős elkülönülést mutató ágensalapú modell. (→ 22.4.)

SIR-modell (*SIR model*) – a fogékonyak, a fertőzők és a gyógyultak arányának változását leíró járványmodell. (→ 21.2.)

Solow-modell (*Solow growth model*) – a tőkefelhalmozás és az értékcsökkenés egyensúlyát leíró növekedési modell; tartós növekedést csak a technológiai haladás ad. (→ 19.8.1.)

stacionárius eloszlás (*stationary distribution*) – Markov-lánc olyan eloszlása, amely egy lépés után változatlan marad. (→ 20.3.)

svájcisajt-modell (*Swiss cheese model*) – a balesetek több védelmi réteg egyidejű hibájából erednek. (→ 17.5.)

szállítási feladat (*transportation problem*) – források kínálatának célpontok igényéhez rendelése a legkisebb költséggel. (→ 13.5.1.)

szépségverseny-játék (*p-beauty contest*) – a játékosok egy 0 és 100 közötti számot tippelnek, és az nyer, aki a tippek átlagának p-szereséhez ($p < 1$) legközelebb jár; a stratégiai gondolkodás mélységét méri. (→ 23.3.)

szimulációs hiba (*simulation error*) – a véges mintaszám miatti véletlen ingadozás a Monte Carlo-becslésben. (→ 16.3.)

újrarendelési pont (*reorder point*) – az a készletszint, amelynél új rendelést kell feladni: az átfutási idő alatti átlagos igény és a biztonsági készlet összege. (→ 19.2.1.)

újságárus-modell (*newsvendor model*) – egyszeri rendelés romlandó termékből; az optimális mennyiséget a hiány és a maradék egységköltségének aránya, a kritikus hányados határozza meg. (→ 19.2.2.)

várakozási sor, M/M/1 (*queue*) – Poisson-érkezésű, exponenciális kiszolgálású, egykiszolgálós sorbanállási modell, amely születési–halálozási folyamatként elemezhető. (→ 20.5.)

véletlen bolyongás (*random walk*) – egymástól független véletlen lépések összege; a szerencse és a valódi teljesítmény összetévesztésének klasszikus modellje. (→ 16.8.)

visszacsatolási hurok (*feedback loop*) – a rendszer kimenete visszahat a bemenetére; lehet erősítő vagy kiegyenlítő. (→ 19.4.)

visszagöngyölítés (*backward induction, rolling back*) – a döntési fa vagy a sorrendi játék megoldása a végpontoktól visszafelé. (→ 14.4.)

VUCA, VUCA Prime – a változékony, bizonytalan, komplex és kétértelmű környezet mozaikszava, illetve Bob Johansen válasza rá: vízió, megértés, tisztánlátás és mozgékonyság. (→ Előszó.)

zéróösszegű játék (*zero-sum game*) – az egyik szereplő nyeresége a másik vesztesége. (→ A.9.)



Pannon Egyetem
University of Pannonia

Modellalapú döntéshozatal

Tankönyv

Nyílt hozzáférésű tankönyv
https://complexsystemsintelligence.github.io/modellalapu-donteshozas/kezikonyv/